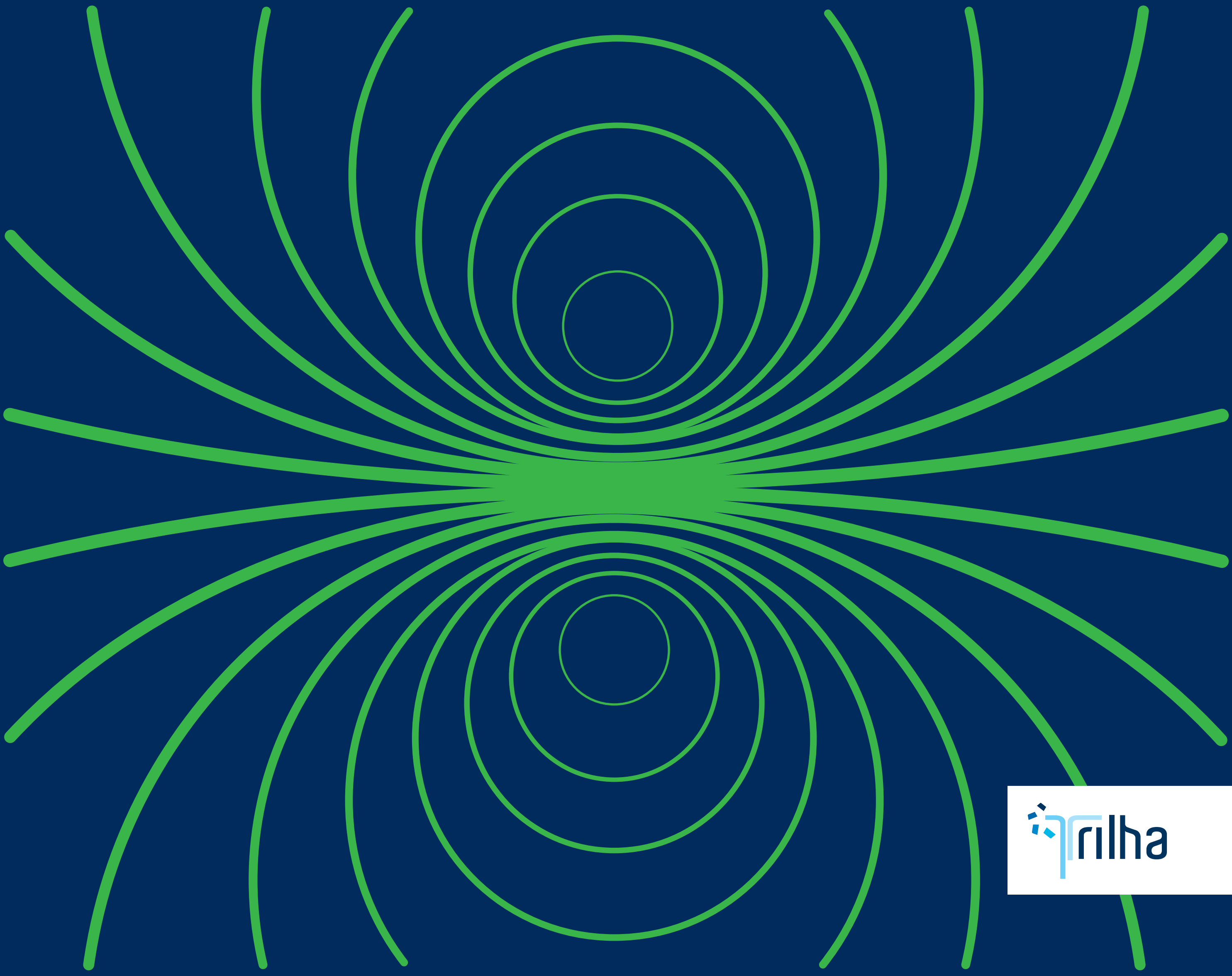
CENGAGE Learning®

cálculo

Tradução da 7ª edição norte-americana **Volume 2**



Trilha

James Stewart

CÁLCULO

VOLUME II

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume 2 / James Stewart ; tradução EZ2 Translate. -- São Paulo : Cengage Learning, 2013.

Título original: Calculus : early transcendentals
7. ed. americana.
Bibliografia.
ISBN 978-85-221-1463-4

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios etc. I. Título.

13-05575 CDD-515-515.076

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

CÁLCULO

VOLUME II

Tradução da 7ª edição norte-americana

JAMES STEWART

McMaster University
e
University of Toronto

Tradução:
EZ2translate

Revisão técnica:
Ricardo Miranda Martins
Professor Doutor da Universidade Estadual
de Campinas (Unicamp)

CENGAGE
Learning®

Austrália • Brasil • Japão • Coreia • México • Cingapura • Espanha • Reino Unido • Estados Unidos

CENGAGE
Learning

Cálculo – Volume II – Tradução da 7ª edição norte-americana
Versão métrica internacional
James Stewart

Gerente Editorial: Patricia La Rosa

Supervisora Editorial: Noelma Brocanelli

Supervisora de Produção Gráfica: Fabiana Alencar Albuquerque

Editora de Desenvolvimento: Gisela Carnicelli

Título Original: Calculus – Early transcendentals
ISBN-13: 978-0-538-49887-6
ISBN-10: 0-538-49887-0

Tradução: EZ2Translate

Tradução técnica da 6ª edição: Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins

Revisão Técnica: Ricardo Miranda Martins

Cotejo e revisão: Cristiane Morinaga, Mônica Aguiar e Rosângela Ramos da Silva

Editora de direitos de aquisição e iconografia: Vivian Rosa

Diagramação: Cia. Editorial e Celina Hida

Capa: Sergio Bergocce

© 2012, 2008 Brooks/Cole, parte da Cengage Learning
© 2014 Cengage Learning Edições Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, sejam quais forem os meios empregados, sem a permissão, por escrito, da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei no 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Para informações sobre nossos produtos,
entre em contato pelo telefone **0800 11 19 39**
Para permissão de uso de material desta obra,
envie seu pedido
para **direitosautorais@cengage.com**

© 2014 Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

ISBN 13: 978-85-221-1463-4
ISBN 10: 85-221-1463-3

Cengage Learning
Condomínio E-Business Park
Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 04
Lapa de Baixo – CEP 05069-900
São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900 – Fax: (11) 3665-9901
SAC: 0800 11 19 39
Para suas soluções de curso e aprendizado, visite
www.cengage.com.br

Impresso no Brasil.
Printed in Brazil.
1 2 3 4 5 6 7 16 15 14 13

Sumário

Prefácio xi

Testes de Verificação xxi

Uma Apresentação do Cálculo xxvii

9 Equações Diferenciais 525

9.1 Modelagem com Equações Diferenciais 526

9.2 Campos de Direções e Método de Euler 531

9.3 Equações Separáveis 538

Projeto Aplicado ▪ Quão Rapidamente um Tanque Esvazia? 546

Projeto Aplicado ▪ O Que É Mais Rápido, Subir ou Descer? 547

9.4 Modelos para Crescimento Populacional 548

9.5 Equações Lineares 557

9.6 Sistemas Predador-Presa 563

Revisão 569

Problemas Quentes 572

10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares 575

10.1 Curvas Definidas por Equações Paramétricas 576

Projeto de Laboratório ▪ Rolando Círculos ao Redor de Círculos 583

10.2 Cálculo com Curvas Parametrizadas 584

Projeto de Laboratório ▪ Curvas de Bézier 591

10.3 Coordenadas Polares 592

Projeto de Laboratório ▪ Famílias de Curvas Polares 601

10.4 Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares 602

10.5 Seções Cônicas 606

10.6 Seções Cônicas em Coordenadas Polares 613

Revisão 619

Problemas Quentes 621

11 Sequências e Séries Infinitas 623

11.1 Sequências 624

Projeto de Laboratório ▪ Sequências Logísticas 635

11.2 Séries 636

11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas 645

11.4 Os Testes de Comparação 652

11.5 Séries Alternadas 657

11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz 661

11.7 Estratégia para Testes de Séries 667

11.8 Séries de Potência 669
11.9 Representações de Funções como Séries de Potências 674
11.10 Séries de Taylor e Maclaurin 679
Projeto de Laboratório ■ Um Limite Elusivo 691
Projeto Escrito ■ Como Newton Descobriu a Série Binomial 691
11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor 692
Projeto Aplicado ■ Radiação Proveniente das Estrelas 700
Revisão 701
Problemas Quentes 703

12 Vetores e a Geometria do Espaço 707

12.1 Sistemas de Coordenadas Tridimensionais 708
12.2 Vetores 713
12.3 O Produto Escalar 721
12.4 O Produto Vetorial 727
Projeto de Descoberta ■ A Geometria de um Tetraedro 734
12.5 Equações de Retas e Planos 735
Projeto de Laboratório ■ Colocando 3D em Perspectiva 743
12.6 Cilindros e Superfícies Quádricas 744
Revisão 750
Problemas Quentes 752

13 Funções Vetoriais 755

13.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais 756
13.2 Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais 763
13.3 Comprimento de Arco e Curvatura 768
13.4 Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração 776
Projeto Aplicado ■ Leis de Kepler 785
Revisão 786
Problemas Quentes 789

14 Derivadas Parciais 791

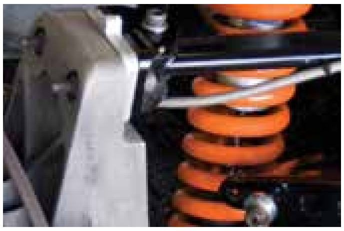
14.1 Funções de Várias Variáveis 792
14.2 Limites e Continuidade 804
14.3 Derivadas Parciais 811
14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares 823
14.5 A Regra da Cadeia 831
14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente 839
14.7 Valores Máximo e Mínimo 850
Projeto Aplicado ■ Projeto de uma Caçamba 858
Projeto de Descoberta ■ Aproximações Quadráticas e Pontos Críticos 859
14.8 Multiplicadores de Lagrange 860
Projeto Aplicado ■ Ciência dos Foguetes 866
Projeto Aplicado ■ Otimização de uma Turbina Hidráulica 867
Revisão 868
Problemas Quentes 871

15 Integrais Múltiplas 873

15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 874
15.2 Integrais Iteradas 882
15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 887
15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares 895
15.5 Aplicações de Integrais Duplas 901
15.6 Área de Superfície 910
15.7 Integrais Triplas 913
Projeto de Descoberta ■ Volumes de Hiperesferas 922
15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas 922
Projeto de Laboratório ■ A Intersecção de Três Cilindros 926
15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas 927
Projeto Aplicado ■ Corrida na Rampa 933
15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 933
Revisão 941
Problemas Quentes 944

16 Cálculo Vetorial 947

16.1 Campos Vetoriais 948
16.2 Integrais de Linha 954
16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha 963
16.4 Teorema de Green 971
16.5 Rotacional e Divergente 977
16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas 983
16.7 Integrais de Superfície 993
16.8 Teorema de Stokes 1003
Projeto Aplicado ■ Três Homens e Dois Teoremas 1007
16.9 O Teorema do Divergente 1008
16.10 Resumo 1013
Revisão 1014
Problemas Quentes 1016



17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1019

17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem 1020
17.2 Equações Lineares Não Homogêneas 1026
17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem 1032
17.4 Soluções em Séries 1039
Revisão 1043

Apêndices A1

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
B Geometria Analítica e Retas A9
C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
D Trigonometria A21
E Notação de Somatória (Ou Notação Sigma) A30
F Demonstrações dos Teoremas A35

G O Logaritmo Definido como uma Integral A44
H Números Complexos A51
I Respostas para os Exercícios Ímpares A58

Índice Remissivo **I1**

Volume I

Capítulo 1 Funções e Modelos
Capítulo 2 Limites e Derivadas
Capítulo 3 Regras de Derivação
Capítulo 4 Aplicações de Derivação
Capítulo 5 Integrais
Capítulo 6 Aplicações de Integração
Capítulo 7 Técnicas de Integração
Capítulo 8 Mais Aplicações de Integração

Prefácio

Esta edição difere da original de *Cálculo,* sétima edição, em vários aspectos.

As unidades utilizadas em quase todos os exemplos e exercícios foram alteradas de unidades habituais dos EUA para unidades métricas. Há um pequeno número de exceções: em algumas aplicações de engenharia (principalmente na Seção 8.3) pode ser útil alguns engenheiros familiarizarem-se com unidades norte-americanas. E eu quis manter alguns exercícios (por exemplo, aqueles envolvendo beisebol) nos quais seria inapropriado o uso de unidades métricas.

Alterei os exemplos e exercícios envolvendo dados reais para que eles passassem a ter abrangência internacional, de modo que a grande maioria agora vem de outros países além dos Estados Unidos. Por exemplo, agora há exercícios e exemplos referentes a tarifas postais em Hong Kong; dívida pública canadense; índices de desemprego na Austrália; horas de luz do dia em Ancara, na Turquia; isotermas na China; porcentagem da população na zona rural da Argentina; populações da Malásia, Indonésia, México e Índia; consumo de energia em Ontário, entre muitos outros.

Além de modificar os exercícios para que as unidades sejam métricas e os dados tenham abrangência internacional, uma série de outros também foi modificada, o que resulta em cerca de 10% dos exercícios diferentes daqueles da versão original.

Filosofia do Livro

A arte de ensinar, disse Mark Van Doren, é a arte de auxiliar a descoberta. Eu tentei escrever um livro que auxilie os estudantes a descobrirem o cálculo – tanto seu poder prático quanto sua surpreendente beleza. Nesta edição, assim como nas seis primeiras, minha intenção é transmitir ao estudante uma noção da utilidade do cálculo e desenvolver a competência técnica, mas também me esforço para propiciar certo apreço pela beleza intrínseca do tema. Newton indubitavelmente experimentou uma sensação de triunfo quando fez suas grandes descobertas. Quero que os estudantes compartilhem um pouco desse entusiasmo.

A ênfase concentra-se na compreensão dos conceitos. Acredito que quase todos concordam que este deve ser o principal objetivo do ensino do cálculo. De fato, o ímpeto para o movimento atual de reforma do cálculo veio da Conferência de Tulane, em 1986, que formulou como primeira recomendação:

Concentrar-se na compreensão de conceitos.

Tentei atingir esse objetivo por meio da *Regra dos Três:* “Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente”. A visualização, a experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram o modo como ensinamos o raciocínio conceitual de maneiras fundamentais. A Regra dos Três foi expandida para tornar-se a *Regra dos Quatro*, enfatizando também o ponto de vista verbal ou descritivo.

Ao escrever esta sétima edição, parti da premissa de que é possível alcançar a compreensão conceitual e ainda manter as melhores tradições do cálculo tradicional. O livro contém elementos da reforma, porém, dentro do contexto de uma grade curricular tradicional.

O que há de novo na 7ª edição?

As alterações são resultantes de conversas que tive com meus colegas e alunos da University of Toronto, da leitura de periódicos, bem como de sugestões de leitores e examinadores. Aqui estão algumas das muitas melhorias que incorporei a esta edição:

- Alguns materiais foram reescritos para maior clareza ou melhor motivação. Consulte, por exemplo, a introdução a Valores Máximo e Mínimo no Capítulo 4, a Introdução a Séries no Capítulo 11 e a Motivação Para o Produto Vetorial no Capítulo 12.
- Novos exemplos foram adicionados (consulte o Exemplo 4 da Seção 15.7) e as soluções para alguns dos exemplos existentes foram ampliadas. Adicionei detalhes à resolução do Exemplo 2.3.11, pois, quando ensinei a Seção 2.3 usando a sexta edição, percebi que os alunos precisavam de uma maior orientação ao estabelecerem desigualdades para o Teorema do Confronto.
- O projeto gráfico foi renovado: novas figuras foram incorporadas e uma porcentagem substancial das existentes foi redesenhada.
- Os dados dos exemplos e exercícios foram atualizados para serem mais oportunos.
- Três novos projetos foram adicionados: *O Índice de Gini* (Capítulo 6) explora como medir a distribuição de renda entre os habitantes de um dado país e é uma boa aplicação de áreas entre curvas. (Agradeço a Klaus Volpert por sugerir esse projeto.)
- *Famílias de Curvas Implícitas* (Capítulo 16) investiga as formas mutantes de curvas definidas implicitamente conforme os parâmetros em uma família variam. *Famílias de Curvas Polares* (Capítulo 10) exibe as fascinantes formas de curvas polares e como elas evoluem dentro de uma família.
- A seção sobre a área de superfície do gráfico de uma função de duas variáveis passou a ser a Seção 15.6, para a conveniência de professores que gostam de ensinar esse tópico depois de integrais duplas, embora todo o tratamento da área de superfície permaneça no Capítulo 16.
- Continuo buscando exemplos de como o cálculo se aplica a tantos aspectos do mundo real. Na Seção 14.3, você verá belas imagens da força do campo magnético da Terra e sua segunda derivada vertical calculada a partir da equação de Laplace. Agradeço a Roger Watson por despertar minha atenção para como isso é usado na geofísica e na exploração mineral.
- Mais de 25% dos exercícios de cada capítulo são novos. Eis alguns dos meus favoritos: 1.6.58, 2.6.51, 2.8.13–14, 3.3.56, 3.4.67, 3.5.69–72, 3.7.22, 4.3.86, 5.2.51–53, 6.4.30, 11.2.49–50, 11.10.71–72, 12.1.44, 12.4.43–44.

Aprimoramentos tecnológicos

- A mídia e a tecnologia de apoio ao texto foram aprimoradas para conceder aos professores maior controle sobre seu curso, oferecer uma ajuda extra para lidar com os diferentes níveis de preparação dos estudantes para o curso de cálculo e apoiar a compreensão de conceitos.

  Novos recursos – Enhanced WebAssign incluindo um Cengage YouBook personalizável, revisão *Just in Time*, *Show Your Work,* Answer Evaluator, Personalized Study Plan, Master Its, vídeos de resolução, videoclipes de aulas (com perguntas associadas) e *Visualizing Calculus* (animações TEC com perguntas associadas) – foram desenvolvidos para facilitar a aprendizagem por parte dos estudantes e propiciar um ensino mais flexível na sala de aula.

  Para mais informações sobre como adquirir o cartão de acesso ao Enhanced WebAssign, contate vendas.cengage@cengage.com. Esta ferramenta está disponível em inglês.
- *Tools for Enriching Calculus* (TEC) foram completamente reformuladas e estão disponíveis no Enhanced WebAssign. Auxílios visuais e módulos selecionados estão disponíveis no site do autor. Acesse www.stewartcalculus.com. Na página inicial, clique em Calculus 7E – Early Transcendentals. Você terá acesso a vários recursos: Tópicos adicionais, weblinks e *Homework Hints*, recurso especial que vai ajudá-lo a resolver exercícios selecionados.

Recursos

EXERCÍCIOS CONCEITUAIS A maneira mais importante de promover a compreensão de conceitos é por meio de situações-problema. Para esse fim, concebi diversos tipos de problemas. Alguns conjuntos de exercícios começam com solicitações para explicar os significados dos conceitos básicos da seção. (Consulte, por exemplo, os primeiros exercícios das Seções 2.2, 2.5, 11.2, 14.2 e 14.3.) Da mesma forma, todas as seções de revisão começam com uma Verificação de Conceitos e um Teste de Verdadeiro ou Falso. Outros exercícios testam a compreensão de conceitos através de gráficos ou tabelas (consulte os Exercícios 2.7.17, 2.8.35–40, 2.8.43–46, 9.1.11–13, 10.1.24–27, 11.10.2, 13.2.1–2, 13.3.33–39, 14.1.1–2, 14.1.32–42, 14.3.3–10, 14.6.1–2, 14.7.3–4, 15.1.5–10, 16.1.11–18, 16.2.17–18 e 16.3.1–2).

Outro tipo de exercício utiliza a descrição verbal para testar a compreensão de conceitos (consulte os Exercícios 2.5.10, 2.8.58, 4.3.63–64 e 7.8.67). Eu particularmente valorizo problemas que combinam e comparam abordagens gráficas, numéricas e algébricas (consulte os Exercícios 2.6.39-40, 3.7.27 e 9.4.2).

EXERCÍCIOS COM DIFICULDADE PROGRESSIVA Cada grupo de exercícios é cuidadosamente classificado, progredindo de exercícios conceituais básicos e problemas que visam ao desenvolvimento de habilidades, até problemas mais desafiadores, envolvendo demonstrações e aplicações.

DADOS REAIS Eu e minha equipe nos empenhamos em pesquisar dados do mundo real em bibliotecas, empresas, órgãos governamentais e na Internet que pudessem apresentar, motivar e ilustrar os conceitos de cálculo. Por esse motivo, muitos exercícios e exemplos lidam com funções definidas por tais dados numéricos ou gráficos. Eles podem ser vistos, por exemplo, na Figura 1 da Seção 1.1 (os sismogramas do terremoto de Northridge), ou no Exercício 2.8.36 (porcentagem da população acima dos 60 anos), Exercício 5.1.16 (velocidade do ônibus espacial *Endeavour*) ou na Figura 4 da Seção 5.4 (consumo de energia elétrica em São Francisco). Funções de duas variáveis são ilustradas por uma tabela de valores do índice de sensação térmica como uma função da temperatura do ar e da velocidade do vento (Exemplo 2 da Seção 14.1). Derivadas parciais são introduzidas na Seção 14.3, examinando uma coluna em uma tabela de valores do índice de conforto térmico (temperatura percebida do ar) como uma função da temperatura real e da umidade relativa. Este exemplo é aprofundado em conexão com aproximações lineares (Exemplo 3 da Seção 14.4). Derivadas direcionais são introduzidas na Seção 14.6 por meio de um mapa de contorno da temperatura para estimar a taxa de mudança da temperatura num trajeto para o leste a partir de Chongqing. Integrais duplas são usadas para estimar a precipitação de neve média no Colorado em 20-21 de dezembro de 2006 (Exemplo 4 da Seção 15.1). Campos vetoriais são introduzidos na Seção 16.1 por representações de campos vetoriais de velocidade real mostrando os padrões do vento da Baía de São Francisco.

PROJETOS Uma maneira de despertar o interesse dos alunos – e facilitar a aprendizagem – é fazer com que trabalhem (às vezes em grupos) em projetos mais aprofundados, que transmitam um verdadeiro sentimento de realização quando completados. Incluí quatro tipos de projetos: os *Projetos Aplicados* visam despertar a imaginação dos estudantes. O projeto após a Seção 9.3 pergunta se uma bola arremessada para cima demora mais para atingir sua altura máxima ou para cair de volta a sua altura original (a resposta pode surpreendê-lo). O projeto após a Seção 14.8 utiliza os multiplicadores de Lagrange para determinar as massas dos três estágios de um foguete de modo a minimizar a massa total ao mesmo tempo permitindo que o foguete atinja a velocidade desejada. Os *Projetos de Laboratório* envolvem tecnologia. O projeto subsequente à Seção 10.2 mostra como usar as curvas de Bézier para desenhar formas que representem letras para uma impressora a laser. Os *Projetos Escritos* exigem que os estudantes comparem os métodos atuais àqueles desenvolvidos pelos fundadores do cálculo – por exemplo, o método criado por Fermat para encontrar as tangentes. Algumas referências são dadas sobre o assunto. Os *Projetos de Descoberta* antecipam resultados a serem discutidos posteriormente ou incentivam a descoberta por meio do reconhecimento de padrões (consulte o projeto após a Seção 7.6). Outros exploram os aspectos da geometria: tetraedros (após a Seção 12.4), hiperesferas (após a Seção 15.7) e interseções de três cilindros (após a Seção 15.8). Projetos adicionais podem ser encontrados no *Manual do Professor* (consulte, por exemplo, o Exercício em Grupo 5.1: Posição de Amostras). O Manual do Professor está disponível, em inglês, na Trilha.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS Os estudantes normalmente têm mais dificuldades naqueles problemas em que não há um único procedimento para se chegar à solução. Acredito que não ocorreram muitos avanços na área de resolução de problemas após a estratégia em quatro estágios proposta por George Polya. Inseri, portanto, uma versão dessa estratégia após o Capítulo 1. Esse método é utilizado explícita e implicitamente em todo o livro. Depois dos demais capítulos, incluí seções denominadas *Problemas Quentes*, apresentando exemplos de como lidar com problemas de cálculo mais desafiadores. Ao selecionar os diversos problemas nessas seções, tentei seguir o conselho dado por David Hilbert: “Um problema matemático deve ser difícil a ponto de nos desafiar, mas não inacessível a ponto de zombar de nossos esforços". Ao propor problemas difíceis em tarefas e provas, costumo corrigi-los de forma diferenciada. Neles, procuro valorizar principalmente as ideias que levam à resposta e o reconhecimento dos princípios de resolução mais relevantes para a solução do problema.

TECNOLOGIA A disponibilidade de tecnologia não diminui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos. Este livro pode ser utilizado com ou sem o emprego de ferramentas tecnológicas – dois símbolos especiais são usados para indicar precisamente quando um tipo especial de aparelho é necessário. O símbolo ⊞ indica um exercício que definitivamente requer o uso dessas tecnologias (o que não quer dizer que seu uso nos demais exercícios seja proibido). O símbolo SCA aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92). Mas a tecnologia não torna lápis e papel obsoletos. Frequentemente, são preferíveis os cálculos e esboços feitos a mão, para ilustrar e reforçar alguns conceitos. Tanto professores quanto estudantes precisam aprender a discernir quando é mais adequado o uso das máquinas ou o cálculo a mão.

TOOLS FOR ENRICHING™ CALCULUS As TEC são um complemento ao livro e destinam-se a enriquecer e complementar seu conteúdo. (Este recurso deve ser acessado pelo Enhanced WebAssign. Desenvolvidas por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn e por mim, as TEC utilizam uma abordagem exploradora e de descoberta. Nas seções do livro onde a tecnologia é particularmente apropriada, ícones direcionam os estudantes aos módulos das TEC que oferecem um ambiente laboratorial no qual eles podem explorar o tópico de maneiras diferentes e em diferentes níveis. Os auxílios visuais são animações de figuras no texto; módulos são atividades mais elaboradas e incluem exercícios. Os professores podem optar por se envolver em níveis diferentes, indo desde simplesmente encorajar os estudantes a usar os auxílios visuais e módulos para a exploração independente, até atribuir exercícios específicos a partir daqueles incluídos em cada módulo, ou criar exercícios adicionais, laboratórios e projetos que façam uso dos auxílios visuais e dos módulos.

HOMEWORK HINTS São dicas para os exercícios apresentados na forma de perguntas que tentam imitar um efetivo assistente de ensino; funcionam como um tutor silencioso. Dicas para exercícios selecionados (normalmente de número ímpar) são incluídas em cada seção do livro, indicadas pelo número do exercício em vermelho. Elas foram elaboradas de modo a não revelarem mais do que é minimamente necessário para se fazer progresso. Estão disponíveis aos estudantes em www.stewartcalculus.com e no Enhanced WebAssign. Recurso em inglês.

ENHANCED WEBASSIGN A tecnologia está impactando sobre a forma como a lição de casa é passada aos estudantes, particularmente em classes grandes. O uso da lição de casa on-line está crescendo e sua atratividade depende da facilidade de uso, precisão na correção e confiabilidade. Com esta edição, trabalhamos com a comunidade de cálculo e o WebAssign a fim de desenvolver um sistema de lição de casa on-line mais vigoroso. Até 70% dos exercícios em cada seção podem ser passados como lição de casa on-line, incluindo exercícios de resposta livre, múltipla escolha e formatos de partes múltiplas.

O sistema também inclui Active Examples, nos quais os estudantes são guiados em tutoriais passo a passo através de exemplos do livro, com links para o livro e resoluções em vídeo. Novas melhorias ao sistema incluem um eBook personalizado, um recurso *Show Your Work*, revisão *Just in Time* de pré-requisitos pré-cálculo, um Assignment Editor aperfeiçoado e um Answer Evaluator que aceita mais respostas matematicamente equivalentes e permite a correção da lição de casa de forma bem semelhante àquela feita por um instrutor. Para mais informações sobre como adquirir o cartão de acesso a esta ferramenta, contate: vendas.cengage@cengage.com. Recurso em inglês.

www.stewartcalculus.com O site do autor inclui:

- Homework Hints
- História da Matemática, com links para os melhores *sites* históricos
- Tópicos adicionais (completos, com conjuntos de exercícios): série de Fourier, fórmulas para o resto na série de Taylor, rotação dos eixos
- Links, para tópicos específicos, para outros recursos da web

Nota da Editora:
Até o fechamento desta edição, todos os sites contidos neste livro estavam com o funcionamento normal. A Cengage Learning não se responsabiliza pela suspensão dos mesmos.

Todo o material disponível no site do autor está em inglês.

Na Trilha

- Problemas de Desafio (para capítulos selecionados, com soluções e respostas)
- Problemas Arquivados para todos os capítulos, com soluções e respostas
- Slides de Power Point®
- Revisão de Álgebra (em inglês)
- Revisão de Geometria Analítica (em inglês)
- Suplemento: *Mentiras que minha calculadora e computador me contaram* com exercícios e soluções
- Manual do professor (material em inglês, para professores que adotam a obra)

Acesso pelo site http://cursosonline.cengage.com.br.

Conteúdo

Testes de Verificação O livro começa com quatro testes de verificação: Álgebra Básica, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria.

Uma Apresentação do Cálculo Temos aqui um panorama da matéria, incluindo uma série de questões para nortear o estudo do cálculo.

VOLUME I

1 Funções e Modelos Desde o princípio, a multiplicidade de representações das funções é valorizada: verbal, numérica, visual e algébrica. A discussão dos modelos matemáticos conduz a uma revisão das funções gerais, incluindo as funções exponenciais e logarítmicas, por meio desses quatro pontos de vista.

2 Limites e Derivadas O material sobre limites decorre da discussão prévia sobre os problemas da tangente e da velocidade. Os limites são tratados dos pontos de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico. A Seção 2.4, sobre a definição precisa de limite por meio de epsilons e deltas, é opcional. As Seções 2.7 e 2.8 tratam das derivadas (principalmente com funções definidas gráfica e numericamente) antes da introdução das regras de derivação (que serão discutidas no Capítulo 3). Aqui, os exemplos e exercícios exploram o significado das derivadas em diversos contextos. As derivadas de ordem superior são apresentadas na Seção 2.8.

3 Regras de Derivação Todas as funções básicas, incluindo as exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas são derivadas aqui. Quando as derivadas são calculadas em situações aplicadas, é solicitado que o aluno explique seu significado. Nesta edição, o crescimento e decaimento exponencial são tratados neste capítulo.

4 Aplicações de Derivação Os fatos básicos referentes aos valores extremos e formas de curvas são deduzidos do Teorema do Valor Médio. O uso de tecnologias gráficas ressalta a interação entre o cálculo e as calculadoras e a análise de famílias de curvas. São apresentados alguns problemas de otimização, incluindo uma explicação de por que precisamos elevar nossa cabeça a 42º para ver o topo de um arco-íris.

5 Integrais Problemas de área e distância servem para apresentar a integral definida, introduzindo a notação de somatória (ou notação sigma) quando necessária (esta notação é estudada de forma mais completa no Apêndice E). Dá-se ênfase à explicação do significado das integrais em diversos contextos e à obtenção de estimativas para seus valores a partir de tabelas e gráficos.

6 Aplicações de Integração Aqui, são apresentadas algumas aplicações de integração – área, volume, trabalho, valor médio – que podem ser feitas sem o uso de técnicas avançadas. Dá-se ênfase aos métodos gerais. O objetivo é que os alunos consigam dividir uma dada quantidade em partes menores, estimar usando somas de Riemann e que sejam capazes de reconhecer o limite como uma integral.

7 Técnicas de Integração Todos os métodos tradicionais são mencionados, mas é claro que o verdadeiro desafio é perceber qual técnica é mais adequada a cada situação. Por esse motivo, na Seção 7.5 apresentamos estratégias para calcular integrais. O uso de sistemas de computação algébrica é discutido na Seção 7.6.

8 Mais Aplicações de Integração Aqui estão as aplicações de integração para as quais é útil dispor de todas as técnicas de integração – área de superfície e comprimento do arco – bem como outras aplicações à biologia, à economia e à física (força hidrostática e centros de massa). Também foi incluída uma seção tratando de probabilidades. Há mais aplicações do que se pode estudar em qualquer curso, assim, o professor deve selecionar aquelas que julgue mais interessantes ou adequadas a seus alunos.

VOLUME II

9 Equações Diferenciais Modelagem é o tema que unifica esse tratamento introdutório de equações diferenciais. Campos direcionais e o método de Euler são estudados antes de as equações separáveis e lineares serem solucionadas explicitamente, de modo que abordagens qualitativas, numéricas e analíticas recebem a mesma consideração. Esses métodos são aplicados aos modelos exponenciais, logísticos dentre outros para o crescimento populacional. As quatro ou cinco primeiras seções deste capítulo servem como uma boa introdução a equações diferenciais de primeira ordem. Uma seção final opcional utiliza os modelos presa-predador para ilustrar sistemas de equações diferenciais.

10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares Este capítulo introduz curvas paramétricas e polares e aplica os métodos de cálculo a elas. As curvas paramétricas são adequadas a projetos laboratoriais; as apresentadas aqui envolvem famílias de curvas e curvas de Bézier. Um breve tratamento de seções cônicas em coordenadas polares prepara o caminho para as Leis de Kepler, no Capítulo 13.

11 Sequências e Séries Infinitas Os testes de convergência possuem justificativas intuitivas, bem como demonstrações formais. Estimativas numéricas de somas de séries baseiam-se em qual teste foi usado para demonstrar a convergência. A ênfase é dada à série de Taylor e aos polinômios e suas aplicações à física. Estimativas de erro incluem aquelas de dispositivos gráficos.

12 Vetores e a Geometria do Espaço O material sobre geometria analítica tridimensional e vetores está dividido em dois capítulos. O Capítulo 12 trata de vetores, produtos escalar e vetorial, retas, planos e superfícies.

13 Funções Vetoriais Aqui, são estudadas as funções a valores vetoriais, suas derivadas e integrais, o comprimento e curvatura de curvas espaciais e a velocidade e aceleração ao longo dessas curvas, finalizando com as Leis de Kepler.

14 Derivadas Parciais As funções de duas ou mais variáveis são estudadas do ponto de vista verbal, numérico, visual e algébrico. As derivadas parciais são introduzidas mediante a análise de uma coluna particular de uma tabela com índices de conforto térmico (temperatura aparente do ar), como função da temperatura medida e da umidade relativa.

15 Integrais Múltiplas Para calcular as médias de temperatura e precipitação de neve em dadas regiões, utilizamos mapas de contorno e a Regra do Ponto Médio. São usadas integrais duplas e triplas no cálculo de probabilidades, área de superfície e, em projetos, do volume de hiperesferas e da interseção de três cilindros. As coordenadas esféricas e cilíndricas são introduzidas no contexto de cálculo de integrais triplas.

16 Cálculo Vetorial A apresentação de campos vetoriais é feita por meio de figuras dos campos de velocidade do vento na Baía de São Francisco. Exploramos também as semelhanças entre o Teorema Fundamental para integrais de linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente.

17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Como as equações diferenciais de primeira ordem foram tratadas no Capítulo 9, este último capítulo trata das equações diferenciais lineares de segunda ordem, sua aplicação em molas vibrantes e circuitos elétricos, e soluções em séries.

Agradecimentos

A preparação desta edição e das anteriores envolveu muito tempo de leitura e conselhos bem fundamentados (porém, às vezes, contraditórios) de um grande número de revisores astutos.

Sou extremamente grato pelo tempo que levaram para compreender minha motivação pela abordagem empregada. Aprendi algo com cada um deles.

REVISORES DA SÉTIMA EDIÇÃO

Amy Austin, *Texas A&M University*
Anthony J. Bevelacqua, *University of North Dakota*
Zhen-Qing Chen, *University of Washington—Seattle*
Jenna Carpenter, *Louisiana Tech University*
Le Baron O. Ferguson, *University of California—Riverside*
Shari Harris, *John Wood Community College*
Amer Iqbal, *University of Washington—Seattle*
Akhtar Khan, *Rochester Institute of Technology*
Marianne Korten, *Kansas State University*
Joyce Longman, *Villanova University*
Richard Millspaugh, *University of North Dakota*
Lon H. Mitchell, *Virginia Commonwealth University*
Ho Kuen Ng, *San Jose State University*
Norma Ortiz-Robinson, *Virginia Commonwealth University*
Qin Sheng, *Baylor University*
Magdalena Toda, *Texas Tech University*
Ruth Trygstad, *Salt Lake Community College*
Klaus Volpert, *Villanova University*
Peiyong Wang, *Wayne State University*

REVISORES DE TECNOLOGIA

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri–St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado no Denver and Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri–Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama in Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York em Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
Capt. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

REVISORES DA EDIÇÃO ANTERIOR

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie-Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Marilyn Belkin, *Villanova University*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*

Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston–Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University–New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota–Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina at Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York at Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*

Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan–Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University–Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin–Madison*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University–Trumbull*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University–Los Angeles*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin–Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan–Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University–Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

Também gostaria de agradecer a Jordan Bell, George Bergman, Leon Gerber, Mary Pugh e Simon Smith por suas sugestões; a Al Shenk e Dennis Zill por autorizarem o uso de exercícios de seus livros de cálculo; à COMAP por autorizar o uso de material do projeto; a George Bergman, David Bleecker, Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Paul Sally, Lowell Smylie e Larry Wallen pelas ideias para os exercícios; a Dan Drucker pelo projeto da corrida na rampa; a Thomas Banchoff, Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, Philip Straffin e Klaus Volpert pelas ideias para os projetos; a Dan Anderson, Dan Clegg, Jeff Cole, Dan Drucker e Barbara Frank por solucionarem os novos exercícios e sugerirem formas de aprimorá-los; a Marv Riedesel, Mary Johnson e John Manalo pela revisão precisa; e a Jeff Cole e Dan Clegg por sua preparação e revisão cuidadosas do manuscrito de respostas.

Agradeço também àqueles que contribuíram para as edições anteriores: Ed Barbeau, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Bob Burton, David Cusick, Tom DiCiccio, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, Gene Hecht, Harvey Keynes, E.L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Emile LeBlanc, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Carl Riehm, John Ringland, Peter Rosenthal, Doug Shaw, Dan Silver, Norton Starr, Saleem Watson, Alan Weinstein e Gail Wolkowicz.

Também agradeço à Kathi Townes e Stephanie Kuhns, da TECHarts, por seus serviços de produção e à equipe da Brooks/Cole: Cheryll Linthicum, gerente de conteúdo do projeto; Liza Neustaetter, editora assistente; Maureen Ross, editora de mídia; Sam Subity, editor de gerenciamento de mídia; Jennifer Jones, gerente de marketing; e Vernon Boes, diretor de arte. Todos realizaram um trabalho excepcional.

Sou muito privilegiado por ter trabalhado com alguns dos melhores editores matemáticos do mercado durante as três últimas décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle, Richard Stratton e, agora, Liz Covello. Todos eles contribuíram substancialmente para o sucesso deste livro.

Trilha

As ferramentas de aprendizagem utilizadas até alguns anos atrás já não atraem os alunos de hoje, que dominam novas tecnologias, mas dispõem de pouco tempo para o estudo. Na realidade, muitos buscam uma nova abordagem. A Trilha está abrindo caminho para uma nova estratégia de aprendizagem e tudo teve início com alguns professores e alunos. Determinados a nos conectar verdadeiramente com os alunos, conduzimos pesquisas e entrevistas. Conversamos com eles para descobrir como aprendem, quando e onde estudam, e por quê. Conversamos, em seguida, com professores para obter suas opiniões. A resposta a essa solução inovadora de ensino e aprendizagem tem sido excelente.

Trilha é uma solução de ensino e aprendizagem diferente de todas as demais!

Os alunos pediram, nós atendemos!

- Problemas de Desafio (para os capítulos selecionados, com soluções e respostas)
- Problemas Arquivados para todos os capítulos, com soluções e respostas
- Slides de Power Point®
- Revisão de Álgebra (em inglês)
- Revisão de Geometria Analítica (em inglês)
- Suplemento: *Mentiras que minha calculadora e computador me contaram* com exercícios e soluções
- Manual do professor (material em inglês, para professores que adotam a obra)

Plataforma de acesso em português e conteúdo em português e em inglês!

Acesse: http://cursosonline.cengage.com.br

Ao Aluno

A leitura de um livro didático de cálculo difere da leitura de um jornal ou de um romance, ou mesmo de um livro de física. Não desanime se precisar ler o mesmo trecho muitas vezes antes de entendê-lo. E, durante a leitura, você deve sempre ter lápis, papel e calculadora à mão, para fazer contas e desenhar diagramas.

Alguns estudantes preferem partir diretamente para os exercícios passados como dever de casa, consultando o texto somente ao topar com alguma dificuldade. Acredito que ler e compreender toda a seção antes de lidar com os exercícios é muito mais interessante. Você deve prestar especial atenção às definições e compreender o significado exato dos termos. E, antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho. Assim, será muito mais proveitoso quando você observar a resolução.

Parte do objetivo deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Procure escrever os estágios da resolução de forma articulada, passo a passo, com frases explicativas – e não somente uma série de equações e fórmulas desconexas.

As respostas da maioria dos exercícios ímpares são dadas ao final do livro, no Apêndice I. Alguns exercícios pedem explicações, interpretações ou descrições por extenso. Em tais casos, não há uma forma única de escrever a resposta, então não se preocupe se a sua ficou muito diferente. Da mesma forma, também há mais de uma maneira de expressar uma resposta algébrica ou numérica. Assim, se a sua resposta diferir daquela que consta no livro, não suponha imediatamente que a sua está errada. Por exemplo, se você chegou em $\sqrt{2} - 1$ e a resposta impressa é $1/(1 + \sqrt{2})$, você está certo, e a racionalização do denominador mostrará que ambas são equivalentes.

O símbolo ▦ indica que o exercício definitivamente exige o uso de uma calculadora gráfica ou um computador com software adequado (na Seção 1.4 discutimos o uso desses dispositivos e algumas das armadilhas que você pode encontrar). Mas isso não significa que você não pode utilizar esses equipamentos para verificar seus resultados nos demais exercícios. O símbolo SCA aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92).

Outro símbolo com o qual você vai deparar é o ⊘, que o alerta para um erro comum. O símbolo registra as situações em que percebi que uma boa parte dos alunos tende a cometer o mesmo erro.

Tools for Enriching Calculus, que são um material de apoio deste livro, são indicadas por meio do símbolo **TEC** e podem ser acessadas pelo Enhanced WebAssign (em inglês).

As *Homework Hints* para exercícios representativos são indicadas pelo número do exercício em vermelho: **5.** Essas dicas podem ser encontradas no site stewartcalculus.com, bem como no Enhanced WebAssign (em inglês). As dicas para lições de casa fazem perguntas que lhe permitem avançar em direção à resolução sem lhe dar a resposta. Você precisa seguir cada dica de maneira ativa, com lápis e papel na mão, a fim de elaborar os detalhes. Se determinada dica não permitir que solucione o problema, você pode clicar para revelar a próxima dica.

Recomendo que guarde este livro para fins de referência após o término do curso. Como você provavelmente esquecerá alguns detalhes específicos do cálculo, o livro servirá como um lembrete útil quando precisar usá-lo em cursos subsequentes. E, como este livro contém uma maior quantidade de material que pode ser abordada em qualquer curso, ele também pode servir como um recurso valioso para um cientista ou engenheiro em atuação.

O cálculo é uma matéria fascinante e, com justiça, é considerada uma das maiores realizações da inteligência humana. Espero que você descubra não apenas o quanto esta disciplina é útil, mas também o quão intrinsecamente bela ela é.

Teste de Verificação

O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Os testes a seguir têm a intenção de diagnosticar falhas que você possa ter nessas áreas. Depois de fazer cada teste, é possível conferir suas respostas com as respostas dadas e, se necessário, refrescar sua memória consultando o material de revisão fornecido.

A Testes de Verificação: Álgebra

1. Avalie cada expressão sem usar uma calculadora.

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada expressão. Escreva sua resposta sem expoentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Expanda e simplifique.

(a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$

(c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (d) $(2x + 3)^2$

(e) $(x + 2)^3$

4. Fatore cada expressão.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$

(c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (d) $x^4 + 27x$

(e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique as expressões racionais.

(a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

(c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalize a expressão e simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

7. Reescreva, completando o quadrado.

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Resolva a equação. (Encontre apenas as soluções reais.)

(a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$

(b) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$

(c) $x^2 - x - 12 = 0$

(d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

(f) $3|x - 4| = 10$

(g) $2x(4 - x)^{-1/2} - 3\sqrt{4 - x} = 0$

9. Resolva cada desigualdade. Escreva sua resposta usando a notação de intervalos.

(a) $-4 < 5 - 3x \leqslant 17$

(b) $x^2 < 2x + 8$

(c) $x(x - 1)(x + 2) > 0$

(d) $|x - 4| < 3$

(e) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 1$

10. Diga se cada equação é verdadeira ou falsa.

(a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$

(b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(d) $\dfrac{1 + TC}{C} = 1 + T$

(e) $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

(f) $\dfrac{1/x}{a/x - b/x} = \dfrac{1}{a-b}$

Respostas dos Testes de Verificação A: Álgebra

1. (a) 81 (b) -81 (c) $\frac{1}{81}$
(d) 25 (e) $\frac{9}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$

2. (a) $6\sqrt{2}$ (b) $48a^5b^7$ (c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. (a) $11x - 2$ (b) $4x^2 + 7x - 15$
(c) $a - b$ (d) $4x^2 + 12x + 9$
(e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. (a) $(2x - 5)(2x + 5)$ (b) $(2x - 3)(x + 4)$
(c) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$ (d) $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
(e) $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ (f) $xy(x - 2)(x + 2)$

5. (a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x-3}$
(c) $\dfrac{1}{x-2}$ (d) $-(x + y)$

6. (a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$

7. (a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ (b) $2(x - 3)^2 - 7$

8. (a) 6 (b) 1 (c) $-3, 4$
(d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ (f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
(g) $\frac{12}{5}$

9. (a) $[-4, 3)$ (b) $(-2, 4)$
(c) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ (d) $(1, 7)$
(e) $(-1, 4]$

10. (a) Falso (b) Verdadeiro (c) Falso
(d) Falso (e) Falso (f) Verdadeiro

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte a Revisão de Álgebra, "Review of Algebra" no site www.stewartcalculus.com. Material em inglês.

B Testes de Verificação: Geometria Analítica

1. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e
  (a) tem inclinação -3
  (b) é paralela ao eixo x
  (c) é paralela ao eixo y
  (d) é paralela à linha $2x - 4y = 3$

2. Encontre uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.

3. Encontre o centro e o raio do círculo com equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sejam $A(-7,4)$ e $B(5, -12)$ pontos no plano:
  (a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B.
  (b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as interseções com os eixos?
  (c) Encontre o ponto médio do segmento AB.
  (d) Encontre o comprimento do segmento AB.
  (e) Encontre uma equação para a mediatriz de AB.
  (f) Encontre uma equação para o círculo para o qual AB é um diâmetro.

5. Esboce as regiões do plano xy definidas pelas equações ou inequações.
  (a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$
  (b) $|x| < 4$ e $|y| < 2$
  (c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$
  (d) $y \geqslant x^2 - 1$
  (e) $x^2 + y^2 < 4$
  (f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Respostas dos Testes de Verificação B: Geometria Analítica

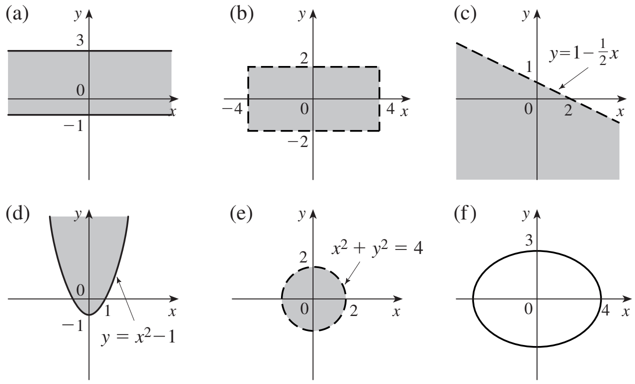
1. (a) $y = -3x + 1$
  (b) $y = -5$
  (c) $x = 2$
  (d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

3. Centro $(3, -5)$, raio 5

4. (a) $-\frac{4}{3}$
  (b) $4x + 3y + 16 = 0$; interseção com o eixo x, -4; interseção com o eixo y, $-\frac{16}{3}$
  (c) $(-1, -4)$
  (d) 20
  (e) $3x - 4y = 13$
  (f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

5.



Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte a Revisão de Geometria Analítica, nos Apêndices B e C.

C Testes de Verificação: Funções

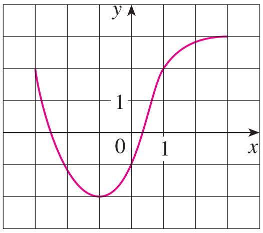


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. O gráfico de uma função f é dado à esquerda.
(a) Diga o valor de $f(-1)$.
(b) Estime o valor de $f(2)$.
(c) Para quais valores de x vale que $f(x) = 2$?
(d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.

2. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente da diferença $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta.

3. Encontre o domínio da função.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f?
(a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x-3) + 2$

5. Sem usar uma calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico.
(a) $y = x^3$ (b) $y = (x+1)^3$ (c) $y = (x-2)^3 + 3$
(d) $y = 4 - x^2$ (e) $y = \sqrt{x}$ (f) $y = 2\sqrt{x}$
(g) $y = -2^x$ (h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$
(a) Calcule $f(-2)$ e $f(1)$. (b) Esboce o gráfico de f.

7. Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, encontre cada uma das seguintes funções.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

Respostas dos Testes de Verificação C: Funções

1. (a) -2 (b) 2,8
(c) -3, 1 (d) $-2{,}5$, 0,3
(e) $[-3, 3]$, $[-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

3. (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

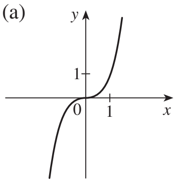
(b) $(-\infty, \infty)$

(c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

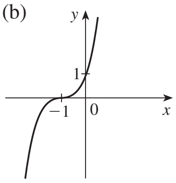
4. (a) Refletindo em torno do eixo x.
(b) Expandindo verticalmente por um fator 2, a seguir transladando 1 unidade para baixo.
(c) Transladando 3 unidades para a direita e 2 unidades para cima.

5.

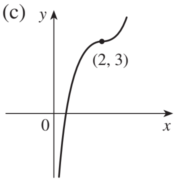
(a)



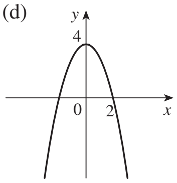
(b)



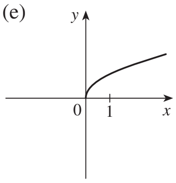
(c)



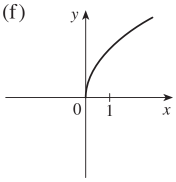
(d)



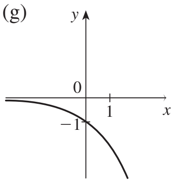
(e)



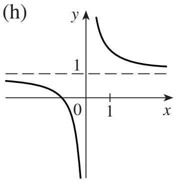
(f)



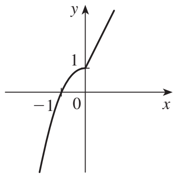
(g)



(h)



6. (a) -3, 3
(b)



7. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
(c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte as seções 1.1 a 1.3 deste livro.

D Testes de Verificação: Trigonometria

1. Converta de graus para radianos.
(a) 300º (b) $-18º$

2. Converta de graus para radianos.

(a) $5\pi/6$ (b) 2

3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm, cujo ângulo central é 30º.

4. Encontre os valores exatos.

(a) $\text{tg}(\pi/3)$ (b) $\text{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

5. Expresse os comprimentos a e b na figura em termos de θ.

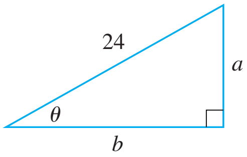


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

6. Se $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, avalie $\text{sen}\,(x + y)$.

7. Demonstre as identidades.

(a) $\text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = \sec\theta$

(b) $\dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1 + \text{tg}^2 x} = \text{sen}\,2x$

8. Encontre todos os valores de x tais que $\text{sen}\,2x = \text{sen}\,x$ e $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \text{sen}\,2x$ sem usar uma calculadora.

Respostas dos Testes de Verificação D: Trigonometria

1. (a) $5\pi/3$ (b) $-\pi/10$

2. (a) 150° (b) $360/\pi \approx 114{,}6°$

3. 2π cm

4. (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2

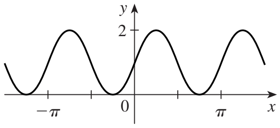
5. (a) $24\,\text{sen}\,\theta$ (b) $24\cos\theta$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

7. No caso de uma demonstração, todo o raciocínio é a resposta; o nível está correto com o de pré-cálculo.

8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

9.



Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte
o Apêndice D deste livro.

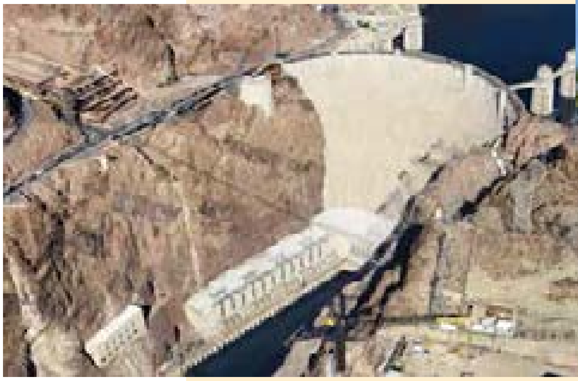
Uma Apresentação do Cálculo

Ziga Camernik/Shutterstock

Pichugin Dmitry/Shutterstock

Brett Mulcahy/Shutterstock

Quando terminar este curso, você será capaz de estimar o número de trabalhadores necessários para construir uma pirâmide, explicar a formação e localização de arcos-íris, projetar uma montanha-russa para que ela trafegue suavemente e calcular a força sobre um dique.



iofoto/Shutterstock

O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. Ele é menos estático e mais dinâmico. Trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, pode ser útil ter uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais aprofundado. Vamos dar aqui uma olhada em algumas das principais ideias do cálculo, mostrando como surgem os limites quando tentamos resolver diversos problemas.

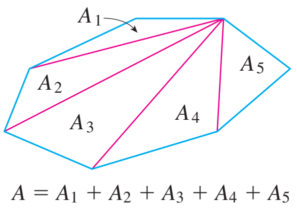


FIGURA 1

O Problema da Área

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quando foram encontradas áreas usando o chamado “método da exaustão”. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 e, em seguida, somando as áreas obtidas.

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e, então, aumentar o número de lados deles. A Figura 2 ilustra esse procedimento no caso especial de um círculo, com polígonos regulares inscritos.

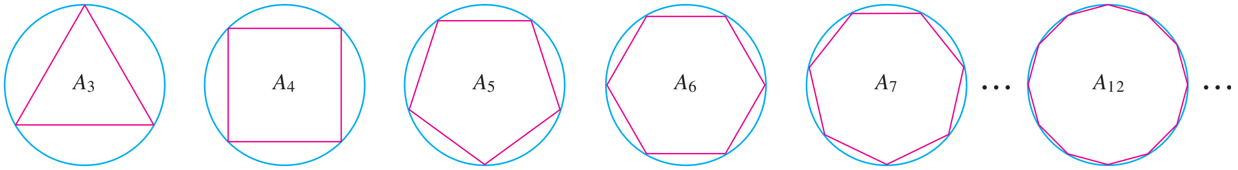


FIGURA 2

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos, então, que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos e escrevemos

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

TEC Na Pré-Visualização, você pode ver como áreas de polígonos inscritos e circunscritos aproximam-se da área de um círculo.

Os gregos, porém, não usaram explicitamente limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usa o método da exaustão para demonstrar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Usaremos uma ideia semelhante no Capítulo 5 para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos (como na Figura 4), fazer decrescer a largura dos retângulos e, então, calcular A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

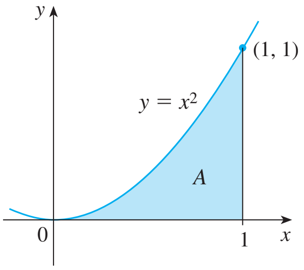


FIGURA 3

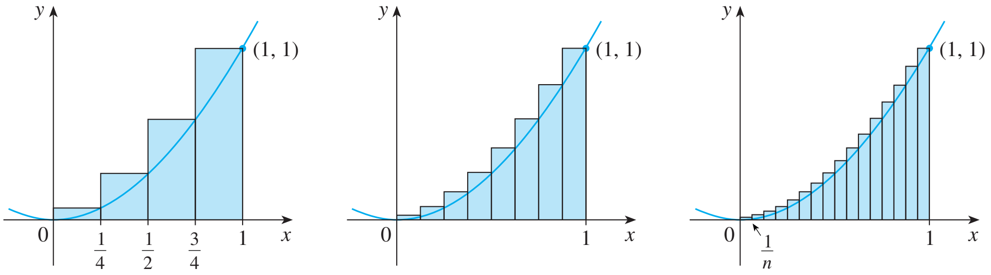


FIGURA 4

O problema da área é central no ramo do cálculo chamado *cálculo integral*. As técnicas que desenvolveremos no Capítulo 5 para encontrar áreas também possibilitarão o cálculo do volume de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra e o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque.

O Problema da Tangente

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$, em um dado ponto P. (Daremos uma definição precisa de reta tangente no Capítulo 2. Por ora, você pode pensá-la como a reta que toca a curva em P, como na Figura 5.) Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que, para calcular a inclinação, é necessário conhecer dois pontos e, sobre t, temos somente o ponto P. Para contornar esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. Da Figura 6, vemos que

$$\boxed{1} \qquad m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Uma vez que x tende a a quando Q tende a P, também podemos usar a Equação 1 para escrever

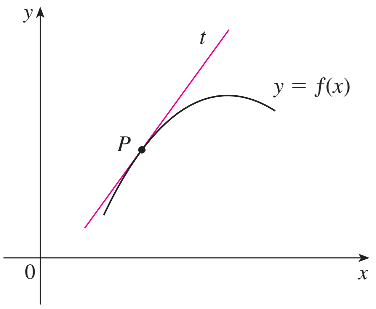


FIGURA 5
A reta tangente em P

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

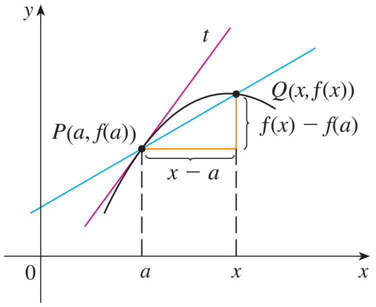


FIGURA 6
A reta secante PQ

Exemplos específicos desse procedimento serão dados no Capítulo 2.

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que só foi inventado mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais ideias por trás do cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Os dois ramos do cálculo e seus problemas principais, o da área e o da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, têm uma estreita conexão. Os problemas da área e da tangente são problemas inversos, em um sentido que será explicado no Capítulo 5.

Velocidade

Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 km/h, o que essa informação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora o carro terá percorrido 48 km. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a velocidade ser, em um dado momento, 48 km/h?

Para analisar essa questão, vamos examinar o movimento de um carro percorrendo uma estrada reta e supodo que possamos medir a distância percorrida por ele (em metros) em intervalos de 1 segundo, como na tabela a seguir:

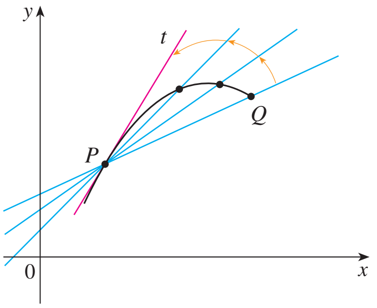


FIGURA 7
Retas secantes aproximando-se da reta tangente

t = Tempo decorrido (s)	0	2	4	6	8	10
d = Distância (m)	0	2	10	25	43	78

Como primeiro passo para encontrar a velocidade após 4 segundos de movimento, calcularemos qual a velocidade média no intervalo de tempo $4 \leqslant t \leqslant 8$:

$$\begin{aligned} \text{velocidade média} &= \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} \\ &= \frac{43 - 10}{8 - 4} \\ &= 8{,}25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Analogamente, a velocidade média no intervalo $4 \leqslant t \leqslant 6$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{25 - 10}{6 - 4} = 7{,}5 \text{ m/s}$$

Nossa intuição é de que a velocidade no instante $t = 4$ não pode ser muito diferente da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 4$. Assim, imaginaremos que a distância percorrida foi medida em intervalos de 0,2 segundo, como na tabela a seguir:

t	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80

Então, podemos calcular, por exemplo, a velocidade média no intervalo de tempo [4, 5]:

$$\text{velocidade média} = \frac{16{,}80 - 10{,}00}{5 - 4} = 6{,}8 \text{ m/s}$$

Os resultados desses cálculos estão mostrados na tabela:

Intervalo de tempo	[4, 6]	[4, 5]	[4, 4,8]	[4, 4,6]	[4, 4,4]	[4, 4,2]
Velocidade média (m/s)	7,5	6,8	6,2	5,75	5,4	5,1

As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 5; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 4$ a velocidade seja cerca de 5 m/s. No Capítulo 2 definiremos a velocidade instantânea de um objeto em movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores.

Na Figura 8, mostramos uma representação gráfica do movimento de um carro traçando a distância percorrida como uma função do tempo. Se escrevermos $d = f(t)$, então $f(t)$ é o número de metros percorridos após t segundos. A velocidade média no intervalo de tempo $[4, t]$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

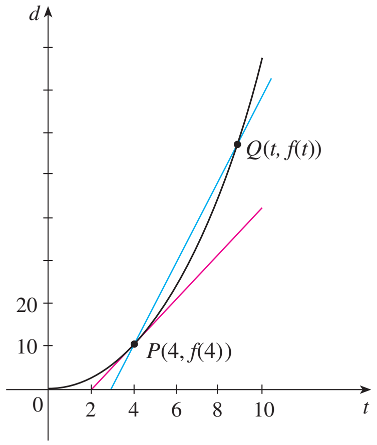


FIGURA 8

que é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v quando $t = 4$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 4; isto é,

$$v = \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

e, da Equação 2, vemos que isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em P.

Dessa forma, ao resolver o problema da tangente em cálculo diferencial, também estamos resolvendo problemas relativos à velocidade. A mesma técnica se aplica a problemas relativos à taxa de variação nas ciências naturais e sociais.

O Limite de uma Sequência

No século V a.C., o filósofo grego Zenão propôs quatro problemas, hoje conhecidos como *Paradoxos de Zenão*, com o intento de desafiar algumas das ideias correntes em sua época sobre espaço e tempo. O segundo paradoxo de Zenão diz respeito a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenão argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga: se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$, a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2. No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3. Esse processo continuaria indefinidamente e, dessa forma, aparentemente a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.

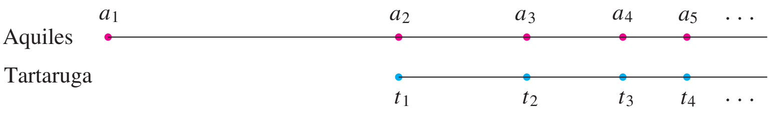


FIGURA 9

Uma forma de explicar esse paradoxo usa a ideia de *sequência*. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, conhecidas como sequências.

Em geral, uma sequência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem definida. Por exemplo, a sequência

$$\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\}$$

pode ser descrita pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Podemos visualizar essa sequência marcando seus termos sobre uma reta real, como na Figura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da sequência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Dizemos, então, que o limite da sequência é 0 e indicamos isso por

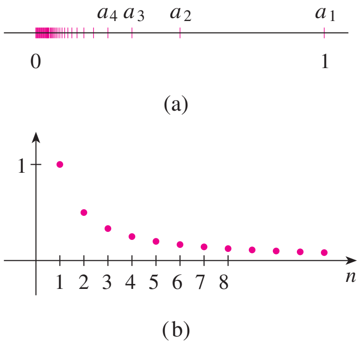


FIGURA 10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo um n suficientemente grande.

O conceito de limite de uma sequência ocorre sempre que usamos a representação decimal de um número real. Por exemplo, se

$$\begin{aligned} a_1 &= 3{,}1 \\ a_2 &= 3{,}14 \\ a_3 &= 3{,}141 \\ a_4 &= 3{,}1415 \\ a_5 &= 3{,}14159 \\ a_6 &= 3{,}141592 \\ a_7 &= 3{,}1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

então,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \pi.$$

Os termos nessa sequência são aproximações racionais de π.

Vamos voltar ao paradoxo de Zenão. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga formam as sequências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, onde $a_n < t_n$ para todo n. Podemos mostrar que ambas as sequências têm o mesmo limite:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p = \lim_{n \to \infty} t_n.$$

É precisamente nesse ponto p que Aquiles ultrapassa a tartaruga.

A Soma de uma Série

Outro paradoxo de Zenão, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: “Uma pessoa em certo ponto de uma sala não pode caminhar diretamente até a parede. Para fazer isso ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante e, então, novamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim". (Veja a Figura 11.)

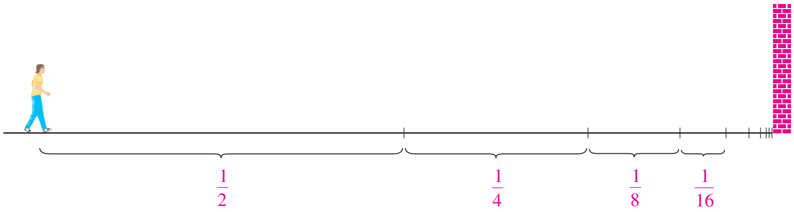


FIGURA 11

Como naturalmente sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

$$\boxed{3} \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenão argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém, há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0{,}\overline{3} = 0{,}3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \cdots$$

dessa forma, em algum sentido, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais geralmente, se d_n denotar o n-ésimo algarismo na representação decimal de um número, então,

$$0,\, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Retornando à série da Equação 3, denotamos por s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0{,}75 \\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0{,}875 \\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0{,}9375 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0{,}96875 \\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0{,}984375 \\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0{,}9921875 \\
&\vdots \\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0{,}99902344 \\
&\vdots \\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0{,}99998474.
\end{aligned}$$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode-se mostrar que tomando um *n* suficientemente grande (isto é, adicionando um número suficientemente grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece, então, razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

No Capítulo 11, Volume II, discutiremos mais sobre essas noções. Usaremos, então, a ideia de Newton de combinar séries infinitas com cálculo diferencial e integral.

Resumo

Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o cálculo à parte de outras áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como o ramo da matemática que trata de limites.

Depois de inventar sua versão de cálculo, Sir Isaac Newton usou-a para explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje, o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de quão rápido os preços do petróleo sobem ou caem, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo que sai do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas. Neste livro vamos explorar algumas dessas aplicações do cálculo.

Para transmitir uma noção da potência dessa matéria, finalizaremos esta apresentação com uma lista de perguntas que você poderá responder usando o cálculo:

1. Como você explicaria o fato, ilustrado na Figura 12, de que o ângulo de elevação de um observador até o ponto mais alto em um arco-íris é 42º?
2. Como você poderia explicar as formas das latas nas prateleiras de um supermercado?
3. Qual o melhor lugar para se sentar em um cinema?
4. Como podemos projetar uma montanha-russacom um percurso suave?
5. A qual distância de um aeroporto um piloto deve começar a descida para o pouso?
6. Como podemos juntar curvas para desenhar formas que representam letras em uma impressora a *laser*?
7. Como podemos estimar o número de trabalhadores que foram necessários para a construção da Grande Pirâmide de Quéops, no antigo Egito?
8. Onde um jogador deveria se posicionar para apanhar uma bola de beisebol lançada por outro jogador e mandá-la para a *home plate*?
9. Uma bola lançada para cima leva mais tempo para atingir sua altura máxima ou para cair de volta à sua altura original?
10. Como você pode explicar o fato de planetas e satélites se moverem em órbitas elípticas?
11. Como você pode distribuir o escoamento de água entre as turbinas de uma usina hidrelétrica de modo a maximizar a energia total produzida?
12. Se uma bola de gude, uma bola de *squash*, uma barra de aço e um cano de ferro rolarem por uma encosta, qual deles atingirá o fundo primeiro?

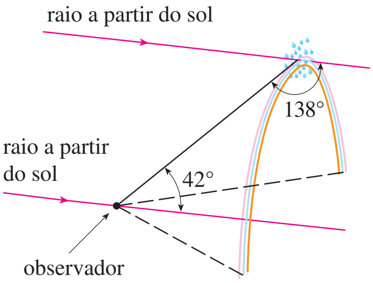
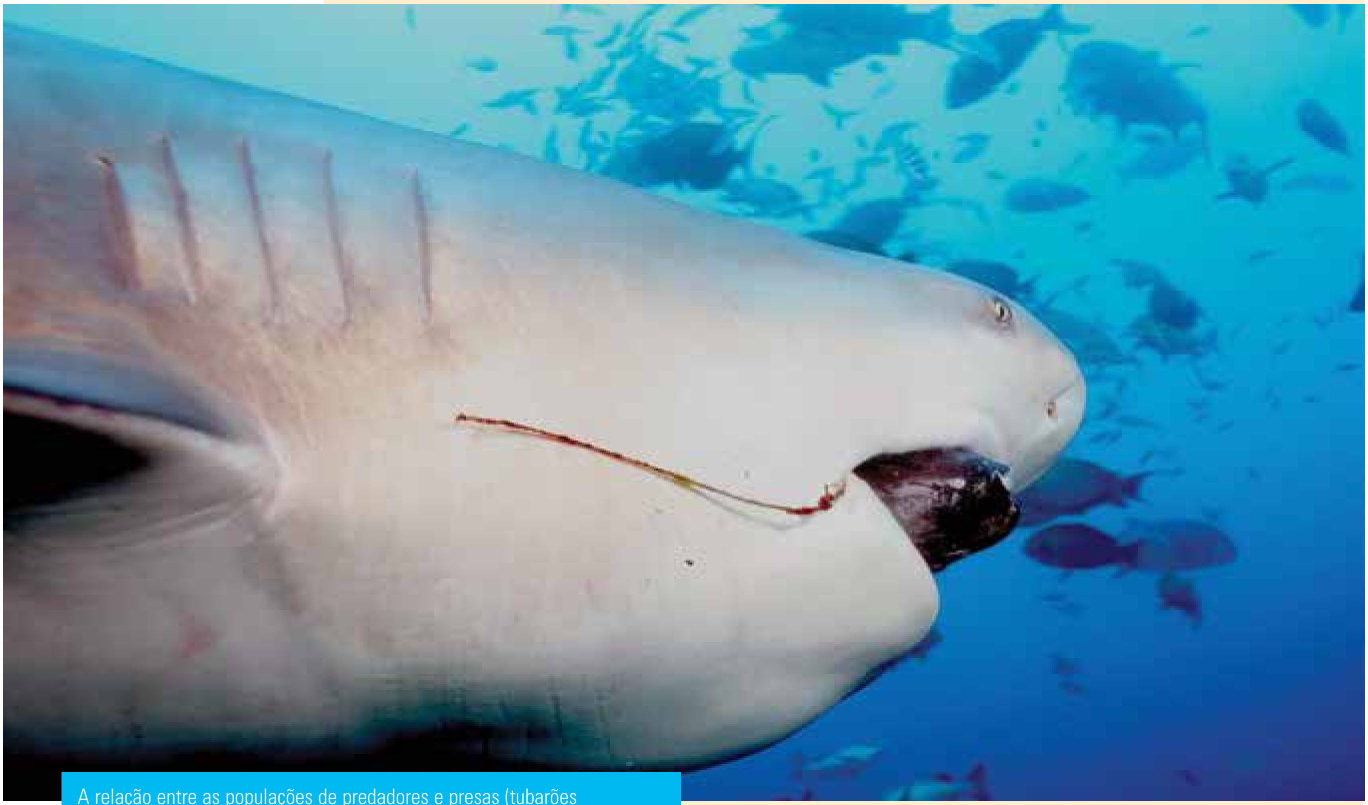


FIGURA 12

9

Equações Diferenciais



A relação entre as populações de predadores e presas (tubarões e peixes, joaninhas e pulgões, lobos e coelhos) é explorada pelo uso de pares de equações diferenciais na última seção deste capítulo.

Ciurzynski/Shutterstock

Talvez a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando cientistas físicos ou cientistas sociais usam cálculo, muitas vezes o fazem para analisar uma equação diferencial que tenha surgido no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estejam estudando. Embora seja quase impossível encontrar uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial, veremos que as abordagens gráficas e numéricas fornecem a informação necessária.

9.1 Modelagem com Equações Diferenciais

Agora é uma boa hora para ler (ou reler) a discussão de modelagem matemática no Capítulo 1, Volume I.

Na descrição do processo de modelagem na Seção 1.2, no Volume I, falamos a respeito da formulação de um modelo matemático de um problema real por meio de raciocínio intuitivo sobre o fenômeno ou por meio de uma lei física fundamentada em evidência experimental. O modelo matemático frequentemente tem a forma de uma *equação diferencial*, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Isso não surpreende, porque em um problema real normalmente notamos que mudanças ocorrem e queremos predizer o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam. Vamos começar examinando vários exemplos de como as equações diferenciais aparecem quando modelamos um fenômeno físico.

Modelos para o Crescimento Populacional

Um dos modelos para o crescimento de uma população baseia-se na hipótese de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Essa hipótese é razoável para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade a doenças).

Vamos identificar e dar nomes às variáveis nesse modelo:

t = tempo (a variável independente)

P = número de indivíduos da população (a variável dependente)

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt. Assim, nossa hipótese de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população é escrita como a equação

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A Equação 1 é nosso primeiro modelo para o crescimento populacional; é uma equação diferencial porque contém uma função desconhecida P e sua derivada dP/dt.

Tendo formulado um modelo, vamos olhar para suas consequências. Se desconsiderarmos uma população nula, então $P(t) > 0$ para todo t. Portanto, se $k > 0$, então a Equação 1 mostra que $P'(t) > 0$ para todo t. Isso significa que a população está sempre aumentando. De fato, quando $P(t)$ aumenta, a Equação 1 mostra que dP/dt torna-se maior. Em outras palavras, a taxa de crescimento aumenta quando a população cresce.

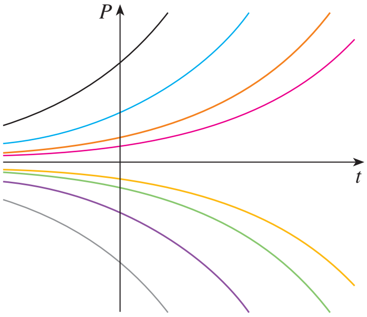


FIGURA 1
A família de soluções de $dP/dt = kP$

Não é difícil pensar em uma solução para a Equação 1. Esta equação nos pede para encontrar uma função cuja derivada seja uma constante multiplicada por ela própria. Sabemos do Capítulo 3, no Volume 1, que as funções exponenciais têm esta propriedade. De fato, se fizermos $P(t) = Ce^{kt}$, então

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Portanto, qualquer função exponencial da forma $P(t) = Ce^{kt}$ é uma solução da Equação 1. Quando estudarmos essa equação em detalhes na Seção 9.4, veremos que não existe outra solução.

Se fizermos C variar em todos os números reais, obtemos a *família* de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ cujos gráficos são mostrados na Figura 1. Mas as populações têm apenas valores positivos e, assim, estamos interessados somente nas soluções com $C > 0$. E estamos provavelmente preocupados apenas com valores de t maiores que o instante inicial $t = 0$. A Figura 2 mostra as soluções com significado físico. Fazendo $t = 0$, temos $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que a constante C acaba sendo a população inicial, $P(0)$.

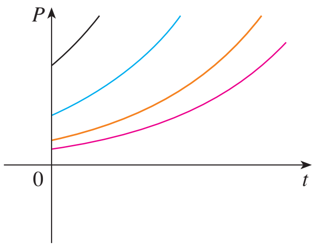


FIGURA 2
A família de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ com $C > 0$ e $t \geqslant 0$

A Equação 1 é apropriada para a modelagem do crescimento populacional sob condições ideais, mas devemos reconhecer que um modelo mais realista deveria refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. Muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população se estabiliza quando ela se aproxima de sua *capacidade de suporte* M (ou diminui em direção a M se ela excede o valor de M). Para um modelo considerar ambos os casos, fazemos duas hipóteses:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ se P for pequeno (inicialmente a taxa de crescimento é proporcional a P).
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ se $P > M$ (P diminui se exceder M).

Uma expressão simples que incorpora ambas as hipóteses é dada pela equação

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Observe que, se P é pequeno quando comparado com M, então P/M está próximo de 0 e, portanto, $dP/dt \approx kP$. Se $P > M$, então $1 - P/M$ é negativo e, assim, $dP/dt < 0$.

A Equação 2 é chamada *equação diferencial logística* e foi proposta pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840 como um modelo para o crescimento populacional mundial. Desenvolveremos técnicas que nos permitam encontrar soluções explícitas da equação logística na Seção 9.4, mas, enquanto isso, podemos deduzir as características qualitativas das soluções diretamente da Equação 2. Primeiro, observamos que as funções constantes $P(t) = 0$ e $P(t) = M$ são soluções, porque, em qualquer um dos casos, um dos fatores do lado direito da Equação 2 é zero. (Isso certamente tem um significado físico: se a população sempre for 0 ou estiver na capacidade de suporte, ela fica desse jeito.) Essas duas soluções constantes são chamadas *soluções de equilíbrio*.

Se a população inicial $P(0)$ estiver entre 0 e M, então o lado direito da Equação 2 é positivo; assim, $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte ($P > M$), então $1 - P/M$ é negativo, portanto $dP/dt < 0$ e a população diminui. Observe que, em qualquer um dos casos, se a população se aproxima da capacidade de suporte ($P \to M$), então $dP/dt \to 0$, o que significa que a população se estabiliza. Dessa forma, esperamos que as soluções da equação diferencial logística tenham gráficos que se pareçam com aqueles da Figura 3. Observe que os gráficos se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = M$.

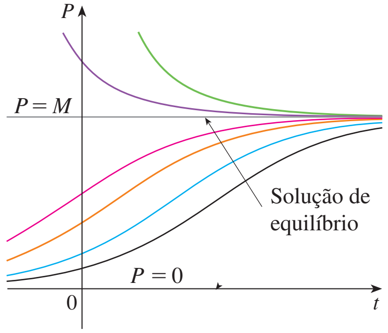


FIGURA 3
Soluções da equação logística

Modelo para o Movimento de uma Mola

Vamos olhar agora para um modelo físico. Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola vertical (como na Figura 4). Na Seção 6.4, no Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

$$\text{força elástica} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada *constante da mola*). Se ignorarmos qualquer força externa de resistência (por causa da resistência do ar ou do atrito), então, pela segunda Lei de Newton (força é igual à massa vezes a aceleração), temos

$$\boxed{3} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

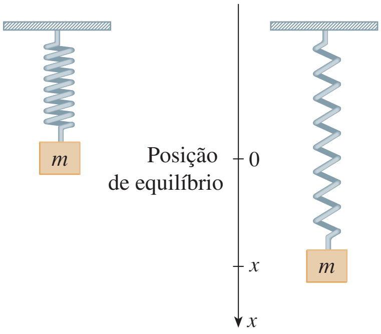


FIGURA 4

Esse é um exemplo do que chamamos *equação diferencial de segunda ordem*, porque envolve derivadas segundas. Vamos ver o que podemos deduzir da solução diretamente da equação. Podemos reescrever a Equação 3 na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que diz que a derivada segunda de x é proporcional a x, mas tem o sinal oposto. Conhecemos duas funções com essa propriedade, as funções seno e cosseno. De fato, todas as soluções da Equação 3 podem ser escritas como combinações de certas funções seno e cosseno (veja o Exercício 4). Isso não é surpreendente; esperamos que a mola oscile em torno de sua posição de equilíbrio e, assim, é natural pensar que funções trigonométricas estejam envolvidas.

Equações Diferenciais Gerais

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. Dessa maneira, as Equações 1 e 2 são de primeira ordem e a Equação 3 é de segunda ordem. Em todas as três equações, a variável independente é chamada t e representa o tempo, mas, em geral, a variável independente não precisa representar o tempo. Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$\boxed{4} \qquad y' = xy$$

entendemos que y seja uma função desconhecida de x.

Uma função f é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo.

Quando nos pedem para *resolver* uma equação diferencial, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma

$$y' = f(x)$$

Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante qualquer.

Mas, em geral, resolver uma equação diferencial não é uma tarefa fácil. Não existe uma técnica sistemática que nos permita resolver todas as equações diferenciais. Na Seção 9.2, contudo, veremos como esboçar os gráficos das soluções mesmo quando não temos uma fórmula explícita. Também aprenderemos como achar aproximações numéricas para as soluções.

EXEMPLO 1 Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUÇÃO Usamos a Regra do Quociente para derivar a expressão em relação a y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é solução da equação diferencial. ■

A Figura 5 ilustra os gráficos de sete membros da família do Exemplo 1. A equação diferencial mostra que $y \approx \pm 1$, então $y' \approx 0$. Isso é visualizado pelo achatamento dos gráficos próximo de $y = 1$ e $y = -1$.

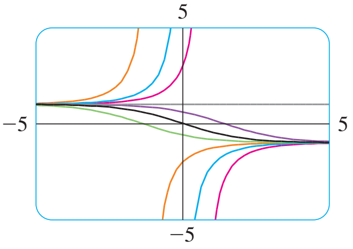


FIGURA 5

Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a *solução geral*) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.

Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0). Fisicamente, isso corresponde a medir o estado de um sistema no instante t_0 e usar a solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

EXEMPLO 2 Encontre uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do Exemplo 1, obtemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c, temos $2 - 2c = 1 + c$, o que fornece $c = \frac{1}{3}$. Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$ ■

9.1 Exercícios

1. Mostre que $y = x - x^{-1}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$.

2. Verifique se $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ é uma solução do problema de valor inicial

$$y' + (\operatorname{tg} x)\, y = \cos^2 x \qquad y(0) = -1$$

no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

3. (a) Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação diferencial $2y'' + y' - y = 0$?

(b) Se r_1 e r_2 são os valores que você encontrou no item (a), mostre que todo membro da família de funções $y = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$ também é uma solução.

4. (a) Para quais valores de k a função $y = \cos kt$ satisfaz a equação diferencial $4y'' = -25y$?

(b) Para estes valores de k, verifique se todo membro da família de funções $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ também é uma solução.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + y = \text{sen}\, x$?

(a) $y = \text{sen}\, x$ (b) $y = \cos x$

(c) $y = \frac{1}{2} x \,\text{sen}\, x$ (d) $y = -\frac{1}{2} x \cos x$

6. (a) Mostre que cada membro da família de funções $y = (\ln x + C)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando vários membros da família de soluções na mesma tela.

(c) Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial $y(1) = 2$.

(d) Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial $y(2) = 1$.

7. (a) O que você pode dizer da solução da equação $y' = -y^2$ apenas olhando a equação diferencial?

(b) Verifique se todos os membros da família $y = 1/(x + C)$ são soluções da equação no item (a).

(c) Você pode pensar em uma solução da equação diferencial $y' = -y^2$ que não seja membro da família no item (b)?

(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0{,}5$$

8. (a) O que você pode dizer sobre o gráfico de uma solução da equação $y' = xy^3$ quando x está próximo de 0? E se x for grande?

(b) Verifique se todos os membros da família $y = (c - x^2)^{-1/2}$ são soluções da equação diferencial $y' = xy^3$.

(c) Trace vários membros da família de soluções na mesma tela. Os gráficos confirmam o que você predisse no item (a)?

(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}2P\left(1 - \frac{P}{4\,200}\right)$$

(a) Para quais valores de P a população está aumentando?

(b) Para quais valores de P a população está diminuindo?

(c) Quais são as soluções de equilíbrio?

10. A função $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

(a) Quais são as soluções constantes da equação?

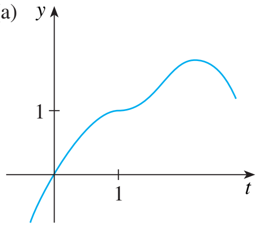
(b) Para quais valores de y a função está aumentando?

(c) Para quais valores de y a função está diminuindo?

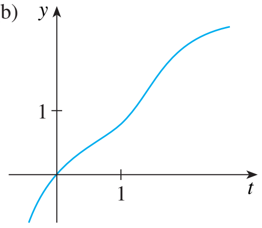
11. Explique por que as funções cujos gráficos são dados a seguir *não podem* ser soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$

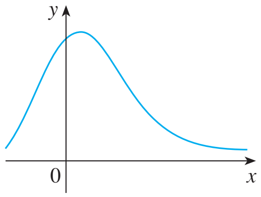
(a)



(b)



12. A função, cujo gráfico é dado a seguir, é uma solução de uma das seguintes equações diferenciais. Decida qual é a equação correta e justifique sua resposta.



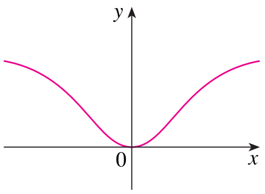
A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

13. Combine as equações diferenciais com os gráficos de solução rotulados de I–IV. Dê razões para suas escolhas.

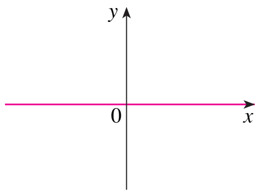
(a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ (b) $y' = xe^{-x^2-y^2}$

(c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2-y^2}}$ (d) $y' = \text{sen}(xy) \cos(xy)$

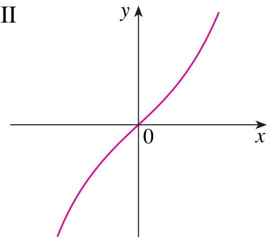
I



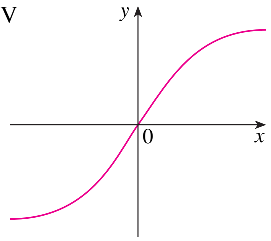
II



III



IV



14. Suponha que você tenha acabado de servir uma xícara de café recém-coado com uma temperatura de 95 °C em uma sala onde a temperatura é de 20 °C.

(a) Quando você acha que o café esfria mais rapidamente? O que acontece com a taxa de resfriamento com o passar do tempo? Explique.

(b) A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Resfriamento de Newton nessa situação particular. Qual a condição inicial? Tendo em vista sua resposta no item (a), você acha que essa equação diferencial é um modelo apropriado para o resfriamento?

(c) Faça um esboço para o gráfico da solução do problema de valor inicial no item (b).

15. Os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as **curvas de aprendizado**. Seja $P(t)$ o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. A derivada dP/dt representa a taxa em que o desempenho melhora.

(a) Quando você acha que P aumenta mais rapidamente? O que acontece a dP/dt quando t aumenta? Explique.

(b) Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, explique a razão pela qual a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ uma constante positiva,}$$

é um modelo razoável para o aprendizado.

(c) Faça um esboço de uma possível solução da equação diferencial.

9.2 Campos de Direções e Método de Euler

Infelizmente é impossível resolver a maioria das equações diferenciais de forma a obter uma fórmula explícita para a solução. Nesta seção, mostraremos que, mesmo sem uma solução explícita, podemos ainda aprender muito sobre a solução por meio de uma abordagem gráfica (campos de direções) ou de uma abordagem numérica (método de Euler).

Campos de Direções

Suponha que nos peçam para esboçar o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

Não conhecemos uma fórmula para a solução, então como é possível que esbocemos seus gráficos? Vamos pensar sobre o que uma equação diferencial significa. A equação $y' = x + y$ nos diz que a inclinação em qualquer ponto (x, y) no gráfico (chamado *curva solução*) é igual à soma das coordenadas x e y no ponto (veja a Figura 1). Em particular, como a curva passa pelo ponto (0, 1), sua inclinação ali deve ser $0 + 1 = 1$. Assim, uma pequena porção da curva solução próxima ao ponto (0, 1) parece um segmento de reta curto que passa por (0, 1) com inclinação 1 (veja a Figura 2).

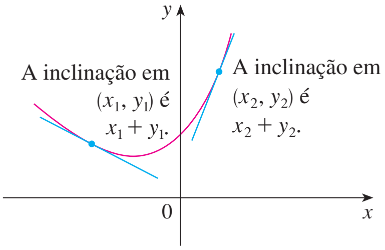


FIGURA 1
Uma solução de $y' = x + y$

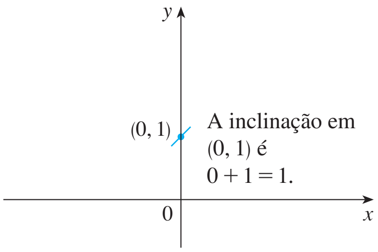


FIGURA 2
Início da curva solução que passa por (0, 1)

Como um guia para esboçar o restante da curva, vamos desenhar pequenos segmentos de reta em diversos pontos (x, y) com inclinação $x + y$. O resultado, denominado *campo de direções*, é mostrado na Figura 3. Por exemplo, o segmento de reta no ponto (1, 2) tem inclinação $1 + 2 = 3$. O campo de direções nos permite visualizar o formato geral das curvas solução pela indicação da direção na qual as curvas prosseguem em cada ponto.

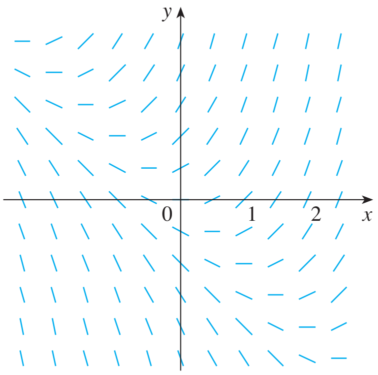


FIGURA 3
Campo de direções para $y' = x + y$

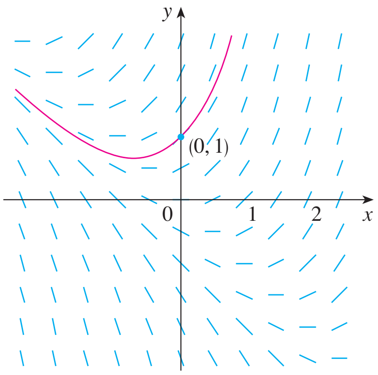


FIGURA 4
A curva solução que passa por (0, 1)

Agora, podemos esboçar a curva solução pelo ponto (0, 1), seguindo o campo de direções como na Figura 4. Observe que desenhamos a curva de modo a torná-la paralela aos segmentos de reta próximos.

Em geral, suponha que tenhamos uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$y' = F(x, y)$$

onde $F(x, y)$ é alguma expressão em x e y. A equação diferencial diz que a inclinação da curva solução no ponto (x, y) na curva é $F(x, y)$. Se desenharmos pequenos segmentos de reta com inclinação $F(x, y)$ em vários pontos (x, y), o resultado será chamado **campo de direções** (ou **campo de inclinações**). Esses segmentos de reta indicam a direção na qual uma curva solução está seguindo, de modo que o campo de direções nos ajuda a visualizar o formato geral dessas curvas.

EXEMPLO 1

(a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use a parte (a) para esboçar a curva solução que passa pela origem.

SOLUÇÃO

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	. . .
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	. . .

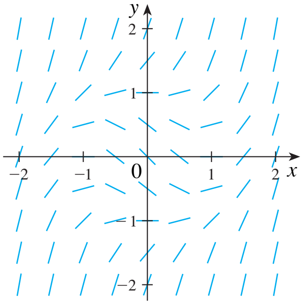


FIGURA 5

Agora, podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

(b) Podemos começar na origem e nos mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação -1). Continuamos a desenhar a curva solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos. A curva solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva solução para a esquerda da mesma maneira.

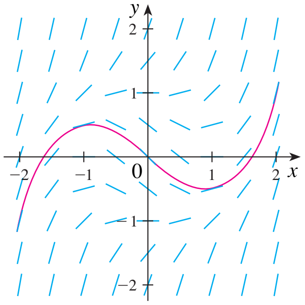


FIGURA 6

TEC O *Module 9.2A* mostra os campos de direções e as curvas solução para várias equações diferenciais.

Quanto mais segmentos desenharmos no campo de direções, mais clara se tornará a figura. É claro que é tedioso calcular as inclinações e desenhar segmentos de reta para um número muito grande de pontos manualmente, mas os computadores facilitam essa tarefa. A Figura 7 apresenta um campo de direções mais detalhado, desenhado por um computador, para a equação diferencial no Exemplo 1. Isso nos permite desenhar, com uma precisão razoável, as curvas solução exibidas na Figura 8 com intersecções com o eixo y iguais a -2, -1, 0, 1 e 2.

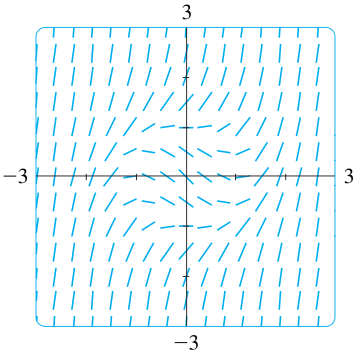


FIGURA 7

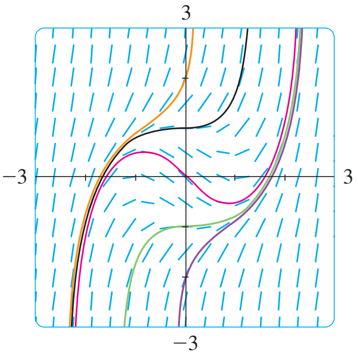


FIGURA 8

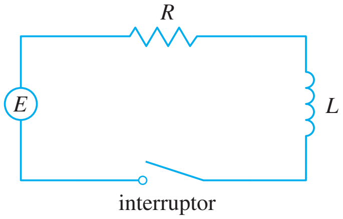


FIGURA 9

Depois disso, vamos ver como campos de direções dão uma percepção das situações físicas. O circuito elétrico simples, mostrado na Figura 9, contém uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms [Ω] e um indutor com indutância de L henrys (H).

A Lei de Ohm diz que a queda na voltagem por causa do resistor é RI. A queda de voltagem por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$\boxed{1} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem que modela a corrente I no instante t.

EXEMPLO 2 Suponha que no circuito simples da Figura 9 a resistência seja de 12 Ω, a indutância 4 H e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.
(a) Desenhe um campo de direções para a Equação 1 com esses valores.
(b) O que você pode dizer sobre o valor-limite da corrente?
(c) Identifique quaisquer soluções de equilíbrio.
(d) Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, de forma que a corrente comece com $I(0) = 0$, use o campo de direções para esboçar a curva solução.

SOLUÇÃO
(a) Se fizermos $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$ na Equação 1, obteremos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

O campo de direções para essa equação diferencial é mostrado na Figura 10.

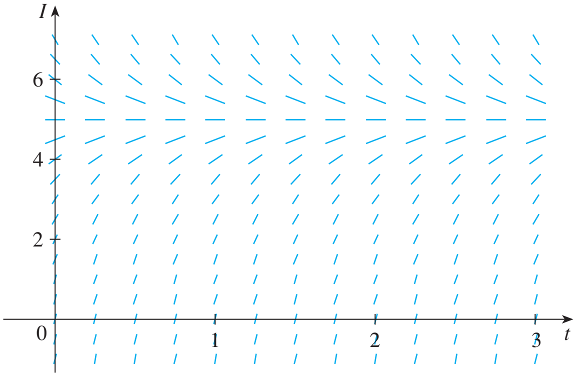


FIGURA 10

(b) Parece, a partir do campo de direções, que todas as soluções se aproximam do valor 5 A, isto é,

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 5$$

(c) Parece que a função constante $I(t) = 5$ é uma solução de equilíbrio. De fato, podemos verificar isso diretamente da equação diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Se $I(t) = 5$, então o lado esquerdo é $dI/dt = 0$ e o lado direito é $15 - 3(5) = 0$.
(d) Usamos o campo de direções para esboçar a curva solução que passa por (0, 0), como indicado na Figura 11.

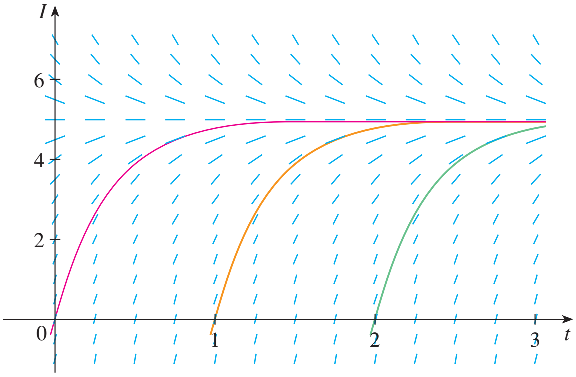


FIGURA 11

Observe que na Figura 10 os segmentos de reta ao longo de qualquer reta horizontal são paralelos. Isso ocorre porque a variável independente t não aparece do lado direito da equação $I' = 15 - 3I$. Em geral, uma equação diferencial do tipo

$$y' = f(y)$$

onde a variável independente não aparece do lado direito é chamada **autônoma**. Para tal equação, as inclinações correspondentes a dois pontos diferentes com a mesma coordenada y devem ser iguais. Isso significa que, se conhecermos uma solução para uma equação diferencial autônoma, então poderemos obter infinitas outras apenas pelo deslocamento do gráfico da solução conhecida para a esquerda ou para a direita. Na Figura 11, mostramos as soluções que resultam do deslocamento da curva solução do Exemplo 2 uma ou duas unidades de tempo (ou seja, segundos) para a direita. Elas correspondem ao fechamento do interruptor quando $t = 1$ ou $t = 2$.

Método de Euler

A ideia básica por trás dos campos de direções pode ser usada para encontrar aproximações numéricas para as soluções das equações diferenciais. Ilustramos o método no problema de valor inicial que utilizamos para introduzir os campos de direções:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

A equação diferencial diz que $y'(0) = 0 + 1 = 1$; dessa forma, a curva solução tem inclinação 1 no ponto (0, 1). Como uma primeira aproximação para a solução, poderíamos usar uma aproximação linear $L(x) = x + 1$. Em outras palavras, poderíamos usar a reta tangente em (0, 1) como uma aproximação grosseira para a curva solução (veja a Figura 12).

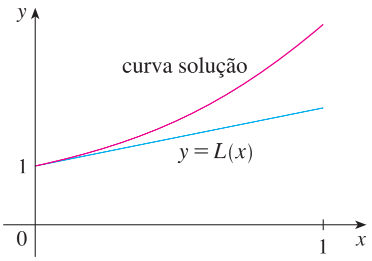


FIGURA 12
Primeira aproximação de Euler

A ideia de Euler era melhorar essa aproximação percorrendo apenas uma pequena distância ao longo da reta tangente e, então, fazer uma correção no meio do caminho, mudando a direção, como indicado pelo campo de direções. A Figura 13 mostra o que acontece se começamos ao longo da reta tangente, mas paramos quando $x = 0{,}5$. (Essa distância horizontal percorrida é chamada de passo.) Como $L(0{,}5) = 1{,}5$, temos $y(0{,}5) \approx 1{,}5$ e tomamos (0,5, 1,5) como o ponto de partida para um novo segmento de reta. A equação diferencial nos diz que $y'(0{,}5) = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$, assim, usamos a função linear

$$y = 1{,}5 + 2(x - 0{,}5) = 2x + 0{,}5$$

como uma aproximação para a solução para $x > 0{,}5$ (veja o segmento azul-escuro na Figura 13). Se diminuirmos o passo de 0,5 para 0,25, obteremos uma aproximação de Euler melhor (veja a Figura 14).

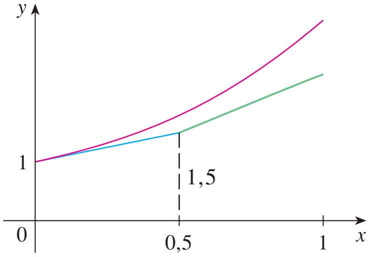


FIGURA 13
Aproximação de Euler com o passo 0,5

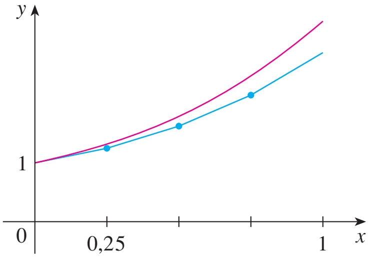


FIGURA 14
Aproximação de Euler com o passo 0,25

Euler

Leonhard Euler (1707–1783) foi o principal matemático de meados do século XVIII e o mais prolífico de todos os tempos. Ele nasceu na Suíça, mas passou a maior parte de sua carreira nas academias de ciências apoiadas por Catarina, a Grande em São Petersburgo e Frederico, o Grande em Berlim. Os trabalhos reunidos de Euler (pronunciado *Oiler*) completam cerca de 100 grandes volumes. Como o físico francês Arago disse: "Euler calculava sem esforço aparente, como os homens respiram ou como as águias se sustentam no ar". Os cálculos e as escritas de Euler não diminuíram com o fato de ele ter que criar 13 filhos ou por ele ter ficado completamente cego nos últimos 17 anos de sua vida. Na verdade, quando ficou cego, ditava suas descobertas para seus ajudantes a partir de sua prodigiosa memória e imaginação. Seus tratados sobre cálculo e a maioria dos outros assuntos matemáticos tornaram-se padrão para o ensino de matemática e a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$ que ele descobriu relaciona os cinco números mais famosos de toda a matemática.

Em geral, o método de Euler diz para começarmos no ponto dado pelo valor inicial e prosseguirmos na direção indicada pelo campo de direções. Paramos após um intervalo de tempo, olhamos para a inclinação na nova localização e prosseguimos naquela direção. Continuamos parando e mudando de direção de acordo com o campo de direções. O método de Euler não produz a solução exata para um problema de valor inicial ele fornece aproximações. Mas, pela diminuição do passo (e, portanto, aumentando o número de correções no meio do caminho), obtemos aproximações sucessivamente melhores para a solução exata. (Compare as Figuras 12, 13 e 14.)

Para o problema de valor inicial de primeira ordem geral $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, nosso objetivo é encontrar valores aproximados para a solução em números igualmente espaçados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, . . ., onde h é o passo. A equação diferencial nos diz que a inclinação em (x_0, y_0) é $y' = F(x_0, y_0)$, assim, a Figura 15 nos mostra que o valor aproximado para a solução quando $x = x_1$ é

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

Analogamente, $$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

Em geral, $$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

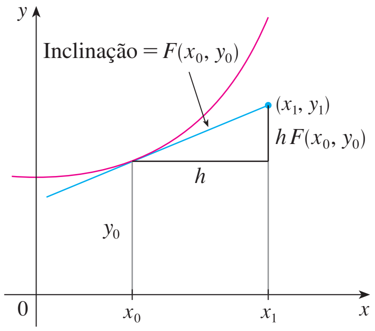


FIGURA 15

Método de Euler Os valores aproximados para a solução do problema de valor inicial $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, com passo h, em $x_n = x_{n-1} + h$, são

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

EXEMPLO 3 Use o método de Euler com o passo 0,1 para construir uma tabela de valores aproximados para a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUÇÃO Sabemos que $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $F(x, y) = x + y$. Logo, temos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0 + 1) = 1{,}1$$
$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22$$
$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1{,}22 + 0{,}1(0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}362$$

Isso significa que, se $y(x)$ é a solução exata, então $y(0{,}3) \approx 1{,}362$.

Prosseguindo com cálculos similares, temos os valores na tabela:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485

TEC O *Module 9.2B* mostra como o método de Euler funciona numérica e visualmente por várias equações diferenciais e passos.

Para uma tabela com valores mais precisos no Exemplo 3, poderíamos diminuir o tamanho do passo. Contudo, para um número grande de pequenos passos, a quantidade de cálculos é considerável e, assim, precisamos programar uma calculadora ou um computador para fazer os cálculos. A seguinte tabela mostra os resultados da aplicação do método de Euler com diminuição do tamanho do passo para o problema de valor inicial do Exemplo 3.

Passo	Estimativa de Euler para y (0,5)	Estimativa de Euler para $y(1)$
0,500	1,500000	2,500000
0,250	1,625000	2,882813
0,100	1,721020	3,187485
0,050	1,757789	3,306595
0,020	1,781212	3,383176
0,010	1,789264	3,409628
0,005	1,793337	3,423034
0,001	1,796619	3,433848

Os pacotes de software para computador que produzem aproximações numéricas para soluções de equações diferenciais utilizam os métodos que são refinamentos do método de Euler. Embora o método de Euler seja simples e não tão preciso, é a ideia básica em que os métodos mais precisos são baseados.

Observe que as estimativas de Euler na tabela parecem estar se aproximando de limites, a saber, os valores verdadeiros de $y(0{,}5)$ e $y(1)$. A Figura 16 mostra os gráficos das aproximações de Euler com os passos 0,5; 0,25; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01 e 0,005. Eles estão se aproximando da curva solução exata à medida que o passo h se aproxima de 0.

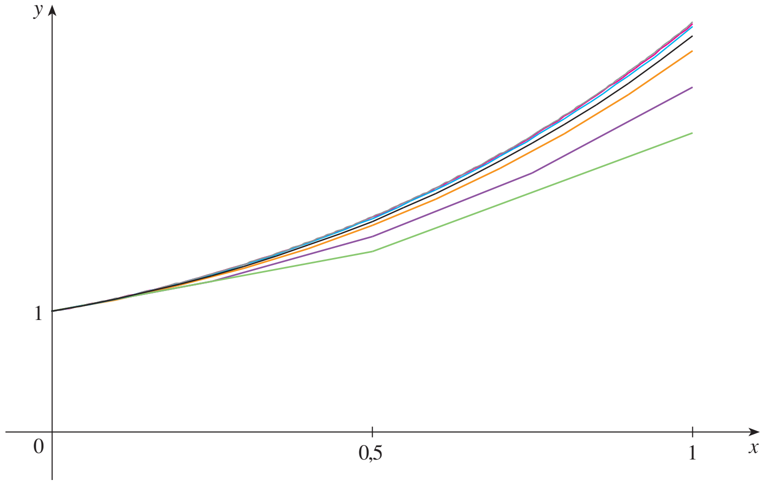


FIGURA 16
Aproximações de Euler tendendo à solução exata

EXEMPLO 4 No Exemplo 2 discutimos um circuito elétrico simples com resistência 12 Ω, indutância 4 H e uma pilha com voltagem 60 V. Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, modelamos a corrente I no instante t pelo problema de valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime a corrente no circuito meio segundo após o fechamento do interruptor.

SOLUÇÃO Usamos o método de Euler com $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ e o passo $h = 0{,}1$ segundo:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 0 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 0) = 1{,}5 \\
I_2 &= 1{,}5 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 1{,}5) = 2{,}55 \\
I_3 &= 2{,}55 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 2{,}55) = 3{,}285 \\
I_4 &= 3{,}285 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 3{,}285) = 3{,}7995 \\
I_5 &= 3{,}7995 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 3{,}7995) = 4{,}15965
\end{aligned}$$

Assim, a corrente após 0,5 s é

$$I(0{,}5) \approx 4{,}16 \text{ A}$$

9.2 Exercícios

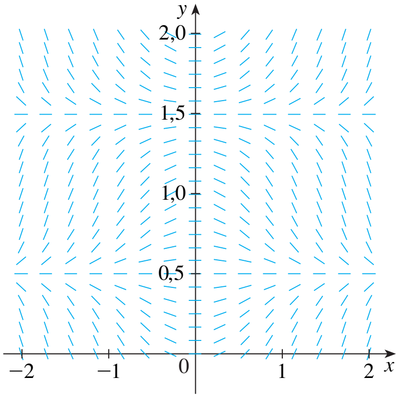
1. É mostrado um campo de direções para a equação $y' = x \cos \pi y$.

(a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.

(i) $y(0) = 0$ (ii) $y(0) = 0{,}5$

(iii) $y(0) = 1$ (iv) $y(0) = 1{,}6$

(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.

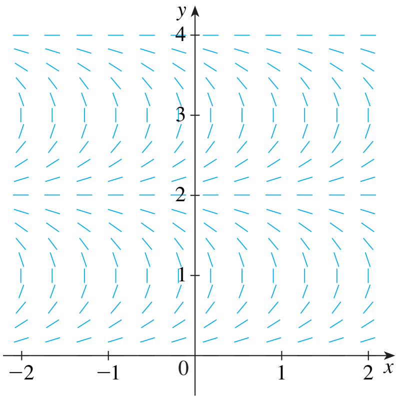


É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. É mostrado um campo de direções para a equação $y' = \text{tg}\,(\frac{1}{2}\pi y)$.
(a) Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 0{,}2$
(iii) $y(0) = 2$ (iv) $y(1) = 3$
(b) Ache todas as soluções de equilíbrio.



3–6 Ligue a equação diferencial a seu campo de direções (I–IV). Dê as razões para sua resposta.

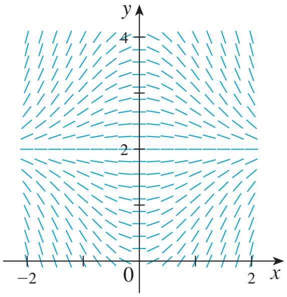
3. $y' = 2 - y$

4. $y' = x(2 - y)$

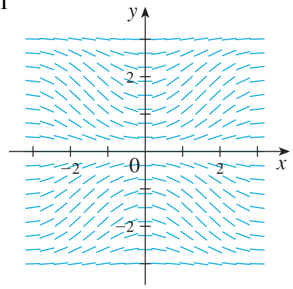
5. $y' = x + y - 1$

6. $y' = \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y$

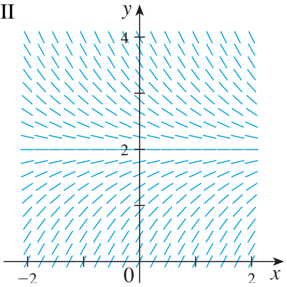
I



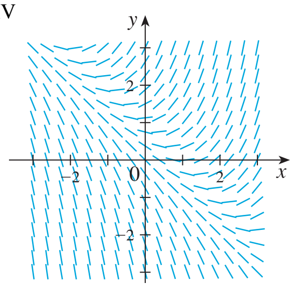
II



III



IV



7. Use o campo de direções II (acima) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2$ (c) $y(0) = -1$

8. Use o campo de direções IV (acima) para esboçar os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
(a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 1$

9–10 Esboce o campo de direções para a equação diferencial. Use-o para esboçar três curvas solução.

9. $y' = \frac{1}{2}y$

10. $y' = x - y + 1$

11–14 Esboce o campo de direções das equações diferenciais dadas. Use-os para esboçar a curva solução que passa pelo ponto dado.

11. $y' = y - 2x$ $(1, 0)$

12. $y' = xy - x^2$ $(0, 1)$

13. $y' = y + xy$ $(0, 1)$

14. $y' = x + y^2$ $(0, 0)$

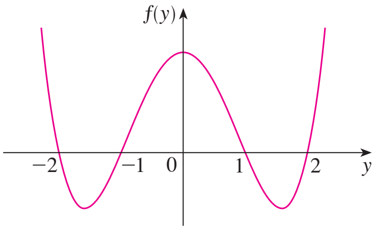
SCA **15–16** Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial dada. Obtenha uma impressão e esboce uma curva solução que passe por (0, 1). Use o SCA para desenhar a curva solução e compare o resultado com seu esboço.

15. $y' = x^2 \,\text{sen}\, y$

16. $y' = x\,(y^2 - 4)$

SCA **17.** Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial $y' = y^3 - 4y$. Obtenha uma impressão e esboce as soluções que satisfazem a condição inicial $y(0) = c$ para diversos valores de c. Para quais valores de c o limite $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existe? Quais são os possíveis valores para esse limite?

18. Faça o esboço de um campo de direções para a equação diferencial autônoma $y' = f(y)$, onde o gráfico de f é como o exibido. Como o comportamento limite das soluções depende do valor de $y(0)$?

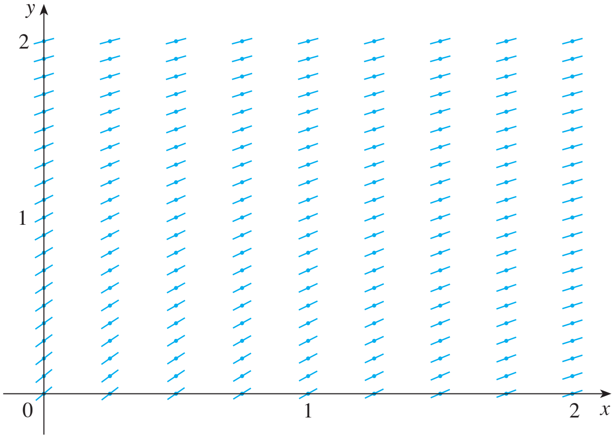


19. (a) Use o método de Euler com cada um dos passos dados para estimar o valor de $y(0{,}4)$, onde y é a solução do problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.
(i) $h = 0{,}4$ (ii) $h = 0{,}2$ (iii) $h = 0{,}1$

(b) Sabemos que a solução exata do problema de valor inicial no item (a) é $y = e^x$. Desenhe, o mais precisamente que puder, o gráfico de $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}4$, junto com as aproximações de Euler, usando os passos da parte (a). (Seus esboços devem assemelhar-se às Figuras 12, 13 e 14.) Use seus esboços para decidir se suas estimativas no item (a) estão subestimadas ou superestimadas.

(c) O erro no método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Calcule os erros feitos no item (a) ao usar o método de Euler para estimar o verdadeiro valor de $y(0, 4)$, a saber, $e^{0{,}4}$. O que acontece com o erro cada vez que o passo cai pela metade?

20. Um campo de direções para uma equação diferencial é apresentado. Desenhe, com uma régua, os gráficos das aproximações de Euler para a curva solução que passa pela origem. Use os passos $h = 1$ e $h = 0{,}5$. As estimativas de Euler estarão superestimadas ou subestimadas? Explique.



21. Use o método de Euler com o passo 0,5 para calcular os valores aproximados de y, y_1, y_2, y_3 e y_4 da solução do problema de valor inicial $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$.

22. Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = 1 - xy$, $y(0) = 0$.

23. Use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar $y(0{,}5)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. (a) Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(0,4)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.

(b) Repita a parte (a) com passo 0,1.

25. (a) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler para calcular $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) $h = 1$ (ii) $h = 0{,}1$

(iii) $h = 0{,}01$ (iv) $h = 0{,}001$

(b) Verifique se $y = 2 + e^{-x^3}$ é a solução exata da equação diferencial.

(c) Encontre os erros ao usar o método de Euler para calcular $y(1)$ com os passos da parte (a). O que acontece com o erro quando o passo é dividido por 10?

SCA **26.** (a) Programe seu sistema de computação algébrica usando o método de Euler com o passo 0,01 para calcular $y(2)$, onde y é a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

(b) Verifique seu trabalho usando um SCA para desenhar a curva solução.

27. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R de ohms (Ω). A queda de voltagem no capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs, C); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

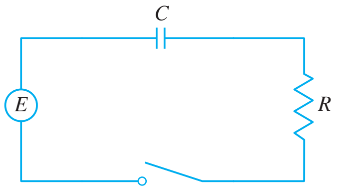
Mas $I = dQ/dt$, de modo que temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5 Ω, a capacitância seja 0,05 F e a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V.

(a) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.

(b) Qual é o valor-limite da carga?



(c) Existe uma solução de equilíbrio?

(d) Se a carga inicial for $Q(0) = 0$ C, use o campo de direções para esboçar a curva solução.

(e) Se a carga inicial for $Q(0) = 0$ C, use o método de Euler com o passo 0,1 para estimar a carga depois de meio segundo.

28. No Exercício 14 na Seção 9.1 consideramos uma xícara de café a 95 °C em uma sala com temperatura de 20 °C. Suponha que o café esfrie a uma taxa de 1 °C por minuto quando sua temperatura for 70 °C.

(a) Como fica a equação diferencial nesse caso?

(b) Desenhe um campo de direções e use-o para esboçar a curva solução para o problema de valor inicial. Qual é o valor-limite da temperatura?

(c) Use o método de Euler com passo $h = 2$ minutos para estimar a temperatura do café após 10 minutos.

9.3 Equações Separáveis

Observamos as equações diferenciais de primeira ordem de um ponto de vista geométrico (campos de direções) e de um ponto de vista numérico (método de Euler). E do ponto de vista simbólico? Seria bom ter uma fórmula explícita para uma solução de uma equação diferencial. Infelizmente, isso não é sempre possível. Mas, nesta seção, examinaremos um tipo de equação diferencial que pode ser resolvida explicitamente.

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y. Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver essa equação, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado. Então integramos ambos os lados da equação:

A técnica para resolver as equações diferenciais separáveis foi primeiro usada por James Bernoulli (em 1690) para resolver um problema sobre pêndulos e por Leibniz (em uma carta para Huygens em 1691). John Bernoulli explicou o método geral em um artigo publicado em 1694.

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

A Equação 2 define y implicitamente como função de x. Em alguns casos também poderemos isolar y em termos de x.

Usamos a Regra da Cadeia para justificar este procedimento: Se h e g satisfazem $\boxed{2}$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

Logo

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

e

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

EXEMPLO 1

(a) Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO

(a) Escrevemos a equação na forma diferencial e integramos os dois lados:

$$y^2dy = x^2dx$$

$$\int y^2dy = \int x^2dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

A Figura 1 ilustra o gráfico de vários membros da família de soluções da equação diferencial do Exemplo 1. A solução do problema com valor inicial da parte (b) é mostrada em vermelho.

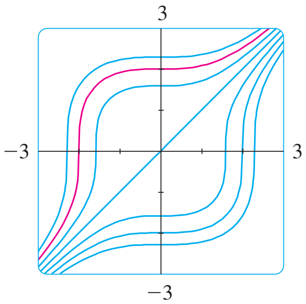


FIGURA 1

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$.)

Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

onde $K = 3C$. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K.)

(b) Se fizermos $x = 0$ na equação geral da parte (a), temos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$, devemos fazer $\sqrt[3]{K} = 2$ e assim temos $K = 8$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

EXEMPLO 2 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUÇÃO Escrevendo a equação em uma forma diferencial e integrando ambos os lados, temos

Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar as curvas definidas por equações implícitas. A Figura 2 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções da equação diferencial no Exemplo 2. Olhando as curvas da esquerda para a direita, os valores de C são 3, 2, 1, 0, -1, -2 e -3

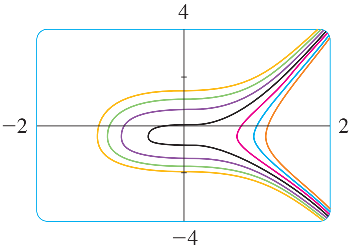


FIGURA 2

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

$$y^2 + \text{sen}\, y = 2x^3 + C \tag{3}$$

onde C é uma constante. A Equação 3 fornece uma solução geral implícita. Nesse caso é impossível resolver a equação para expressar explicitamente como uma função de x.

EXEMPLO 3 Resolva a equação $y' = x^2 y$.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Se $y \neq 0$, podemos reescrevê-la em uma notação diferencial e integrá-la:

Se uma solução y é uma função que satisfaz $y(x) \neq 0$ para algum x, segue de um teorema de existência e unidade para soluções de equações diferenciais que $y(x) \neq 0$ para todo x.

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Essa equação define y implicitamente como função de x. Mas, nesse caso, podemos solucionar explicitamente para y como a seguir:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

Então $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Podemos verificar facilmente que a função $y = 0$ também é uma solução da equação diferencial dada. Dessa forma, podemos escrever a solução geral na forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

onde A é uma constante arbitrária ($A = e^C$, ou $A = -e^C$, ou $A = 0$).

A Figura 3 mostra um campo de direções para a equação diferencial no Exemplo 3. Compare-a com a Figura 4, em que usamos a equação $y = Ae^{x^3/3}$ para representar as soluções por diversos valores de A. Se você usar o campo de direções para esboçar as curvas de solução com a intersecção y 5, 2, 1, -1 e -2, elas irão assemelhar-se com as curvas da Figura 4.

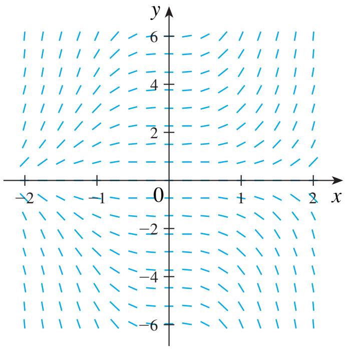


FIGURA 3

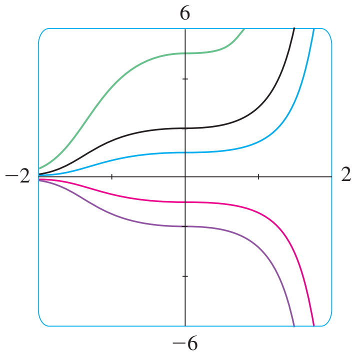


FIGURA 4

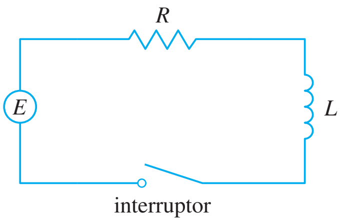


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Na Seção 9.2, modelamos a corrente $I(t)$ no circuito elétrico mostrado na Figura 5 pela equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é 12 Ω, a indutância é 4 H, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e o interruptor é ligado quando $t = 0$. Qual o valor-limite da corrente?

SOLUÇÃO Com $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$, a equação torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{or} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

e o problema de valor inicial é

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Reconhecemos essa equação como separável e a resolvemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{15 - 3I} &= \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0) \\ -\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| &= t + C \\ |15 - 3I| &= e^{-3(t+C)} \\ 15 - 3I &= \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t} \\ I &= 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t} \end{aligned}$$

Como $I(0) = 0$, temos $5 - \frac{1}{3}A = 0$, assim, $A = 15$ e a solução é

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

A corrente-limite, em ampères, é

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

A Figura 6 revela como a solução no Exemplo 4 (a corrente) se aproxima de seu valor-limite. A comparação com a Figura 11 na Seção 9.2 mostra que pudemos desenhar uma curva solução bem precisa a partir do campo de direções.

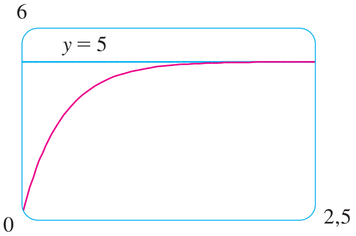


FIGURA 6

Trajetórias Ortogonais

Uma **trajetória ortogonal** de uma família de curvas é uma curva que intercepta cada curva da família ortogonalmente, isto é, com ângulo reto (veja a Figura 7). Por exemplo, cada membro da família $y = mx$ de retas que passa pela origem é uma trajetória ortogonal da família $x^2 + y^2 = r^2$ de círculos concêntricos com o centro na origem (veja a Figura 8). Dizemos que as duas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

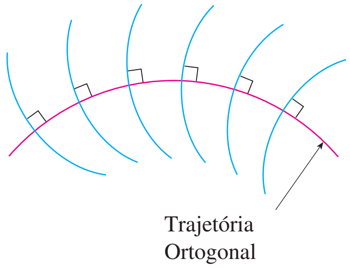


FIGURA 7

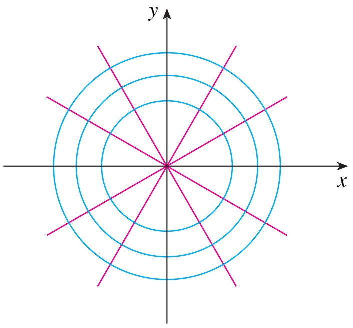


FIGURA 8

EXEMPLO 5 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas $x = ky^2$, onde k é uma constante arbitrária.

SOLUÇÃO As curvas $x = ky^2$ formam uma família de parábolas cujo eixo de simetria é o eixo x. O primeiro passo é encontrar uma única equação diferencial que seja satisfeita por todos os membros da família. Se derivarmos $x = ky^2$, obteremos

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Essa é uma equação diferencial que depende de k, mas precisamos de uma equação que seja válida para todos os valores de k simultaneamente. Para eliminar k observamos que, da equação geral da parábola dada $x = ky^2$, temos $k = x/y^2$ e, assim, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}\,y}$$

ou $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Isso significa que a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) em uma das parábolas é $y' = y/(2x)$. Em uma trajetória ortogonal, a inclinação da reta tangente deve ser o oposto do inverso dessa inclinação. Portanto, as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

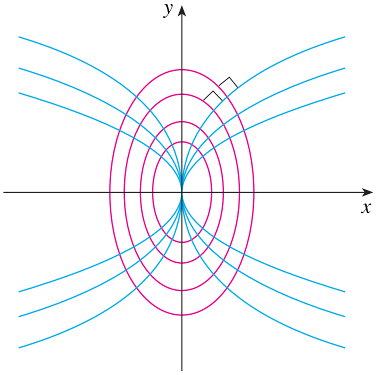


FIGURA 9

Essa equação diferencial é separável e a resolvemos como segue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

onde C é uma constante positiva qualquer. Então, as trajetórias ortogonais são a família de elipses dada pela Equação 4 e esboçada na Figura 9.

As trajetórias ortogonais ocorrem em vários ramos da física. Por exemplo, em um campo eletrostático, as linhas de força são ortogonais às linhas de potencial constante. Também as linhas de corrente em aerodinâmica são trajetórias ortogonais às curvas de velocidade constante.

Problemas de Mistura

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denota a quantidade de substância no tanque no instante t, então $y'(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável. Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outros.

EXEMPLO 6 Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5 000 L de água. Água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

SOLUÇÃO Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Foi-nos dado que $y(0) = 20$ e queremos encontrar $y(30)$. Fazemos isso encontrando uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$. Observe que dy/dt é a taxa de variação da quantidade de sal, assim,

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída})$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$\text{taxa de entrada} = \left(0{,}03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

O tanque sempre contém 5 000 L de líquido, então a concentração no tempo t é $y(t)/5\,000$ (medida em quilogramas por litro). Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{5\,000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Então, da Equação 5, temos

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtemos

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Uma vez que $y(0) = 20$, temos $-\ln 130 = C$, logo

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Portanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Como $y(t)$ é contínua, $y(0) = 20$ e o lado direito nunca é zero, deduzimos que $150 - y(t)$ é sempre positiva. Então, $|150 - y| = 150 - y$ e assim

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1 \text{ kg}$$

A Figura 10 mostra o gráfico da função $y(t)$ do Exemplo 6. Observe que, com o passar do tempo, a quantidade de sal se aproxima de 150 kg.

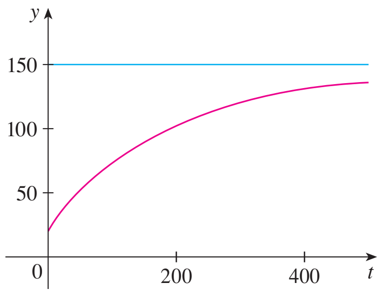


FIGURA 10

9.3 Exercícios

1–10 Resolva a equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{e^y}$

3. $xy^2y' = x + 1$

4. $(y^2 + xy^2)y' = 1$

5. $(y + \operatorname{sen} y)\,y' = x + x^3$

6. $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{s + 1}{sv + s}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec \theta}$

9. $\dfrac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11–18 Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

14. $y' = \dfrac{xy \operatorname{sen} x}{y + 1}, \quad y(0) = 1$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

15. $x \ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y'$, $\quad y(1) = 1$

16. $\dfrac{dp}{dt} = \sqrt{Pt}$, $\quad P(1) = 2$

17. $y' \operatorname{tg} x = a + y$, $\quad y(\pi/3) = a$, $\quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dp}{dt} = kL^2 \ln t$, $\quad L(1) = -1$

19. Encontre uma equação da curva que passe pelo ponto (0, 1) e cuja inclinação em (x, y) seja xy.

20. Encontre a função f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ e $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resolva a equação diferencial $y' = x + y$, usando a mudança de variáveis $u = x + y$.

22. Resolva a equação diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$, usando a mudança de variáveis $v = y/x$.

23. (a) Resolva a equação diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$ e faça um gráfico de solução.

(c) O problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$ tem solução? Explique.

24. Resolva a equação $e^{-y}y' + \cos x = 0$ e trace vários membros da família de soluções. Como muda a curva solução quando a constante C varia?

SCA **25.** Resolva o problema de valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, e trace a solução (se seu SCA fizer gráficos implícitos).

SCA **26.** Resolva a equação $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ e trace vários membros da família de soluções (se seu SCA fizer gráficos implícitos). Como muda a curva solução quando a constante C varia?

SCA **27–28.**

(a) Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direção para a equação diferencial. Imprima e use-o para esboçar algumas curvas de solução sem resolver a equação diferencial.

(b) Resolva a equação diferencial.

(c) Use o SCA para desenhar as soluções obtidas na parte (b). Compare com as curvas da parte (a).

27. $y' = y^2$ **28.** $y' = xy$

29–32 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas. Usando uma calculadora (ou um computador), desenhe vários membros de cada família na mesma tela.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$ **30.** $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$ **32.** $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33–35 Uma **equação integral** é uma equação que contém uma função desconhecida $y(x)$ e uma integral que envolve $y(x)$. Resolva a determinada equação integral. [*Dica*: Use uma condição inicial obtida da equação integral.]

33. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_2^x [t - ty(t)]\, dt$

34. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{ty(t)}$, $x > 0$

35. $y(x) = 4 + \displaystyle\int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\, dt$

36. Encontre a função f tal que $f(3) = 2$ e

$$(t^2 + 1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \qquad t \neq 1$$

[*Dica*: Use a fórmula de adição para $\operatorname{tg}(x + y)$ na Página de Referência 2.]

37. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 27, na Seção 9.2, para encontrar uma expressão para a carga no instante t. Encontre o valor-limite da carga.

38. No Exercício 28, na Seção 9.2, discutimos uma equação diferencial que modela a temperatura de uma xícara de café a 95 ºC em uma sala a 20 ºC. Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para a temperatura do café no instante t.

39. No Exercício 15, na Seção 9.1, formulamos um modelo para o aprendizado na forma da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde $P(t)$ mede o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade depois de um tempo de treinamento t, M é o nível máximo de desempenho e k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma expressão para $P(t)$. Qual é o limite dessa expressão?

40. Em uma reação química elementar, as moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto C: A + B → C. A lei de ação das massas afirma que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações de A e B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Veja o Exemplo 4, na Seção 3.7, no Volume I.) Então, se as concentrações iniciais forem $[\mathrm{A}] = a$ mols/L e $[\mathrm{B}] = b$ mols/L e escrevermos $x = [\mathrm{C}]$, então teremos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

(a) Supondo que $a \neq b$, encontre x como uma função de t. Use o fato de que a concentração inicial de C é 0.

(b) Encontre $x(t)$ assumindo que $a = b$. Como essa expressão para $x(t)$ é simplificada se soubermos que $[\mathrm{C}] = \frac{1}{2}a$ depois de 20 segundos?

41. Em contraste com a situação do Exercício 40, as experiências mostram que a reação $\mathrm{H_2} + \mathrm{Br_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{HBr}$ satisfaz a lei de troca

$$\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = k[\mathrm{H_2}][\mathrm{Br_2}]^{1/2}$$

e, portanto, para essa reação a equação diferencial torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

onde $x = [\mathrm{HBr}]$ e a e b são concentrações iniciais de hidrogênio e bromo.

(a) Escreva x como uma função de t no caso em que $a = b$. Use o fato de que $x(0) = 0$.

(b) Se $a > b$, encontre t como uma função de x. [*Dica*: Ao desempenhar a integração, faça a substituição $u = \sqrt{b - x}$.]

42. Uma esfera com raio 1 m tem temperatura 15 ºC. Ela encontra-se dentro de uma esfera concêntrica com raio 2 m e temperatura 25 ºC. A temperatura $T(r)$ em uma distância r do centro comum das esferas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Se fizermos $S = dT/dr$, então S satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem. Encontre uma expressão para a temperatura $T(r)$ entre as duas esferas.

43. Uma solução de glicose é administrada de maneira intravenosa na corrente sanguínea em uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada, ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então, um modelo para a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea é

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Suponha que a concentração no instante $t = 0$ seja C_0. Determine a concentração em um instante qualquer t, resolvendo a equação diferencial.

(b) Assumindo que $C_0 < r/k$, calcule $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete sua resposta.

44. Um pequeno país tem \$ 10 bilhões em papel-moeda em circulação e a cada dia \$ 50 milhões chegam aos bancos daquele lugar. O governo decide introduzir uma nova moeda, fazendo com que os bancos troquem notas velhas por novas sempre que a moeda antiga entrar nos bancos. Denote por $x = x(t)$ a quantidade de moeda nova em circulação no instante t, com $x(0) = 0$.

(a) Formule um modelo matemático na forma de um problema de valor inicial que represente o "fluxo" da nova moeda em circulação.

(b) Resolva o problema de valor inicial encontrado no item (a).

(c) Quanto tempo levará para a nova moeda representar 90% da moeda em circulação?

45. Um tanque contém 1 000 L de água salgada com 15 kg de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quanto sal há no tanque (a) após t minutos e (b) após 20 minutos?

46. O ar em uma sala com volume 180 m^3 contém 0,15% de dióxido de carbono inicialmente. Ar mais fresco com apenas 0,05% de dióxido de carbono entra na sala a uma taxa de 2 m^3/min e o ar misturado sai na mesma taxa. Encontre a porcentagem de dióxido de carbono na sala como uma função do tempo. O que acontece a longo prazo?

47. Um barril com 2 000 L de cerveja contém 4% de álcool (por volume). Cerveja com 6% de álcool é bombeada para dentro do barril a uma taxa de 20 L/min e a mistura é bombeada para fora do barril à mesma taxa. Qual é a porcentagem de álcool depois de uma hora?

48. Um tanque contém 1.000 L de água pura.* Água salgada com 0,04 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 L/min. Quanto sal há no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de uma hora?

49. Quando uma gota de chuva cai, ela aumenta de tamanho; assim, sua massa em um instante t é uma função de t, $m(t)$. A taxa de crescimento da massa é $km(t)$ para alguma constante positiva k. Quando aplicamos a Lei do Movimento de Newton à gota de chuva, obtemos $(mv)' = gm$, onde v é a velocidade da gota de chuva (dirigida para baixo) e g é a aceleração da gravidade. A *velocidade terminal* da gota de chuva é $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encontre uma expressão para a velocidade terminal em termos de g e k.

50. Um objeto de massa m está se movendo horizontalmente por um meio que resiste ao movimento com uma força que é uma função da velocidade; isto é,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

onde $v = v(t)$ e $s = s(t)$ representam a velocidade e a posição do objeto no instante t, respectivamente. Por exemplo, pense em um barco se movendo pela água.

(a) Suponha que a força de resistência seja proporcional à velocidade, isto é, $f(v) = -kv$, k uma constante positiva. (Esse modelo é apropriado para pequenos valores de v.) Sejam $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$ os valores iniciais de v e s. Determine v e s em qualquer instante t. Qual é a distância total que o objeto viaja a partir do instante $t = 0$?

(b) Para volumes maiores de v um melhor modelo é obtido ao supor que a força de resistência seja proporcional ao quadrado da velocidade, isto é, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Esse modelo foi sugerido primeiro por Newton.) Sejam v_0 e s_0 os valores iniciais de v e s. Determine v e s em qualquer instante t. Qual é a distância total que o objeto viaja nesse caso?

51. *Crescimento alométrico* em biologia refere-se às relações entre os tamanhos das partes de um organismo (comprimento do crânio e comprimento do corpo, por exemplo). Se $L_1(t)$ e $L_2(t)$ são os tamanhos de dois órgãos em um organismo de idade t, então L_1 e L_2 satisfazem uma lei alométrica se suas taxas de crescimento específicas são proporcionais:

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

onde k é uma constante.

(a) Use a lei alométrica para escrever uma equação diferencial fazendo a relação de L_1 e L_2 e solucione-a para expressar L_1 como uma função de L_2.

(b) Em um estudo de diversas espécies de algas unicelulares, a constante de proporcionalidade na lei alométrica relacionando B (biomassa celular) e V (volume celular) foi considerada $k = 0{,}0794$. Escreva B como uma função de V.

52. *Homeostase* refere-se a um estado em que o teor de nutrientes de um consumidor é independente do teor de nutrientes de seu alimento. Na ausência de homeostase, um modelo sugerido por Sterner e Elser é dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x}$$

onde x e y representam o teor de nutrientes do alimento e do consumidor, respectivamente, e θ é uma constante com $\theta \geqslant 1$.

(a) Resolva a equação diferencial.

(b) O que acontece quando $\theta = 1$? O que acontece quando $\theta \longrightarrow \infty$?

53. Seja $A(t)$ a área de uma cultura de tecido em um instante t e seja M a área final do tecido quando o crescimento está completo. A maioria das divisões celulares ocorre na periferia do tecido, e o número de células na periferia é proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Assim, um modelo razoável para o crescimento de tecido é obtido assumindo-se que a taxa de crescimento da área seja conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ e $M - A(t)$.

(a) Formule uma equação diferencial e use-a para mostrar que o tecido cresce mais rápido quando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

SCA (b) Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para $A(t)$. Use um sistema de computação algébrica para fazer a integração.

---

* Água salgada com 0,05 kg de cal. por litro de água entra no tanque a uma taxa de 5 L/min.

54. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força gravitacional em um objeto de massa m que tenha sido lançado verticalmente para cima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

onde $x = x(t)$ é a distância do objeto acima da superfície no instante t; R, o raio da Terra; e g, a aceleração da gravidade. Também, pela Segunda Lei de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$, e dessa forma

$$m\,\frac{dv}{dt} = -\,\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponha que um foguete seja lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0. Seja h a altura máxima acima da superfície alcançada pelo objeto. Mostre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Dica*: Pela Regra da Cadeia, $m(dv/dt) = mv\,(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Esse limite é chamado velocidade de escape da Terra.

(c) Use $R = 6.370$ km e $g = 9{,}8$ m/s^2 para calcular v_e em quilômetros por segundo.

PROJETO APLICADO

QUÃO RAPIDAMENTE UM TANQUE ESVAZIA?

Se água (ou outro líquido) está vazando de um tanque, esperamos que o escoamento seja maior no começo (quando o tanque estiver mais cheio) e que vá gradualmente diminuindo à medida que o nível de água do tanque diminui. Mas queremos uma descrição matemática mais precisa de como o escoamento decresce a fim de responder às perguntas que os engenheiros fazem: quanto tempo demora para que o tanque seja esvaziado completamente? Quão cheio o tanque deve estar para garantir uma pressão mínima a um sistema de irrigação?

Sejam $h(t)$ e $V(t)$ o volume de água no tanque e a altura da água no tanque num dado momento t. Se a água escorre por um furo de área a no fundo do tanque, então a Lei de Torricelli diz que

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh} \tag{1}$$

onde g é a aceleração devido à gravidade. Logo, a taxa na qual a água escoa do tanque é proporcional à raiz quadrada da altura da água.

1. (a) Suponha que o tanque seja cilíndrico com altura igual a 2 m e raio igual a 1 m e que o buraco seja um círculo com raio igual a 2 cm. Se tomarmos $g = 10$ m/s^2, mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}0004\sqrt{20h}$$

(b) Resolva esta equação para encontrar a altura da água no instante t, supondo que o tanque esteja cheio em $t = 0$.

(c) Quanto tempo iria demorar para o tanque ficar completamente vazio?

2. O modelo teórico dado pela Equação 1 não é muito preciso, se levarmos em conta a rotação e viscosidade do líquido. Em vez disso, o modelo

$$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \tag{2}$$

é em geral usado e a constante k (que depende das propriedades físicas do líquido) é determinada a partir dos dados relacionados com o vazamento do tanque.

(a) Suponha que o buraco esteja posicionado na lateral de uma garrafa e que a altura h da água (acima do buraco) decresça de 10 cm para 3 cm em 68 segundos. Use a Equação 2 para encontrar uma expressão para $h(t)$. Avalie $h(t)$ para $t = 10$, 20, 30, 40, 50, 60.

(b) Perfure um buraco de 4 mm perto do fundo de uma garrafa plástica de um refrigerante de 2 litros. Faça marcas de 0 a 10, com “0” correspondendo ao topo do buraco. Com um dedo tampando o buraco, encha a garrafa com água até a

O Problema 2(b) é resolvido melhor com uma demonstração em sala de aula ou em um projeto em grupo com três alunos em cada grupo: um para marcar o tempo em segundos, outro para estimar a altura a cada 10 segundos e um terceiro para registrar esses valores

Richard Le Borne, Depto. Matemática, Tenesse Technological University

marca de 10 cm. Tire seu dedo do buraco e registre os valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Provavelmente, você vai descobrir que demorará cerca de 68 segundos para o nível chegar a $h = 3$ cm.) Compare seus dados com os valores de $h(t)$ da parte (a). Quão bem o modelo previu os valores reais?

3. Em muitas partes do mundo, a água para os sistemas de combate a incêndios em grandes hotéis e hospitais é fornecida pela ação da gravidade em tanques cilíndricos colocados nos telhados desses prédios. Suponha que cada tanque tenha um raio de 3 m e o diâmetro da saída seja de 6 cm. Um engenheiro tem de garantir que a pressão da água seja, no mínimo, de 104 kPa por um período de 10 minutos. (Quando um incêndio acontece, o sistema elétrico pode falhar e pode levar cerca de 10 minutos para que o gerador de emergência e bombas anti-incêndio sejam ativados.) Qual altura o engenheiro deve especificar para o tanque a fim de garantir essa exigência? (Use o fato de que a pressão da água a uma profundidade de d metros é $P = 10\,d$ quilopascals. Veja a Seção 8.3.)

4. Nem todos os tanques têm a forma de cilindros. Suponha que um tanque tenha uma área transversal $A(h)$ na altura h. Então, o volume de água até a altura h é $V = \int_0^h A(u)\,du$ e, portanto, o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá $dV/dh = A(h)$. Segue que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt} = A(h)\,\frac{dh}{dt}$$

e assim a Lei de Torricelli se torna

$$A(h)\,\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponha que o tanque tenha o formato de uma esfera de raio igual a 2 m e que esteja cheia, inicialmente, até a metade de sua capacidade de água. Se o raio do buraco circular é 1 cm e assumimos que $g = 10$ m/s^2, mostre que h satisfaz a equação diferencial

$$(4h - h^2)\,\frac{dh}{dt} = -0{,}0001\sqrt{20h}$$

(b) Em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

PROJETO APLICADO O QUE É MAIS RÁPIDO: SUBIR OU DESCER?

Suponha que você jogue uma bola para o ar. Você acha que ela leva mais tempo para alcançar sua altura máxima ou para cair de volta à Terra a partir de sua altura máxima? Resolveremos esse problema neste projeto, mas, antes de começar, pense sobre a situação e dê um palpite com base em sua intuição prática.

1. Uma bola de massa m é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial positiva v_0. Assumimos que as forças agindo na bola sejam a força da gravidade e a força de resistência do ar com sentido oposto ao sentido do movimento e com módulo $p|v(t)|$, onde p é uma constante positiva e $v(t)$ é a velocidade da bola no instante t. Tanto na subida quanto na descida, a força total agindo na bola é $-pv - mg$. (Durante a subida, $v(t)$ é positiva e a resistência age para baixo; durante a descida, $v(t)$ é negativa e a resistência age para cima.) Então, de acordo com a Segunda Lei Newton, a equação de movimento é

$$mv' = -pv - mg$$

Ao modelar a força em virtude da resistência do ar, várias funções têm sido usadas, dependendo das características físicas e velocidade da bola. Aqui, usamos um modelo linear, $-pv$, mas um modelo quadrático ($-pv^2$ na subida e pv^2 na descida) é outra possibilidade para velocidades altas (veja o Exercício 50 na Seção 9.3). Para uma bola de golfe, experiências mostraram que um bom modelo é $-pv^{1,3}$ na subida e $p|v|^{1,3}$ na descida. Mas, não importando a função força $-f(v)$ usada [onde $f(v) > 0$ para $v > 0$ e $f(v) < 0$ para $v < 0$], a resposta à questão permanece a mesma. Veja F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually." Amer. Mat. Mensal 108 (2001), pp. 437–440.

Resolva essa equação diferencial para mostrar que a velocidade é

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Mostre que a altura da bola, até ela atingir o chão, é

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

3. Seja t_1 o tempo que a bola leva para alcançar sua altura máxima. Mostre que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Calcule esse tempo para uma bola com massa 1 kg e velocidade inicial 20 m/s. Suponha que a força de resistência do ar seja $\frac{1}{10}$ da velocidade.

4. Seja t_2 o instante no qual a bola volta para a Terra. Para a bola do Problema 3, calcule t_2 usando um gráfico da função altura $y(t)$. Qual é mais rápida, a subida ou a descida?

5. Em geral, não é fácil encontrar t_2 porque é impossível resolver a equação $y(t) = 0$. Podemos, entretanto, usar um método indireto para determinar se a subida ou a descida é mais rápida; determinamos se é positivo ou negativo. Mostre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

onde $x = e^{pt_1/m}$. Então mostre que $x > 1$ e a função

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

estão aumentando para $x > 1$. Use esse resultado para decidir se $y(2t_1)$ é positivo ou negativo. O que você pode concluir? A subida ou a descida é mais rápida?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

9.4 Modelos para o Crescimento Populacional

Nesta seção investigaremos equações diferenciais que são usadas para modelar o crescimento populacional: a lei do crescimento natural, a equação logística e muitas outras.

A Lei de Crescimento Natural

Um dos modelos para o crescimento populacional que consideramos na Seção 9.1 baseava-se na suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Essa é uma hipótese razoável? Suponha que tenhamos uma população (de bactérias, por exemplo) com tamanho $P = 1\ 000$ e que, em certo instante, esteja crescendo a uma taxa de $P' = 300$ bactérias por hora. Agora, tomemos outras 1 000 bactérias do mesmo tipo, colocando-as com a primeira população. Cada metade da nova população cresce a uma taxa de 300 bactérias por hora. Seria razoável esperar que a população total de 2 000 aumentasse a uma taxa de 600 bactérias por hora inicialmente (desde que houvesse espaço e nutrientes suficientes). Assim, se dobrarmos o tamanho, dobraremos a taxa de crescimento. Parece possível que a taxa de crescimento seja proporcional ao tamanho.

Em geral, se $P(t)$ for o valor de uma quantidade y no tempo t, e se a taxa de variação de P com relação a t for proporcional a seu tamanho $P(t)$ em qualquer tempo, então

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada **lei do crescimento natural**. Se k for positivo, então a população aumenta; se k for negativo, ela diminui.

Como a Equação 1 é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelo método da Seção 9.3:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

onde A $(= \pm e^C$ ou $0)$ é uma constante arbitrária. Para percebermos o significado da constante A, observamos que

$$P(0) = Ae^{k\cdot 0} = A$$

Portanto, A é o valor inicial da função.

$\boxed{2}$ A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

é

$$P(t) = P_0e^{kt}$$

Exemplos e exercícios sobre a utilização de $\boxed{2}$ são dados na Seção 3.8.

Outra maneira de escrever a Equação 1 é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

que diz que a **taxa de crescimento relativa** (a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população) é constante. Então, $\boxed{2}$ diz que a população com uma taxa de crescimento relativa constante deve crescer exponencialmente.

Podemos levar em conta a emigração (ou a remoção) de uma população modificando a Equação 1: se a taxa de emigração for uma constante m, então a taxa de mudança da população é modelada pela equação diferencial

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP - m$$

Veja o Exercício 15 para a solução e consequências da Equação 3.

O Modelo Logístico

Como discutimos na Seção 9.1, uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se $P(t)$ for o tamanho da população no instante t, assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{se } P \text{ for pequeno}$$

Isso diz que a taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho. Em outras palavras, a taxa de crescimento relativo é praticamente constante quando a população é pequena. Mas também queremos refletir o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua **capacidade de suporte** M, a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas hipóteses é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Multiplicando por P, obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como a **equação diferencial logística**:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)} \tag{4}$$

Observe na Equação 4 que, se P for pequeno comparado com M, então P/M está próximo de 0 e, dessa forma, $dP/dt \approx kP$. Contudo, se $P \to M$ (a população se aproxima de sua capacidade de suporte), então $P/M \to 1$, assim, $dP/dt \to 0$. Podemos deduzir informações sobre quando as soluções aumentam ou diminuem diretamente da Equação 4. Se a população P estiver entre 0 e M, então o lado direito da equação é positivo, desse modo $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte ($P > M$), então $1 - P/M$ é negativo, portanto $dP/dt < 0$ e a população diminui.

Vamos começar nossa análise mais detalhada da equação diferencial logística olhando para um campo de direções.

EXEMPLO 1 Desenhe um campo de direções para a equação logística com $k = 0{,}08$ e capacidade de suporte $M = 1\,000$. O que você pode deduzir sobre as soluções?

SOLUÇÃO Nesse caso a equação diferencial logística é

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right)$$

Um campo de direções para essa equação é mostrado na Figura 1. Mostramos apenas o primeiro quadrante porque as populações negativas não têm significado e estamos interessados apenas no que acontece depois de $t = 0$.

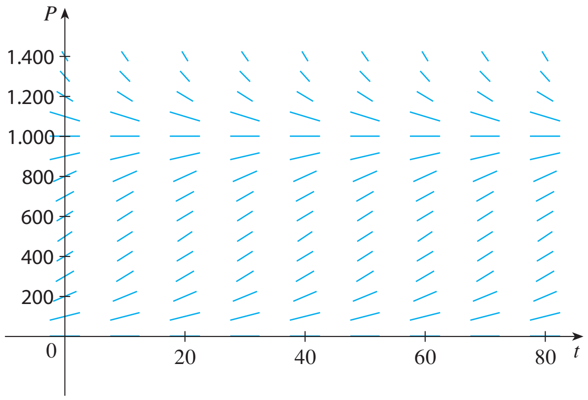


FIGURA 1
Campo de direções para a equação logística no Exemplo 1

A equação logística é autônoma (dP/dt depende apenas de P, não de t); assim, as inclinações são as mesmas ao longo de qualquer reta horizontal. Como esperado, as inclinações são positivas para $0 < P < 1\,000$ e negativas para $P > 1\,000$.

As inclinações são pequenas quando P está próximo de 0 ou 1 000 (a capacidade de suporte). Observe que as soluções se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = 1\,000$.

Na Figura 2 usamos o campo de direções para esboçar as curvas solução com populações iniciais $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ e $P(0) = 1\,300$. Observe que as curvas solução abaixo de $P = 1\,000$ estão aumentando, e aquelas que começam acima de $P = 1\,000$ estão diminuindo. As inclinações são maiores quando $P \approx 500$, portanto as curvas solução que começam abaixo de $P = 1\,000$ têm pontos de inflexão quando $P \approx 500$. De fato, podemos demonstrar que todas as curvas solução que começam abaixo de $P = 500$ têm um ponto de inflexão quando P é exatamente 500. (Veja o Exercício 11.)

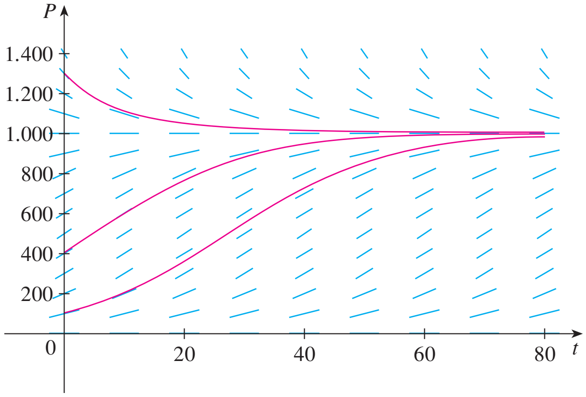


FIGURA 2
Curvas solução para a equação logística no Exemplo 1

A equação logística $\boxed{4}$ é separável e podemos resolvê-la explicitamente usando o método da Seção 9.3. Uma vez que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

temos

$$\boxed{5} \qquad \int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\, dt$$

Para calcularmos a integral no lado esquerdo, escrevemos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Usando frações parciais (veja a Seção 7.4, no Volume I) temos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

Isso nos permite reescrever a Equação 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}\right) dP = \int k\, dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left|\frac{M - P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{M - P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

$$\boxed{6} \qquad \frac{M - P}{P} = Ae^{-kt}$$

onde $A = \pm e^{-C}$. Isolando P na Equação 6, obtemos

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

então

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos o valor de A colocando $t = 0$ na Equação 6. Se $t = 0$, então $P = P_0$ (a população inicial); portanto,

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Então, a solução para a equação logística é

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{onde } A = \frac{M - P_0}{P_0}} \tag{7}$$

Usando a expressão para $P(t)$ na Equação 7, vemos que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = K$$

que é o esperado.

EXEMPLO 2 Escreva a solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população quando $P(40)$ e $P(80)$. Quando a população alcançará 900?

SOLUÇÃO A equação diferencial é uma equação logística com $k = 0{,}08$, capacidade de suporte $M = 1.000$ e população inicial $P_0 = 100$. Portanto a Equação 7 dá a população no instante t como

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + Ae^{-0{,}08t}} \qquad \text{onde } A = \frac{1\,000 - 100}{100} = 9$$

Logo,

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}08t}}$$

Assim, os tamanhos da população quando $t = 40$ e 80 são

$$P(40) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-3{,}2}} \approx 731{,}6 \qquad P(80) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-6{,}4}} \approx 985{,}3$$

A população alcançará 900 quando

$$\frac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}08t}} = 900$$

Resolvendo essa equação para t, temos

$$1 + 9e^{-0{,}08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0{,}08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0{,}08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0{,}08} \approx 54{,}9$$

Logo, a população chega a 900 quando t for aproximadamente 55. Como uma verificação de nosso trabalho, traçamos a curva da população na Figura 3 e observamos onde ela intercepta a reta $P = 900$. O cursor indica que $t \approx 55$.

Compare a curva solução na Figura 3 com a curva solução mais baixa que desenhamos no campo de direções na Figura 2.

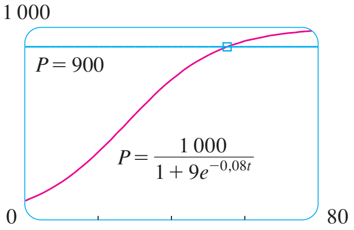


FIGURA 3

Comparação do Crescimento Natural com os Modelos Logísticos

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário *paramécio* e usou uma equação logística para modelar seus dados. A tabela fornece suas contagens diárias da população de protozoários. Ele estimou a taxa relativa de crescimento inicial como 0,7944 e a capacidade de suporte como 64.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EXEMPLO 3 Encontre os modelos exponencial e logístico para os dados de Gause. Compare os valores previstos com os valores observados e comente o ajuste.

SOLUÇÃO Dadas a taxa de crescimento relativo $k = 0{,}7944$ e a população inicial $P_0 = 2$, o modelo exponencial é

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0{,}7944t}$$

Gause usou o mesmo valor de k para seu modelo logístico. [Isso é razoável porque $P_0 = 2$ é pequeno comparado com a capacidade de suporte ($M = 64$). A equação

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

mostra que o valor de k para o modelo logístico está muito próximo do valor para o modelo exponencial.]

A seguir, a solução da equação logística na Equação 7 fornece

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0{,}7944t}}$$

onde
$$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Então
$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Usamos essas equações para calcular os valores previstos (arredondados para o inteiro mais próximo) e os comparamos na tabela a seguir.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	. . .										

Observamos na tabela e no gráfico da Figura 4 que, para os primeiros três ou quatro dias, o modelo exponencial fornece resultados comparáveis àqueles do método logístico mais sofisticado. Para $t \geqslant 5$, contudo, o modelo exponencial é muito impreciso, mas o modelo logístico se ajusta bem às observações.

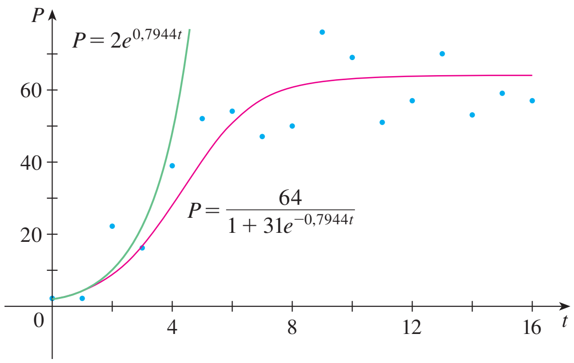


FIGURA 4
Os modelos exponencial e logístico para a população de *paramécios*

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9.847	1992	10.036
1982	9.856	1994	10.109
1984	9.855	1996	10.152
1986	9.862	1998	10.175
1988	9.884	2000	10.186
1990	9.962		

Muitos países que anteriormente passavam por um crescimento exponencial estão descobrindo agora que suas taxas de crescimento populacional estão diminuindo e que o modelo logístico fornece um modelo mais adequado. A tabela na margem mostra os valores em meados do ano de $B(t)$, a população da Bélgica, em milhares, no instante t, de 1980 a 2000. A Figura 5 mostra esses dados junto com uma função logística transladada obtida por meio de uma calculadora com recursos para ajustar funções logísticas a estes pontos por regressão. Vemos que o modelo logístico fornece um ajuste muito bom.

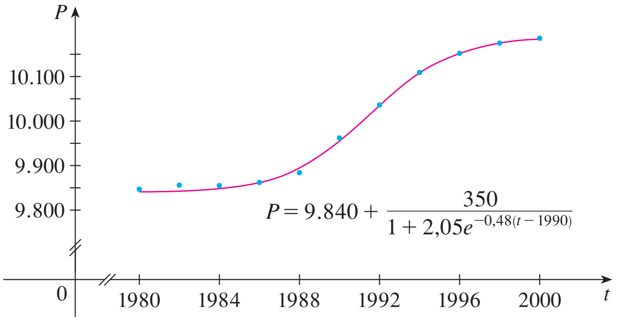


FIGURA 5
Modelo logístico para a população da Bélgica

Outros Modelos para o Crescimento Populacional

A Lei do Crescimento Natural e a equação diferencial logística não são as únicas equações propostas para modelar o crescimento populacional. No Exercício 20 veremos a função de crescimento de Gompertz e nos Exercícios 21 e 22 investigaremos os modelos de crescimento sazonal.

Dois dos outros modelos são modificações do modelo logístico. A equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

tem sido usada para modelar as populações que estão sujeitas à remoção de uma maneira ou de outra. (Pense em uma população de peixes que é capturada a uma taxa constante.) Essa Equação é explorada nos Exercícios 17 e 18.

Para algumas espécies existe um nível mínimo populacional m abaixo do qual as espécies tendem a se extinguir. (Os adultos podem não conseguir encontrar parceiros adequados.) Essas populações são modeladas pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

onde o fator extra, $1 - m/P$, leva em conta as consequências de uma população esparsa (veja o Exercício 19).

9.4 Exercícios

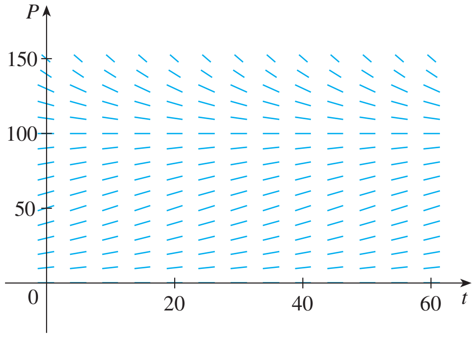
1. Suponha que uma população se desenvolva de acordo com a equação logística

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}05P - 0{,}0005P^2$$

onde t é medido em semanas.

(a) Qual é a capacidade de suporte? Qual é o valor de k?

(b) Um campo de direções para essa equação é mostrado à direita. Onde as inclinações estão próximas de 0? Onde elas são maiores? Quais soluções são crescentes? Quais soluções são decrescentes?



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(c) Use o campo de direções para esboçar as soluções para as populações iniciais de 20, 40, 60, 80, 120 e 140. O que essas soluções têm em comum? Como diferem? Quais soluções têm pontos de inflexão? Em qual nível populacional elas ocorrem?
(d) Quais são as soluções de equilíbrio? Como as outras soluções estão relacionadas a essas soluções?

2. Suponha que uma população cresça de acordo com o modelo logístico com capacidade de suporte 6.000 e $k = 0{,}0015$ por ano.
(a) Escreva uma equação diferencial logística para esses dados.
(b) Desenhe um campo de direções (à mão ou com um sistema de computação algébrica). O que ele lhe diz sobre as curvas solução?
(c) Use o campo de direções para esboçar as curvas solução para as populações iniciais de 1.000, 2.000, 4.000 e 8.000. O que você pode dizer sobre a concavidade dessas curvas? Qual o significado dos pontos de inflexão?
(d) Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler com passo $h = 1$ para estimar a população depois de 50 anos se a população inicial for 1.000.
(e) Se a população inicial for 1.000, escreva uma fórmula para a população depois de t anos. Use-a para calcular a população depois de 50 anos e compare com sua estimativa no item (d).
(f) Trace a solução da parte (e) e compare com a curva solução que você esboçou no item (c).

3. O cardume de atum do Pacífico foi modelado pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

onde $y(t)$ é a biomassa (massa total dos membros da população) em quilogramas no instante t (medido em anos), a capacidade de suporte é estimada como $M = 8 \times 10^7$ kg e $k = 0{,}71$ por ano.
(a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule a biomassa um ano depois.
(b) Quanto tempo levará para a biomassa alcançar 4×10^7 kg?

4. Suponha que uma população $P(t)$ satisfaça

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4P - 0{,}001\,P^2 \qquad P(0) = 50$$

onde t é medido em anos.
(a) Qual é a capacidade de suporte?
(b) O que é $P'(0)$?
(c) Quando a população atingirá 50% da capacidade de suporte?

5. Suponha que uma população cresça de acordo com o modelo logístico com população inicial de 1 000 e capacidade de suporte 1 000. Se a população crescer para 2 500 após um ano, como será a população após outros três anos?

6. A tabela fornece o número de células de levedura em uma cultura nova de laboratório.

Tempo (horas)	Células de levedura	Tempo (horas)	Células de levedura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) Marque os dados e use o gráfico para estimar a capacidade de suporte para a população de levedura.
(b) Use os dados para estimar a taxa de crescimento inicial relativa.
(c) Encontre um modelo exponencial e um modelo logístico para esses dados.
(d) Compare os valores previstos com os valores observados, na tabela e nos gráficos. Compare como seus modelos se ajustam aos dados.
(e) Utilize seu modelo logístico para estimar o número de células de levedura depois de sete horas.

7. A população mundial era de aproximadamente 5,3 bilhões em 1990. A taxa de natalidade na década de 1990 variou entre 35 e 40 milhões por ano, e a taxa de mortalidade variou entre 15 e 20 milhões por ano. Vamos supor que a capacidade de suporte para a população mundial seja de 100 bilhões.
(a) Escreva uma equação diferencial logística para esses dados. (Como a população inicial é pequena em comparação com a capacidade de suporte, você pode tomar k como uma estimativa da taxa de crescimento relativo inicial.)
(b) Utilize o modelo logístico para prever a população mundial em 2000 e compare a população real de 6,1 bilhões.
(c) Use o modelo logístico para prever a população mundial nos anos 2100 e 2500.
(d) Quais seriam as suas previsões se a capacidade de suporte fosse de 50 bilhões?

8. (a) Faça uma conjectura para a capacidade de suporte da população dos Estados Unidos. Use-a, e também o fato de que a população era de 250 milhões em 1990, para formular um modelo logístico para a população norte-americana.
(b) Determine o valor de k em seu modelo usando o fato de que a população norte-americana em 2000 era de 275 milhões.
(c) Use seu modelo para prever a população dos Estados Unidos nos anos 2100 e 2200.
(d) Utilize seu modelo para prever o ano no qual a população ultrapassará 350 milhões.

9. Um modelo para a propagação de um boato é que a taxa de propagação é proporcional ao produto da fração y da população que ouviu o boato pela fração que não ouviu o boato.
(a) Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y.
(b) Resolva a equação diferencial.
(c) Uma cidade pequena tem 1.000 habitantes. Às 8 horas, 80 pessoas tinham ouvido o boato. Ao meio-dia, metade da cidade tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?

10. Os biólogos colocaram em um lago 400 peixes e estimaram a capacidade de suporte (a população máxima de peixes daquela espécie no lago) como 10.000. O número de peixes triplicou no primeiro ano.
(a) Presumindo que o tamanho da população de peixes satisfaça a equação logística, encontre uma expressão para o tamanho da população depois de t anos.
(b) Quanto tempo levará para a população aumentar para 5 000?

11. (a) Mostre que se P satisfizer a equação logística $\boxed{4}$, então

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

(b) Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade de sua capacidade de suporte.

12 Para um valor fixo de M (digamos $M = 10$), a família de funções logísticas dada pela Equação 7 depende do valor inicial P_0 e da constante de proporcionalidade k. Faça o gráfico de vários membros dessa família. Como muda o gráfico quando P_0 varia? Como muda o gráfico quando k varia?

13. A tabela dá a população do Japão em meados do ano, em milhares, de 1960 a 2005.

Ano	População	Ano	População
1960	94.092	1985	120.754
1965	98.883	1990	123.537
1970	104.345	1995	125.341
1975	111.573	2000	126.700
1980	116.807	2005	127.417

Use uma calculadora gráfica para ajustar tanto uma função exponencial quanto uma função logística a estes dados. Marque os pontos, trace ambas as funções e comente a precisão dos modelos. [*Dica*: Subtraia 94.000 de cada uma das figuras da população. Então, depois de obter um modelo de sua calculadora, some 94.000 para obter seu modelo final. Pode ser útil escolher como 1960 ou 1980.]

14. A tabela fornece a população da Espanha em meados do ano, em milhares, de 1955 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1955	29.319	1980	37.488
1960	30.641	1985	38.535
1965	32.085	1990	39.351
1970	33.876	1995	39.750
1975	35.564	2000	40.016

Use uma calculadora gráfica para ajustar tanto uma função exponencial quanto uma função logística a estes dados. Marque os pontos, trace ambas as funções e comente a precisão dos modelos. [*Dica*: Subtraia 29.000 de cada uma das figuras da população. Então, depois de obter um modelo de sua calculadora, some 29.000 para obter seu modelo final. Pode ser útil escolher $t = 0$ como 1955 ou 1975.]

15. Considere a população $P = P(t)$ com taxas de natalidade e mortalidade relativas constantes α e β, respectivamente, e uma taxa de emigração constante m, onde α, β e m são constantes positivas. Suponha que $\alpha > \beta$. Então, a taxa de variação da população no instante t é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{onde } k = \alpha - \beta$$

(a) Encontre a solução desta equação que satisfaça a condição inicial $P(0) = P_0$.
(b) Que condições sobre m levarão a uma expansão exponencial da população?
(c) Que condições sobre m resultarão em uma população constante? E em um declínio da população?
(d) Em 1847, a população da Irlanda era de cerca de 8 milhões e a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade relativas era 1,6 % da população. Por causa da fome da batata nas décadas de 1840 e 1850, cerca de 210 000 habitantes por ano emigraram da Irlanda. A população estava crescendo ou decrescendo naquela época?

16. Seja c um número positivo. Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

onde k é uma constante positiva, é chamada *equação do dia do juízo final* porque o expoente na expressão ky^{1+c} é maior que o expoente 1 do crescimento natural.

(a) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = y_0$.
(b) Mostre que existe um instante finito $t = T$ (dia do juízo final) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.
(c) Uma raça especialmente fértil de coelhos tem o termo de crescimento $ky^{1,01}$. Se 2 destes coelhos se cruzarem inicialmente e a ninhada for de 16 coelhos depois de três meses, quando será o dia do juízo final?

17. Vamos modificar a equação logística do Exemplo 1 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) - 15$$

(a) Suponha que $P(t)$ represente uma população de peixes no instante t, onde t é medido em semanas. Explique o significado do termo final na equação (-15).
(b) Desenhe um campo de direções para essa equação diferencial.
(c) Quais são as soluções de equilíbrio?
(d) Use o campo de direções para esboçar várias curvas solução. Descreva o que acontece à população de peixes para várias populações iniciais.
SCA (e) Resolva essa equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou com um sistema de computacão algébrica. Use as populações iniciais 200 e 300. Trace as soluções e compare com seus esboços no item (d).

SCA **18.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right) - c$$

como um modelo para uma população de peixes, onde t é medido em semanas e c é uma constante.

(a) Use um SCA para desenhar campos de direções para diversos valores de c.
(b) A partir dos campos de direções no item (a), determine os valores de c para os quais há pelo menos uma solução de equilíbrio. Para quais valores de c a população de peixes sempre desaparece?
(c) Use a equação diferencial para demonstrar o que você descobriu graficamente no item (b).
(d) Qual sua recomendação para o limite de pesca semanal para essa população de peixes?

19. Existe evidência considerável para apoiar a teoria de que, para algumas espécies, existe uma população mínima m de forma que as espécies se tornarão extintas se o tamanho da população cair abaixo de m. Essa condição pode ser incorporada na equação logística ao introduzir o fator $(1 - m/P)$. Então o modelo logístico modificado é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < P < M$ e decrescente se $0 < P < m$.
(b) Para o caso onde $k = 0{,}08$, $M = 1\,000$ e $m = 200$, desenhe um campo de direções e use-o para esboçar várias curvas solução. Descreva o que acontece à população para várias populações iniciais. Quais são as soluções de equilíbrio?
(c) Resolva a equação diferencial explicitamente, usando frações parciais ou um sistema de computação algébrica. Use a população inicial P_0.
(d) Use a solução no item (c) para mostrar que se $P_0 < m$, então a espécie será extinta. [*Dica*: Mostre que o numerador em sua expressão para $P(t)$ é 0 para algum valor de t.]

20. Outro modelo para a função crescimento para uma população limitada é dado pela **função de Gompertz**, que é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

onde c é uma constante e M é a capacidade de suporte.

(a) Resolva essa equação diferencial.

(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

(c) Trace a função de crescimento de Gompertz para $M = 1\,000$, $P_0 = 100$ e $c = 0{,}05$, e compare-a com a função logística no Exemplo 2. Quais são as similaridades? Quais são as diferenças?

(d) Sabemos do Exercício 11 que a função logística cresce mais rapidamente quando $P = M/2$. Use a equação diferencial de Gompertz para mostrar que a função de Gompertz cresce mais rápido quando $P = M/e$.

21. Em **um modelo de crescimento sazonal**, uma função periódica do tempo é introduzida para considerar variações sazonais na taxa de crescimento. Essas variações podem, por exemplo, ser causadas por mudanças sazonais na oferta de alimentos.

(a) Encontre a solução do modelo de crescimento sazonal

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

onde k, r e ϕ são constantes positivas.

(b) Traçando a solução para vários valores de k, r e ϕ, explique como os valores de k, r e ϕ afetam a solução. O que você pode dizer sobre $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

22. Suponha que alteremos a equação diferencial no Exercício 21 como a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resolva essa equação diferencial com a ajuda de uma tabela de integrais ou um SCA.

(b) Trace a solução para vários valores de k, r e ϕ. Como os valores de k, r e ϕ afetam a solução? O que você pode dizer sobre $\lim_{t\to\infty} P(t)$ nesse caso?

23. Os gráficos das funções logísticas (Figuras 2 e 3) são extremamente similares ao gráfico da função tangente hiperbólica (Figura 3 na Seção 3.11). Explique a similaridade, mostrando que a função logística dada pela Equação 7 pode ser escrita como

$$P(t) = \tfrac{1}{2}K\left[1 + \operatorname{tgh}\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

onde $c = (\ln A)/k$. Portanto, a função logística é apenas uma tangente hiperbólica transladada.

9.5 Equações Lineares

Uma equação diferencial **linear** de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas em um dado intervalo. Esse tipo de equação ocorre frequentemente em vários ramos da ciência, como veremos.

Um exemplo de uma equação linear é $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, esta pode ser escrita na forma

$$\boxed{2} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Observe que essa equação diferencial não é separável, porque é impossível fatorar a expressão para y' como uma função de x vezes uma função de y. Mas ainda podemos resolver a equação observando que, pela Regra do Produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação como

$$(xy)' = 2x$$

Se integrarmos ambos os lados dessa equação, obteremos

$$xy = x^2 + C \qquad \text{ou} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Se nos tivesse sido dada a equação diferencial na forma da Equação 2, teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x.

Ocorre que toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida de uma maneira similar pela multiplicação de ambos os lados da Equação 1 por uma função adequada $I(x)$, chamada *fator integrante*. Tentamos encontrar I de modo que o lado esquerdo da Equação 1, quando multiplicado por $I(x)$, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \tag{3}$$

Se pudermos encontrar tal função I, a Equação 1 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)\,Q(x)$$

Integrando ambos os lados, teremos

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

de modo que a solução será

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right] \tag{4}$$

Para encontrarmos esse I, expandimos a Equação 3 e cancelamos termos:

$$I(x)y' + I(x)\,P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

Esta é uma equação separável para I, que resolvemos como a seguir:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

onde $A = \pm e^C$. Estamos procurando um fator de integração particular, não o mais geral; assim, tomamos $A = 1$ e usamos

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx} \tag{5}$$

Então, a fórmula para a solução geral da Equação 1 é fornecida pela Equação 4, onde I é dado pela Equação 5. Em vez de memorizar essa fórmula, contudo, apenas lembramos a forma do fator integrante.

> Para resolver a equação diferencial linear $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos os lados pelo **fator integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos os lados.

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUÇÃO A equação dada é linear porque ela tem a forma da Equação 1 com $P(x) = 3x^2$ e $Q(x) = 6x^2$. Um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{x^3}, obtemos

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Integrando ambos os lados teremos

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

A Figura 1 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções no Exemplo 1. Observe que todos eles se aproximam de 2 quando $x \to \infty$.

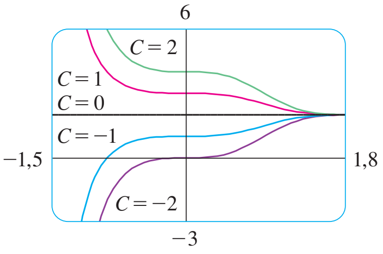


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUÇÃO Devemos primeiro dividir ambos os lados pelo coeficiente de y' para colocar a equação diferencial na forma padrão:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0 \tag{6}$$

O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

A multiplicação de ambos os lados da Equação 6 por x fornece

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Então,

$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

e, assim,

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Uma vez que $y(1) = 2$, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

A solução do problema de valor inicial no Exemplo 2 é mostrada na Figura 2.

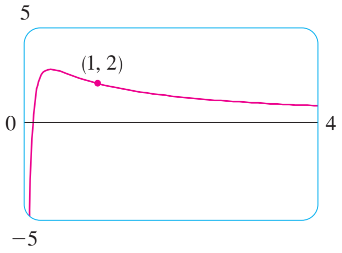


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Resolva $y' + 2xy = 1$.

SOLUÇÃO A equação dada está na forma padrão de uma equação linear. Multiplicando pelo fator integrante

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

obtemos ou

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

ou

$$\left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}$$

Portanto,

$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

Lembre-se, da Seção 7.5, que $\int e^{x^2}\,dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares. Apesar disso, é uma função perfeitamente boa e podemos deixar a resposta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Outra maneira de escrever a solução é

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Qualquer número pode ser escolhido para o extremo inferior de integração.)

Embora as soluções da equação diferencial no Exemplo 3 sejam expressas em termos de uma integral, elas ainda podem ser traçadas por um sistema de computação algébrica (Figura 3).

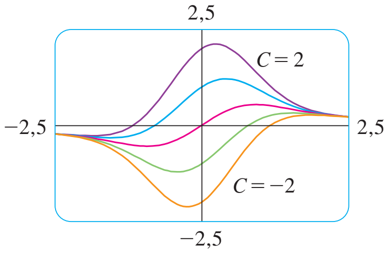


FIGURA 3

Aplicação a Circuitos Elétricos

Na Seção 9.2 consideramos o circuito elétrico simples, mostrado na Figura 4: uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms (Ω) e um indutor com indutância de L henrys (H).

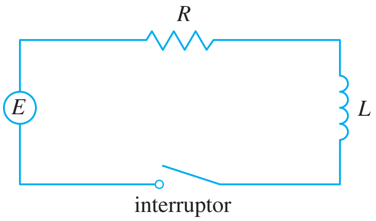


FIGURA 4

A Lei de Ohm calcula a queda na tensão devida ao resistor como RI. A queda da tensão por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das leis de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão é igual à voltagem fornecida $E(t)$. Então temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \tag{7}$$

EXEMPLO 4 Suponha que no circuito simples da Figura 4 a resistência seja 12 Ω e a indutância seja 4 H. Se uma pilha fornecer uma voltagem constante de 60 V e o interruptor for fechado quando $t = 0$, então a corrente começa com $I(0) = 0$. Encontre (a) $I(t)$, (b) a corrente depois de 1 s e (c) o valor-limite da corrente.

A equação diferencial no Exemplo 4 é linear e separável; assim, um método alternativo é resolvê-la como uma equação separável (Exemplo 4 na Seção 9.3). Se trocarmos a pilha por um gerador, contudo, obteremos uma equação que é linear, mas não é separável (Exemplo 5).

SOLUÇÃO

(a) Se colocarmos $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$ na Equação 7, obteremos o problema de valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

ou

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Multiplicando pelo fator integrante $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, obtemos

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos $5 + C = 0$, assim, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

A Figura 5 mostra como a corrente no Exemplo 4 se aproxima de seu valor-limite.

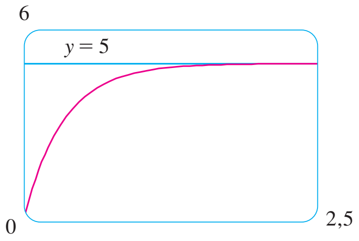


FIGURA 5

(b) Depois de um segundo a corrente é

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4{,}75 \text{ A}$$

(c) O valor-limite da corrente é dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

EXEMPLO 5 Suponha que a resistência e a indutância permaneçam as mesmas que no Exemplo 4, mas, em vez de uma pilha, usaremos um gerador que produz uma voltagem variável de $E(t) = 60 \text{ sen } 30t$ volts. Encontre $I(t)$.

SOLUÇÃO Desta vez a equação diferencial torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \text{ sen } 30t \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \text{ sen } 30t$$

O mesmo fator integrante e^{3t} fornece

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \text{ sen } 30t$$

Usando a Fórmula 98 da Tabela de Integrais, obtemos

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,\text{sen}\,30t\,dt = 15\,\frac{e^{3t}}{909}(3\,\text{sen}\,30t - 30\cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\text{sen}\,30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

então $$I(t) = \tfrac{5}{101}(\text{sen}\,30t - 10\cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$

A Figura 6 mostra o gráfico da corrente quando a pilha é trocada por um gerador.

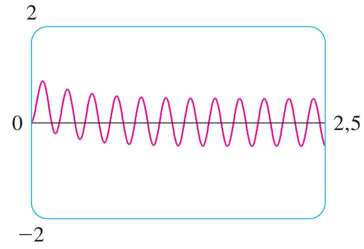


FIGURA 6

9.5 Exercícios

1–4 Determine se a equação diferencial é linear.

1. $x - y' = xy$

2. $y' + xy^2 = \sqrt{x}$

3. $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

4. $y\,\text{sen}\,x = x^2y' - x$

5–14 Resolva a equação diferencial.

5. $xy' - 2y = x^2$

6. $y' = x + 5y$

7. $y' = x - y$

8. $4x^3y + x^4y' = \text{sen}^3x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \text{sen}(e^x)$

11. $\text{sen}\,x\,\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \text{sen}(x^2)$

12. $x\,\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t\ln t\,\dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15–20 Resolva o problema de valor inicial.

15. $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$

16. $t^3\dfrac{dy}{dt} + 3t^2y = \cos t, \quad y(\pi) = 0$

17. $t\,\dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2\,\text{sen}\,x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21–22 Resolva a equação diferencial e use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar vários membros da família de soluções. Como a curva solução muda quando C varia?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $xy' = x^2 + 2y$

23 Uma **equação diferencial de Bernoulli** (em homenagem a James Bernoulli) é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, se $n = 0$ ou 1, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24–25 Use o método do Exercício 23 para resolver a equação diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. Resolva a equação de segunda ordem $xy'' + 2y' = 12x^2$ por meio da substituição $u = y'$.

27. No circuito apresentado na Figura 4, uma pilha fornece uma voltagem constante de 40 V, a indutância é 2 H, a resistência é 10 Ω e $I(0) = 0$.

(a) Encontre $I(t)$.

(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.

28. No circuito mostrado na Figura 4, um gerador fornece uma voltagem de $E(t) = 40\,\text{sen}\,60t$ volts, a indutância é 1 H, a resistência é 20 Ω e $I(0) = 1$ A.

(a) Encontre $I(t)$.

(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.

(c) Use uma ferramenta gráfica para desenhar o gráfico da função corrente.

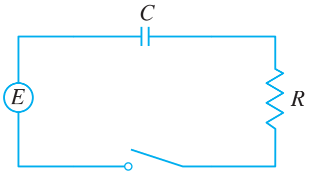
29. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R de ohms (Ω). A queda de voltagem no capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas $I = dQ/dt$ (veja o Exemplo 3, na Seção 3.7), assim, temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência seja 5 Ω e a capacitância, 0,05 F; que a pilha forneça uma voltagem constante de 60 V e que a carga inicial seja $Q(0) = 0$ C. Encontre a carga e a corrente no instante t.



30. No circuito do Exercício 29, $R = 2\ \Omega$, $C = 0{,}01$ F, $Q(0) = 0$ e $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Calcule a carga e a corrente no instante t.

31. Seja $P(t)$ o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. O gráfico de P é chamado *curva de aprendizagem*. No Exercício 15 na Seção 9.1 propusemos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como um modelo razoável para a aprendizagem, onde k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial linear e use sua solução para traçar a curva de aprendizagem.

32. Dois novos trabalhadores foram contratados para uma linha de montagem. João processou 25 unidades durante a primeira hora e 45 unidades durante a segunda. Marcos processou 35 unidades durante a primeira hora e 50 unidades na segunda. Usando o modelo do Exercício 31 e assumindo que $P(0) = 0$, estime o número máximo de unidades por hora que cada trabalhador é capaz de processar.

33. Na Seção 9.3 analisamos os problemas de misturas nos quais o volume de fluido permanecia constante e vimos que estes fornecem equações separáveis (veja o Exemplo 6 naquela seção). Se as taxas de entrada e de saída do sistema forem diferentes, então o volume não é constante e a equação diferencial resultante é linear, mas não separável.

Um tanque contém 100 L de água. Uma solução com uma concentração salina de 0,4 kg/L é adicionada à taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de 3 L/min. Se $y(t)$ é a quantidade de sal (quilogramas) após t minutos, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resolva essa equação e calcule a concentração depois de 20 minutos.

34. Um tanque com capacidade de 400 L está cheio com uma mistura de água e cloro com concentração de 0,05 g de cloro por litro. Para poder reduzir a concentração de cloro, água doce é bombeada para o tanque na taxa de 4 L/s. A mistura é agitada e bombeada para fora em uma taxa de 10 L/s. Encontre a quantidade de cloro no tanque como uma função de tempo.

35. Um objeto de massa m é solto a partir do repouso e presumimos que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do objeto. Se $s(t)$ for a distância percorrida depois de t segundos, então a velocidade é $v = s'(t)$ e a aceleração é $a = v'(t)$. Se g for a aceleração da gravidade, então a força para baixo no objeto é $mg - cv$, onde c é uma constante positiva, e a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resolva essa equação linear para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$$

(b) Qual é a velocidade-limite?

(c) Calcule a distância que o objeto caiu depois de t segundos.

36. Se ignorarmos a resistência do ar, poderemos concluir que os objetos mais pesados não caem mais rápido que objetos mais leves. Mas, se considerarmos a resistência do ar, nossa conclusão muda. Use a expressão para a velocidade de queda de um objeto no Exercício 35(a) para calcular dv/dm e mostrar que os objetos mais pesados caem mais rápido que os mais leves.

37. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação diferencial logística $P' = kP(1 - P/M)$ na equação diferencial linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

(b) Resolva a equação diferencial no item (a) para encontrar uma expressão para $P(t)$. Compare com a Equação 9.4.7.

38. Para considerarmos a variação sazonal na equação diferencial podemos permitir que k e M sejam as funções de t:

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{M(t)}\right)$$

(a) Verifique se a substituição $z = 1/P$ transforma essa equação na equação linear

$$\frac{dz}{dt} + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}$$

(b) Escreva uma expressão para a solução da equação linear no item (a) e use-a para mostrar que se a capacidade de suporte M for constante, então

$$P(t) = \frac{M}{1 + CMe^{-\int k(t)\,dt}}$$

Deduza que se $\int_0^\infty k(t)\,dt = \infty$, então $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$. [Isso será comprovado se $k(t) = k_0 + a\cos bt$ com $k_0 > 0$, que descreve uma taxa de crescimento intrínseco positiva com uma variação sazonal periódica.]

(c) Se k é constante, mas M varia, mostre que

$$z(t) = e^{-kt}\int_0^t \frac{ke^{ks}}{M(s)}\,ds + Ce^{-kt}$$

e utilize a Regra de l'Hôspital para decidir que se $M(t)$ tem um limite quando $t \to \infty$, então $P(t)$ tem o mesmo limite.

9.6 Sistemas Predador-Presa

Consideramos diversos modelos para o crescimento de uma única espécie que vive sozinha em um ambiente. Nesta seção estudaremos os modelos mais realistas, que levam em consideração a interação de duas espécies no mesmo ambiente. Veremos que esses modelos tomam a forma de um par de equações diferenciais acopladas.

Primeiro levaremos em conta a situação na qual uma espécie, chamada *presa*, tem um amplo suprimento alimentar e a segunda espécie, denominada *predador*, se alimenta da presa. Exemplos de presa e predador incluem coelhos e lobos em uma floresta isolada, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas e bactérias e amebas. Nosso modelo terá duas variáveis dependentes e ambas serão funções do tempo. Seja $C(t)$ o número de presas (usando C de coelhos) e $L(t)$ o número de predadores (com L de lobos) no instante t.

Na ausência de predadores, o amplo suprimento de alimentos suportaria o crescimento exponencial de presas, isto é,

$$\frac{dC}{dt} = kC \qquad \text{onde } k \text{ é uma constante positiva}$$

Na ausência de presas, assumimos que a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é,

$$\frac{dL}{dt} = -rL \qquad \text{onde } r \text{ é uma constante positiva}$$

Com ambas as espécies presentes, contudo, supomos que a causa principal de morte entre as presas seja serem comidas por predadores, e as taxas de natalidade e sobrevivência dos predadores dependam da disponibilidade de comida, ou seja, as presas. Também supomos que as duas espécies se encontrem a uma taxa que é proporcional a ambas as populações e é, portanto, proporcional ao produto CL. (Quanto mais houver de cada população, mais encontros serão possíveis.) Um sistema de duas equações diferenciais que incorpora essas hipóteses é como a seguir:

$$\boxed{1} \qquad \frac{dC}{dt} = kC - aCL \qquad \frac{dL}{dt} = -rL + bCL$$

L representa o predador.
C representa a presa.

onde k, r, a e b são constantes positivas. Observe que o termo $-aCL$ diminui a taxa natural de crescimento das presas e o termo bCL aumenta a taxa de crescimento natural dos predadores.

As equações em $\boxed{1}$ são conhecidas como **equações predador-presa**, ou **equações de Lotka-Volterra**. Uma **solução** desse sistema de equações é um par de funções $C(t)$ e $L(t)$, que descreve as populações de presas e predadores como funções do tempo. Como o sistema é acoplado (C e L ocorrem em ambas as equações), não podemos resolver uma equação e depois a outra: temos de resolvê-las de maneira simultânea. Infelizmente, porém, em geral é impossível encontrar fórmulas explícitas para C e L como funções de t. Podemos, contudo, usar métodos gráficos para analisar as equações.

As equações de Lotka-Volterra foram propostas como um modelo para explicar as variações de tubarões e peixes no mar Adriático pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940).

EXEMPLO 1 Suponha que as populações de coelhos e lobos sejam descritas pelas equações de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ com $k = 0{,}08$, $a = 0{,}001$, $r = 0{,}02$ e $b = 0{,}00002$. O tempo t é medido em meses.

(a) Encontre as soluções constantes (chamadas **soluções de equilíbrio**) e interprete a resposta.

(b) Use o sistema de equações diferenciais para encontrar uma expressão para dL/dC.

(c) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial resultante no plano CL. Então, use o campo de direções para esboçar algumas curvas solução.

(d) Suponha que, em algum instante no tempo, existam 1 000 coelhos e 40 lobos. Desenhe a curva solução correspondente e use-a para descrever as mudanças em ambos os níveis de população.

(e) Use a parte (d) para fazer esboços de C e L como funções de t.

SOLUÇÃO

(a) Com os valores dados de k, a, r e b, as equações de Lotka-Volterra se tornam

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08R - 0.001CL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0{,}02L + 0{,}00002CL$$

Tanto C e L serão constantes se ambas as derivadas forem 0, isto é,

$$C' = C(0{,}08 - 0{,}001L) = 0$$
$$L' = L(-0{,}02 + 0{,}00002C) = 0$$

Uma solução é dada por $C = 0$ e $L = 0$. (Isso faz sentido: se não existirem coelhos ou lobos, as populações não vão aumentar.) A outra solução constante é

$$L = \frac{0{,}08}{0{,}001} = 80 \qquad C = \frac{0{,}02}{0{,}00002} = 1\,000$$

Assim, as populações de equilíbrio consistem em 80 lobos e 1.000 coelhos. Isso significa que 1.000 coelhos são o suficiente para suportar uma população constante de 80 lobos. Não existem muitos lobos (o que resultaria em menos coelhos) nem poucos lobos (o que resultaria em mais coelhos).

(b) Usamos a Regra da Cadeia para eliminar t:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dC}\frac{dC}{dt}$$

Então
$$\frac{dL}{dR} = \frac{\dfrac{dL}{dt}}{\dfrac{dC}{dt}} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

(c) Se pensarmos em L como uma função de C, teremos a equação diferencial

$$\frac{dL}{dC} = \frac{-0{,}02L + 0{,}00002CL}{0{,}08C - 0{,}001CL}$$

Desenhamos o campo de direções para essa equação diferencial na Figura 1 e o usamos para esboçar várias curvas solução na Figura 2. Se nos movermos ao longo de uma curva solução, veremos como a relação entre C e L muda com o passar do tempo. Observe que as curvas parecem ser fechadas no sentido de que, se viajamos ao longo de uma curva, sempre retornamos ao mesmo ponto. Observe também que o ponto (1 000, 80) está dentro de todas as curvas solução. Esse ponto é denominado *ponto de equilíbrio*, porque corresponde à solução de equilíbrio $C = 1\ 000$, $L = 80$.

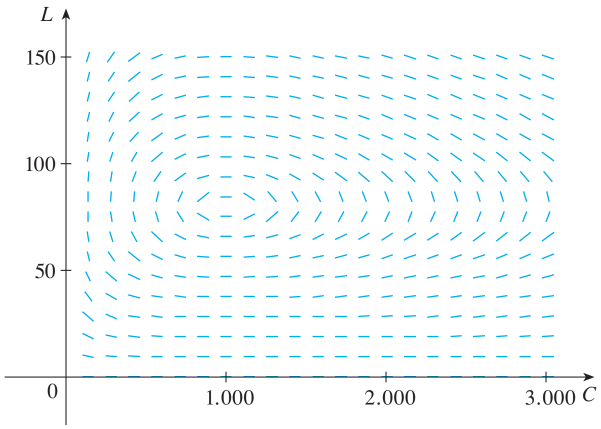


FIGURA 1 Campo de direções para o sistema predador-presa

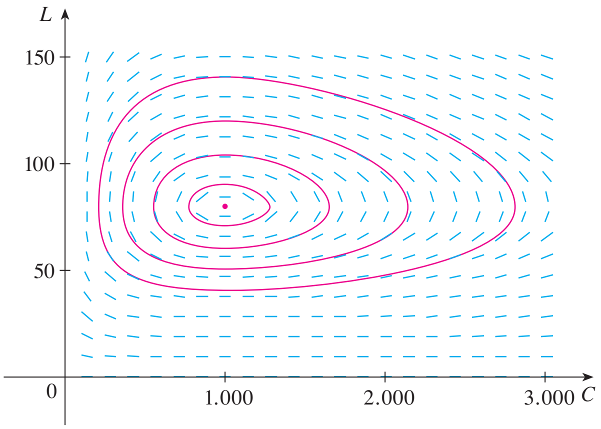


FIGURA 2 Retrato de fase do sistema

Quando representamos as soluções de um sistema de equações diferenciais como na Figura 2, referimo-nos ao plano CL como o **plano de fase** e chamamos as curvas solução de **trajetórias de fase**. Assim, uma trajetória de fase é um caminho traçado pelas soluções (C, L) com o passar do tempo. Um **retrato de fase** consiste em pontos de equilíbrio e trajetórias de fase típicas, como mostrado na Figura 2.

(d) Começar com 1 000 coelhos e 40 lobos corresponde a desenhar a curva solução no ponto $P_0(1\,000, 40)$. A Figura 3 mostra essa trajetória de fase com o campo de direções removido. Começando no instante P_0 no tempo $t = 0$ e deixando t aumentar, movemo-nos no sentido horário ou no anti-horário ao redor da trajetória de fase? Se colocarmos $C = 1\,000$ e $L = 40$ na primeira equação diferencial, teremos

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}08(1\,000) - 0{,}001(1\,000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Como $dC/dt > 0$, concluímos que C está aumentando em P_0 e assim nos movemos no sentido anti-horário ao longo da trajetória de fase.

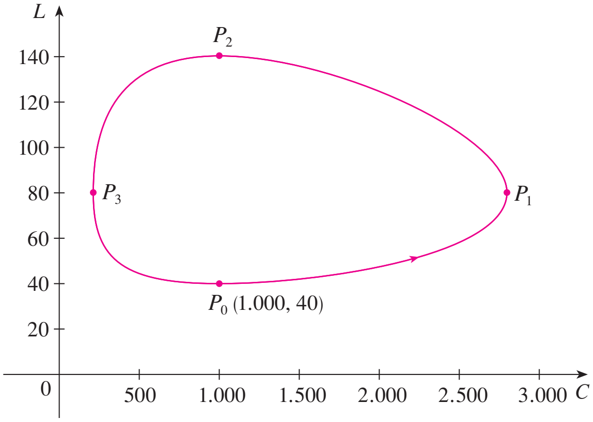


FIGURA 3
Trajetória da fase em (1.000, 40)

Vemos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; dessa forma, a população de coelhos aumenta. Isso resulta em mais lobos e eventualmente existem tantos lobos que os coelhos têm dificuldade para evitá-los. Assim, o número de coelhos começa a declinar (em P_1, onde estimamos que C atinja a população máxima ao redor de 2.800). Isso significa que algum tempo depois a população de lobos começa a cair (em P_2, onde $C = 1\,000$ e $L \approx 140$). Mas isso beneficia os coelhos; portanto, sua população depois começa a aumentar (em P_3, onde $L = 80$ e $C \approx 210$). Como consequência, a população de lobos eventualmente começa a aumentar também. Isso acontece quando as populações retornam a seus valores iniciais de $C = 1\,000$ e $L = 40$ e o ciclo inteiro começa novamente.

(e) Da descrição no item (d) de como as populações de coelhos e lobos aumentam e diminuem, podemos esboçar os gráficos de $C(t)$ e $L(t)$. Suponha que os pontos P_1, P_2 e P_3 na Figura 3 sejam alcançados nos instantes t_1, t_2 e t_3. Então podemos esboçar os gráficos de C e L como na Figura 4.

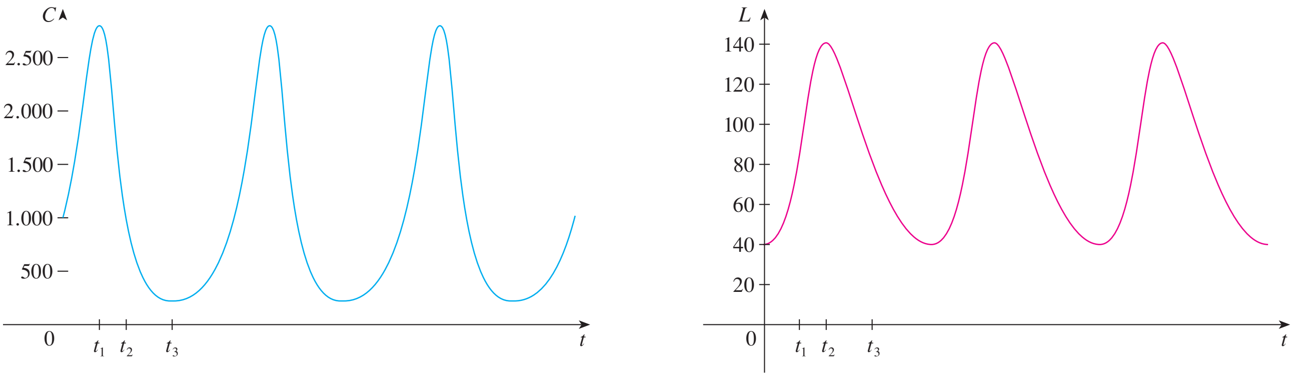


FIGURA 4 Gráficos das populações de coelhos e lobos como função do tempo

TEC No *Module 9.6* você pode alterar os coeficientes nas equações de Lotka-Volterra e observar as mudanças resultantes na trajetória de fase e nos gráficos das populações de coelhos e lobos.

Para tornarmos os gráficos mais fáceis de comparar, os desenhamos nos mesmos eixos, mas com escalas diferentes para C e L, como na Figura 5. Observe que os coelhos atingem sua população máxima cerca de um quarto de ciclo antes dos lobos.

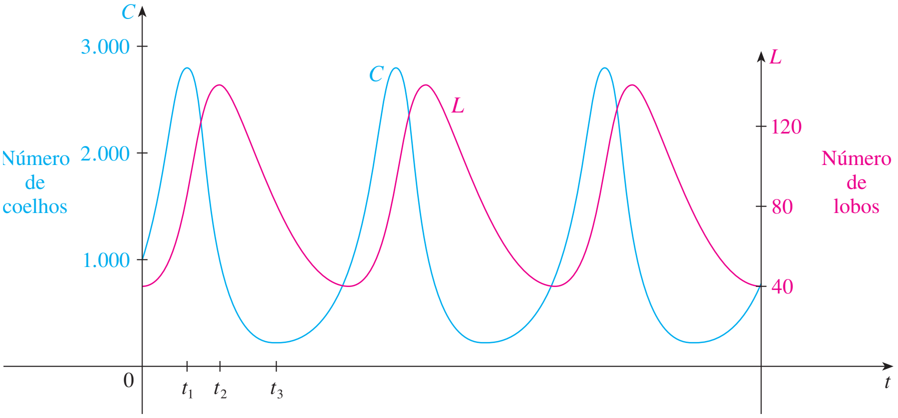


FIGURA 5
Comparações das populações de coelhos e lobos

Uma parte importante do processo de modelagem, como discutimos na Seção 1.2, é interpretar nossas conclusões matemáticas como previsões do mundo real e testar as previsões com dados reais. A Hudson's Bay Company, que começou a comercializar peles de animais no Canadá em 1670, mantém registros que datam de 1840. A Figura 6 mostra os gráficos do número de peles de coelho e seu predador, o lobo canadense, comercializadas pela empresa há 90 anos. Você pode ver que as oscilações acopladas na população de lebres e linces, prevista pelo modelo de Lotka-Volterra, realmente ocorrem e o período desses ciclos é de aproximadamente dez anos.

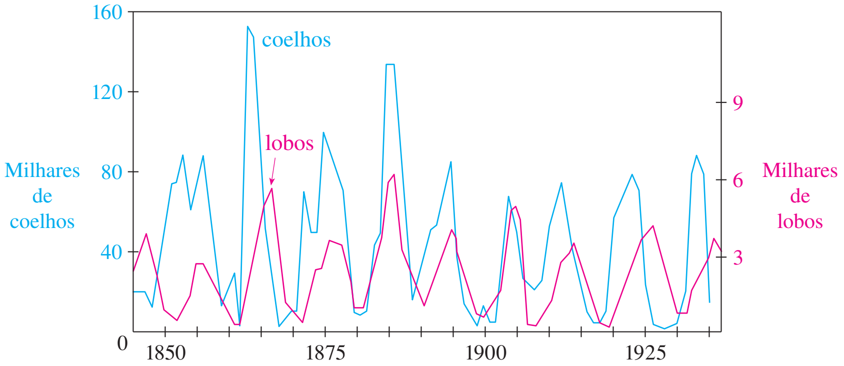


FIGURA 6
A abundância relativa de coelhos e lobos dos registros da Hudson's Bay Company

Embora o modelo relativamente simples de Lotka-Volterra tivesse algum sucesso em explicar e prever as populações acopladas, modelos mais sofisticados também têm sido propostos. Uma maneira de modificar as equações de Lotka-Volterra é supor que, na ausência de predadores, a presa cresça de acordo com um modelo logístico com capacidade de suporte M. Então as equações de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ são substituídas pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{dC}{dt} = kC\left(1 - \frac{C}{M}\right) - aCL \qquad \frac{dL}{dt} = -rL + bCL$$

Esse modelo é investigado nos Exercícios 11 e 12.

Também têm sido propostos modelos para descrever e prever níveis de população de duas espécies que competem pelos mesmos recursos ou cooperam por benefícios mútuos. Esses modelos serão explorados nos Exercícios 2–4.

9.6 Exercícios

1. Para cada sistema predador-presa, determine qual das variáveis, x ou y, representa a população de presas e qual representa a população de predadores. O crescimento das presas é restrito apenas pelos predadores ou por outros fatores também? Os predadores alimentam-se apenas das presas ou eles têm outras fontes de alimentação? Explique.

(a) $$\frac{dx}{dt} = -0{,}05x + 0{,}0001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}1y - 0{,}005xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = 0{,}2x - 0{,}0002x^2 - 0{,}006xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}015y + 0{,}00008xy$$

2. Cada sistema de equações diferenciais é um modelo para duas espécies que competem pelas mesmas fontes ou cooperam por mútuo benefício (plantas em floração e insetos polinizadores, por exemplo). Decida se cada sistema descreve competição ou cooperação e explique por que este é um modelo razoável. (Pergunte-se qual é o efeito que o aumento de uma das espécies tem na taxa de crescimento da outra.)

(a) $$\frac{dx}{dt} = 0{,}12x - 0{,}0006x^2 + 0{,}00001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}08x + 0{,}00004xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = 0{,}15x - 0{,}0002x^2 - 0{,}0006xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}2y - 0{,}00008y^2 - 0{,}0002xy$$

3. O sistema de equações diferenciais
$$\frac{dx}{dt} = 0{,}5x - 0{,}0004x^2 - 0{,}001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}4y - 0{,}001y^2 - 0{,}002xy$$

é um modelo para as populações de duas espécies.

(a) O modelo descreve cooperação, ou competição, ou uma relação predador-presa?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

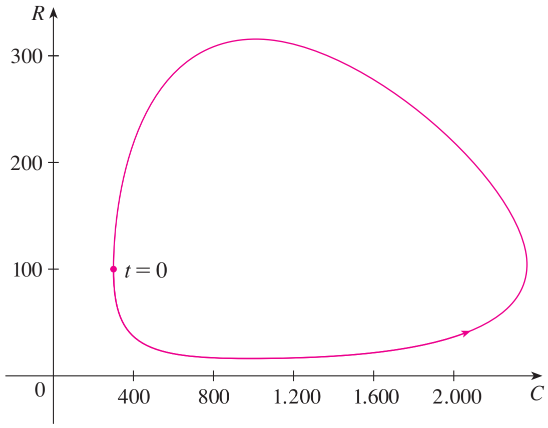
4. Moscas, sapos e crocodilos coexistem em um ambiente. Para sobreviver, os sapos precisam comer as moscas e os crocodilos precisam comer os sapos. Na ausência de sapos, a população de moscas crescerá exponencialmente e a população de crocodilos diminuirá exponencialmente. Na ausência de crocodilos e moscas, a população de sapos diminuirá exponencialmente. Se $P(t)$, $Q(t)$ e $R(t)$ representam as populações dessas três espécies no instante t, escreva um sistema de equações diferenciais como um modelo para sua evolução. Se as constantes em sua equação são positivas, explique por que você usou sinais de mais ou de menos.

5–6 Uma trajetória de fase é mostrada para as populações de coelhos (C) e raposas (R).

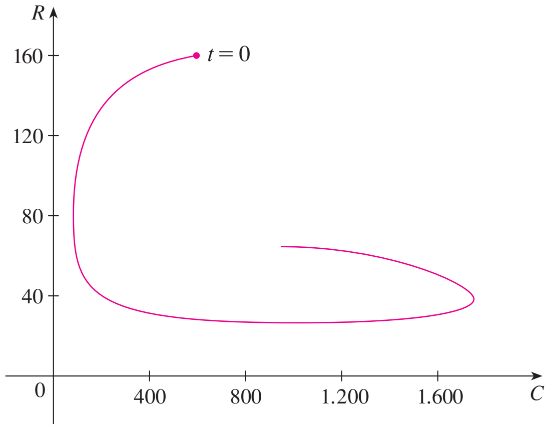
(a) Descreva como cada população muda com o passar do tempo.

(b) Use sua descrição para fazer um esboço grosseiro dos gráficos de C e R como funções do tempo.

5.

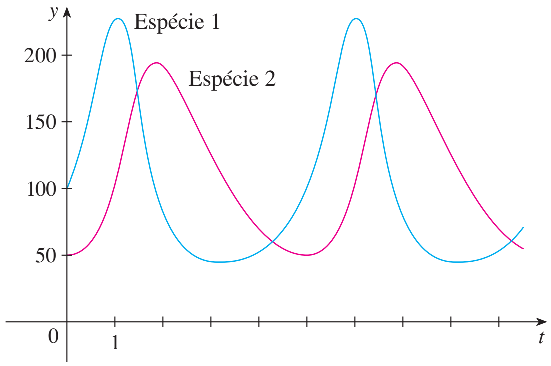


6.

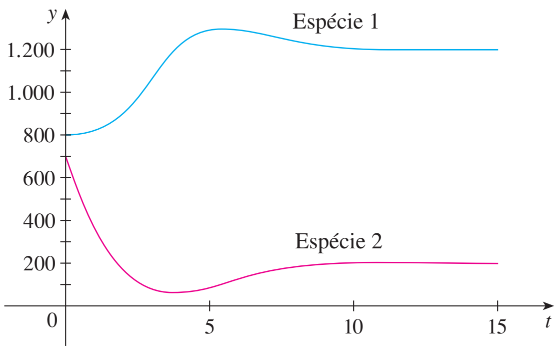


7–8 Os gráficos de populações de duas espécies são ilustrados. Use-os para esboçar a trajetória de fase correspondente.

7.



8.



9. No Exemplo 1(b) mostramos que as populações de coelhos e lobos satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dL}{dC}=\frac{-0{,}02L+0{,}00002CL}{0{,}08C-0{,}001CL}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, mostre que

$$\frac{C^{0{,}02}L^{0{,}08}}{e^{0{,}00002C}e^{0{,}001L}}=C$$

onde C é uma constante.

É impossível resolver essa equação para L como uma função explícita de C (ou vice-versa). Se você tiver um sistema de computação algébrica que trace curvas definidas implicitamente, use essa equação e seu SCA para desenhar a curva solução que passa pelo ponto (1 000, 40) e compare com a Figura 3.

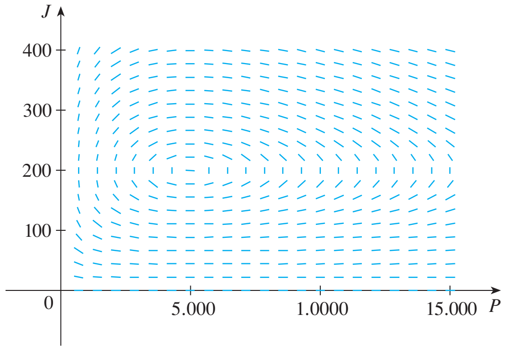
10. As populações de pulgões e joaninhas são modeladas pelas equações

$$\frac{dP}{dt}=2P-0{,}01PJ$$
$$\frac{dJ}{dt}=-0{,}5J+0{,}0001PJ$$

(a) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(b) Encontre uma expressão para dJ/dP.

(c) O campo de direções para a equação diferencial no item (b) é mostrado. Use-o para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?



(d) Suponha que no instante $t = 0$ existam 1 000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como ambas as populações variam.

(e) Use o item (d) para fazer esboços das populações de pulgões e joaninhas como funções de t. De que modo esses gráficos estão relacionados?

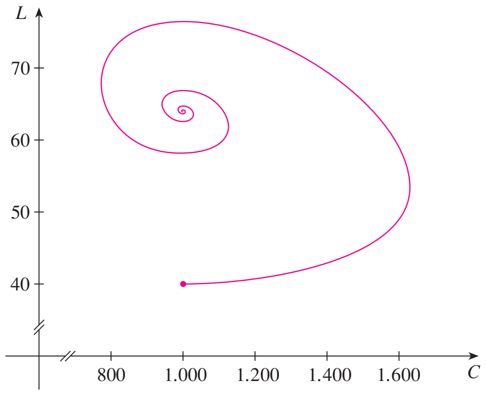
11 No Exemplo 1 usamos as equações de Lotka-Volterra para modelar as populações de coelhos e lobos. Vamos modificar aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dC}{dt}=0{,}08C(1-0{,}0002C)-0{,}001CL$$
$$\frac{dL}{dt}=-0{,}02L+0{,}00002CL$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de coelhos na ausência dos lobos?

(b) Calcule as soluções de equilíbrio e explique seus significados.

(c) A figura mostra a trajetória de fase que começa no ponto (1 000, 40). Descreva o que acabará ocorrendo com as populações de coelhos e lobos.



(d) Esboce os gráficos das populações de coelhos e lobos como funções do tempo.

SCA **12.** No Exercício 10, modelamos populações de pulgões e joaninhas com um sistema Lotka-Volterra. Suponha que modifiquemos aquelas equações como a seguir:

$$\frac{dP}{dt}=2P(1-0{,}0001P)-0{,}01PJ$$

$$\frac{dJ}{dt}=-0{,}5J+0{,}0001PJ$$

(a) Na ausência de joaninhas, o que o modelo prevê sobre os pulgões?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio.

(c) Encontre uma expressão para dJ/dP.

(d) Use um sistema de computação algébrica para desenhar um campo de direções para a equação diferencial no item (c). Então, use o campo de direções para esboçar um retrato de fase. O que as trajetórias de fase têm em comum?

(e) Suponha que no instante $t = 0$ existam 1.000 pulgões e 200 joaninhas. Desenhe a trajetória de fase correspondente e use-a para descrever como ambas as populações variam.

(f) Use o item (e) para fazer esboços das populações de pulgões e joaninhas como funções de t. De que modo esses gráficos estão relacionados?

9 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma equação diferencial?
  (b) O que é a ordem de uma equação diferencial?
  (c) O que é uma condição inicial?

2. O que você pode dizer sobre as soluções da equação $y' = x^2 + y^2$ apenas olhando para a equação diferencial?

3. O que é um campo de direções para a equação diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique como o método de Euler funciona.

5 O que é uma equação diferencial separável? Como você a resolve?

6. O que é uma equação diferencial linear de primeira ordem? Como você a resolve?

7. (a) Escreva a equação diferencial que expresse a lei de crescimento natural. O que ela diz em termos da taxa de crescimento relativo?
  (b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?
  (c) Quais são as soluções dessa equação?

8. (a) Escreva a equação logística.
  (b) Sob quais circunstâncias este é um modelo apropriado para o crescimento populacional?

9. (a) Escreva equações de Lotka-Volterra para modelar populações de peixes (P) e tubarões (T).
  (b) O que essas equações dizem sobre cada população na ausência da outra?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Todas as soluções da equação diferencial $y' = -1 - y^4$ são funções decrescentes.

2. A função $f(x) = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

3. A equação $y' = x + y$ é separável.

4. A equação $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ é separável.

5. A equação $e^x y' = y$ é linear.

6. A equação $y' + xy = e^y$ é linear.

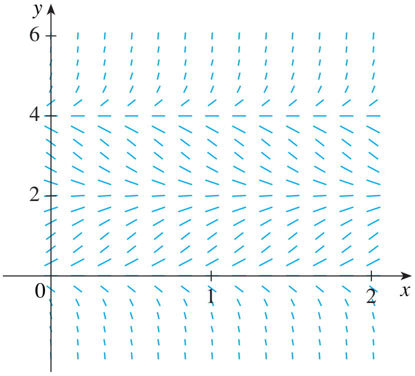
7. Se y for a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

então $\lim_{t\to\infty} y = 5$.

Exercícios

1. (a) Um campo de direções para a equação diferencial $y' = y(y - 2)(y - 4)$ é mostrado. Esboce os gráficos das soluções que satisfazem as condições iniciais dadas.
  (i) $y(0) = -0{,}3$ (ii) $y(0) = 1$
  (iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4{,}3$
  (b) Se a condição inicial for $y(0) = c$, para quais valores de c o $\lim_{t\to\infty} y(t)$ é finito? Quais são as soluções de equilíbrio?

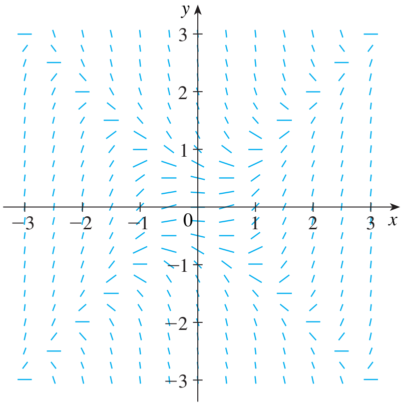


2. (a) Esboce um campo de direções para a equação diferencial $y' = x/y$. Então, use-o para esboçar as quatro soluções que satisfazem as condições iniciais $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ e $y(-2) = 1$.
  (b) Verifique seu trabalho no item (a) resolvendo a equação diferencial explicitamente. Que tipo de curva é cada curva solução?

3. (a) Um campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 - y^2$ é mostrado. Esboce a solução do problema de valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Use seu gráfico para estimar o valor de $y(0{,}3)$.



(b) Use o método de Euler com passo 0,1 para estimar $y(0{,}3)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial no item (a). Compare com sua estimativa da parte (a).

(c) Em que retas estão localizados os centros dos segmentos de reta horizontais do campo de direções da parte (a)? O que acontece quando uma curva solução intercepta essas retas?

4. (a) Use o método de Euler com o passo 0,2 para estimar $y(0{,}4)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

(b) Repita a parte (a) com passo 0,1.

(c) Encontre a solução exata da equação diferencial e compare com o valor em 0,4 com as aproximações nas partes (a) e (b).

5–8 Resolva a equação diferencial.

5. $y' = xe^{-\operatorname{sen} x} - y\cos x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

7. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$

8. $x^2y' - y = 2x^3\, e^{-1/x}$

9–11 Resolva o problema de valor inicial.

9. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r \qquad r(0) = 5$

10. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x \qquad y(0) = 0$

11. $xy' - y = x\ln x, \qquad y(1) = 2$

---

12. Resolva o problema de valor inicial $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$ e trace a solução.

13–14 Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas.

13. $y = ke^x$

14. $y = e^{kx}$

---

15. (a) Escreva a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}1P\left(1 - \frac{P}{2\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população quando $t = 20$.

(b) Quando a população atinge 1 200?

16. (a) A população mundial era de 5,28 bilhões em 1990 e 6,07 bilhões em 2000. Encontre um modelo exponencial para esses dados e use-o para prever a população mundial no ano 2020.

(b) De acordo com o modelo no item (a), quando a população mundial excederá 10 bilhões?

(c) Use os dados no item (a) para encontrar um modelo logístico para a população. Considere uma capacidade de suporte de 100 bilhões. Então use o modelo logístico para prever a população em 2020.

Compare com sua previsão do modelo exponencial.

(d) De acordo com o modelo logístico, quando a população mundial excederá 10 bilhões? Compare com suas previsões no item (b).

17. O modelo de crescimento de Von Bertalanffy é usado para prever o comprimento $L(t)$ de um peixe em um período de tempo. Se L_∞ for o maior comprimento para uma espécie, então a hipótese é que a taxa de crescimento do comprimento seja proporcional a $L_\infty - L$, o comprimento que o peixe ainda pode crescer.

(a) Formule e resolva uma equação diferencial para encontrar uma expressão para $L(t)$.

(b) Para o hadoque do Mar do Norte foi determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm e a constante de proporcionalidade é 0,2. Em que a expressão para $L(t)$ torna-se com esses dados?

18. Um tanque contém 100 L de água pura. Água salgada contendo 0,1 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é agitada e retirada do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque depois de seis minutos?

19. Um modelo para a propagação de uma epidemia é que a taxa de propagação é proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas não infectadas. Em uma cidade isolada de 5 000 habitantes, 160 pessoas têm uma doença no começo da semana e 1.200, no fim da semana. Quanto tempo levará para 80% da população se contaminar?

20. A Lei de Brentano-Stevens em psicologia modela a maneira como um objeto de estudo reage a um estímulo. Ela estabelece que, se R representar a reação à quantidade S de estímulo, então as taxas relativas de aumento são proporcionais:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

onde k é uma constante positiva. Encontre R como uma função de S.

21. O transporte de uma substância através de uma parede capilar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k + h}\right)$$

onde h é a concentração de hormônio na corrente sanguínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume do capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma relação entre h e t.

22 As populações de pássaros e insetos são modeladas pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x - 0{,}002xy$$

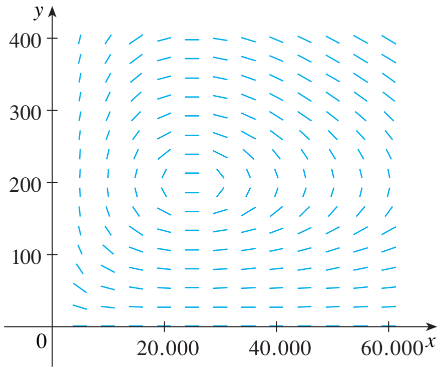
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

(a) Quais das variáveis, x ou y, representa a população de pássaros e qual representa a população de insetos? Explique.

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(c) Encontre uma expressão para dy/dx.

(d) O campo de direções para a equação diferencial no item (c) é mostrado. Use-o para esboçar a trajetória de fase correspondente às populações iniciais de 100 pássaros e 40.000 insetos. A seguir, use a trajetória de fase para descrever como ambas as populações variam.



(e) Use a parte (d) para fazer esboços das populações de pássaros e insetos como funções do tempo. De que modo esses gráficos estão relacionados?

23. Suponha que o modelo do Exercício 22 seja trocado pelas equações

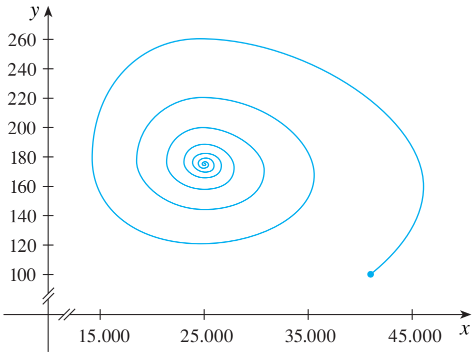
$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x(1 - 0{,}000005x) - 0{,}002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

(a) De acordo com essas equações, o que acontece à população de insetos na ausência dos pássaros?

(b) Encontre as soluções de equilíbrio e explique seu significado.

(c) A figura mostra a trajetória de fase que começa com 100 pássaros e 40.000 insetos. Descreva o que ocorre eventualmente com as populações de pássaros e insetos.



(d) Esboce os gráficos das populações de pássaros e insetos como funções do tempo.

24. Bárbara tem 60 kg e está em uma dieta de 1.600 calorias por dia, das quais 850 são usadas diretamente pelo metabolismo basal. Ela gasta cerca de 15 cal/kg/dia vezes seu peso fazendo exercícios. Se 1 kg de gordura tiver 10.000 cal e assumirmos que a reserva de calorias na forma de gordura seja 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a para encontrar a massa dela em função do tempo. A massa de Bárbara eventualmente se aproxima de uma massa de equilíbrio?

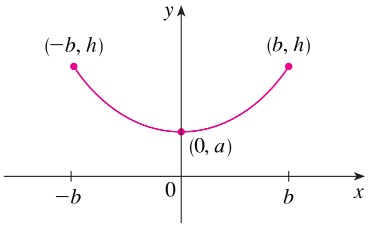
25. Quando um cabo flexível de densidade uniforme é suspenso entre dois pontos fixos e fica pendurado à mercê de seu próprio peso, a forma $y = f(x)$ do cabo satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde k é uma constante positiva. Considere o cabo mostrado na figura.

(a) Seja $z = dy/dx$ na equação diferencial. Resolva a equação diferencial de primeira ordem (em z) e depois integre para encontrar y.

(b) Determine o comprimento do cabo.



Problemas Quentes

1. Encontre todas as funções f tais que f' é contínua e

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\,dt \qquad \text{para todo } x.$$

2. Um estudante esqueceu a Regra do Produto para a derivada e cometeu o erro de pensar que $(fg)' = f'g'$. Contudo, ele teve sorte e obteve a resposta certa. A função f que ele usou era $f(x) = e^{x^2}$ e o domínio de seu problema era o intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$. Qual era a função g?

3. Seja f uma função com a propriedade de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ e $f(a + b) = f(a)f(b)$ para todos os números reais a e b. Mostre que $f'(x) = f(x)$ para todo x e deduza que $f(x) = e^x$.

4. Encontre todas as funções f que satisfazem a equação

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = -1$$

5. Encontre a curva $y = f(x)$ tal que $f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e tal que a área sob o gráfico f de 0 a x seja proporcional à $(n + 1)$-ésima potência de $f(x)$.

6. Uma *subtangente* é uma parte do eixo x que fica diretamente abaixo do segmento de uma reta tangente do ponto de contato ao eixo x. Encontre curvas que passem pelo ponto $(c, 1)$ e cujas subtangentes tenham todas comprimento c.

7. Uma torta de pera foi tirada do forno às 17h00. Naquela hora, a torta estava pegando fogo, com uma temperatura de 100°C. Às 17h10, sua temperatura era de 80°C; às 17h20 era de 65°C. Qual é a temperatura do ambiente?

8. Começa a cair neve durante a manhã do dia 2 de fevereiro e continua constantemente durante a tarde. Ao meio-dia, um veículo removedor de neve começa a retirá-la de uma estrada a uma taxa constante. O veículo percorreu 6 km do meio-dia até às 13 horas, mas apenas 3 km das 13 às 14 horas. Quando a neve começou a cair? [*Dicas*: Para começar, seja t o instante medido em horas depois do meio-dia; seja $x(t)$ a distância percorrida pelo veículo removedor de neve em um instante t; então a velocidade do veículo é dx/dt. Seja b o número de horas antes do meio-dia quando começou a nevar. Encontre uma expressão para a altura da neve no instante t. Então use as determinadas informações de que a taxa de remoção R (em m^3/h) é constante.]

9. Um cachorro vê um coelho correndo em linha reta por um campo aberto e começa a caçá-lo. Em um sistema de coordenadas cartesianas (como mostrado na figura), suponha que:

(i) O coelho está na origem e o cachorro, no ponto $(L, 0)$, no instante em que o cachorro primeiro vê o coelho.

(ii) O coelho corre no eixo y e o cachorro corre sempre direto para o coelho.

(iii) O cachorro corre na mesma velocidade do coelho.

(a) Mostre que o caminho do cachorro é o gráfico da função $y = f(x)$, onde y satisfaz a equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(b) Determine a solução da equação no item (a) que satisfaça as condições iniciais $y = y' = 0$ quando $x = L$. [*Dica*: Seja $z = dy/dx$ na equação diferencial e resolva a equação de primeira ordem resultante para encontrar z; então integre z para encontrar y.]

(c) O cachorro alcança o coelho?

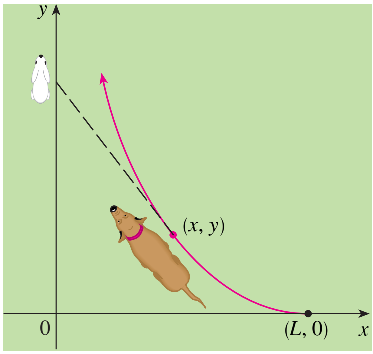


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

10. (a) Suponha que o cachorro no Problema 9 corra duas vezes mais rápido que o coelho. Encontre uma equação diferencial para a trajetória do cachorro. Então resolva-a para encontrar o ponto onde o cachorro pega o coelho.

(b) Suponha que o cachorro corra com a metade da velocidade do coelho. Quão próximo o cachorro chega do coelho? Quais são suas posições quando eles estão o mais próximo possível?

11. Um engenheiro deve apresentar algumas estimativas à sua companhia sobre uma nova planta de alume, considerando a capacidade de um silo desenhado para conter minério de bauxita até este ser processado em alume. O minério parece pó de talco cor-de-rosa e é despejado a partir de uma esteira transportadora no topo do silo. O silo é um cilindro de 30 m de altura com um raio de 60 m. O silo é um cilindro de 1.500π m^3/h e o minério mantém um formato cônico cujo raio é 1,5 vez a sua altura.

(a) Se, em um instante *t* determinado, a pilha tiver 20 m de altura, quanto tempo levará para ela alcançar o topo do silo?

(b) A administração quer saber quanto espaço restará no chão do silo quando a pilha tiver 20 m de altura. Quão rápido está crescendo a área preenchida no chão quando a pilha estiver a essa altura?

(c) Suponha que um carregador comece a remover o minério a uma taxa de 500π m^3/h quando a altura da pilha alcança 27 m. Suponha também que a pilha continue a manter seu formato. Quanto tempo levará para a pilha atingir o topo do silo nessas condições?

12. Ache a curva que passa pelo ponto (3, 2) e que tem a propriedade de que, se a reta tangente for desenhada em qualquer ponto *P* na curva, a parte da reta tangente que está no primeiro quadrante será dividida ao meio por *P*.

13. Lembre-se de que a reta normal a uma curva em um ponto *P* na curva é a reta que passa por *P* e é perpendicular à reta tangente em *P*. Encontre a curva que passa pelo ponto (3, 2) e que tem a propriedade de que, se a linha normal for desenhada em qualquer ponto na curva, a intersecção *y* da linha normal sempre será 6.

14. Encontre todas as curvas com a propriedade de que, se a reta normal for desenhada em qualquer ponto *P* na curva, a parte da reta normal entre *P* e o eixo *x* será dividida em duas partes iguais pelo eixo *y*.

15. Encontre todas as curvas com a propriedade de que se a linha for desenhada a partir da origem em qualquer ponto (x, y) na curva, e então uma tangente for desenhada para a curva naquele ponto e estender-se para encontrar o eixo *x*, o resultado é um triângulo isósceles com lados iguais que se encontram se em (x, y).

10

Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

O cometa Hale-Bopp, com sua cauda azul e sua cauda de poeira branca, apareceu no céu em março de 1997. Na seção 10.6 você verá como as coordenadas polares dão uma equação conveniente para o caminho desse cometa.

Dean Ketelsen

Até agora descrevemos as curvas planas dando y como uma função de x [$y = f(x)$] ou x como uma função de y [$x = g(y)$] ou fornecendo uma relação entre x e y que define y implicitamente como uma função de x [$f(x, y) = 0$]. Neste capítulo discutiremos dois novos métodos para descrever as curvas.

Algumas curvas, como a cicloide, são mais bem manipuladas quando x e y forem dados em termos de uma terceira variável t, chamada parâmetro [$x = f(t)$, $y = g(t)$]. Outras curvas, como a cardioide, têm sua descrição mais conveniente se usarmos um novo sistema de coordenadas, denominado sistema de coordenadas polares.

10.1 Curvas Definidas por Equações Paramétricas

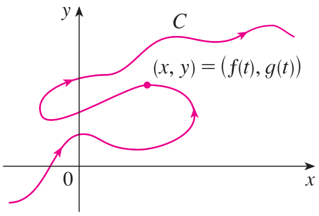


FIGURA 1

Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva C, como mostrado na Figura 1. É impossível descrever C com uma equação do tipo $y = f(x)$ porque C não passa no Teste da Reta Vertical. Mas as coordenadas x e y da partícula são funções do tempo e, assim, podemos escrever $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira conveniente de descrever uma curva e faz surgir a definição a seguir.

Suponha que x e y sejam ambas dadas como funções de uma terceira variável t (denominada **parâmetro**) pelas equações

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(chamadas **equações paramétricas**). Cada valor de t determina um ponto (x, y), que podemos marcar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varia e traça a curva C, que chamamos **curva parametrizada**. O parâmetro t não representa o tempo necessariamente e, de fato, poderíamos usar outra letra em vez de t para o parâmetro. Porém, em muitas aplicações das curvas parametrizadas, t denota tempo e, portanto, podemos interpretar $(x, y) = (f(t), g(t))$ como a posição de uma partícula no instante t.

EXEMPLO 1 Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUÇÃO Cada valor de t fornece um ponto na curva, como mostrado na tabela. Por exemplo, se $t = 0$, então $x = 0$, $y = 1$ e assim o ponto correspondente é $(0, 1)$. Na Figura 2 marcamos os pontos (x, y) determinados por diversos valores do parâmetro e os unimos para produzir uma curva.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

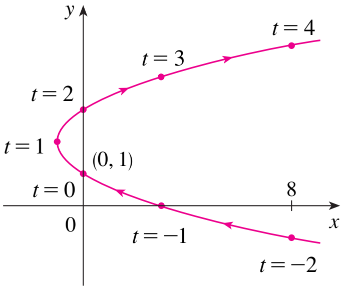


FIGURA 2

Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas se move ao longo da curva na direção das setas quando t aumenta. Observe que os pontos consecutivos marcados na curva aparecem em intervalos de tempo iguais, mas não a distâncias iguais. Isso ocorre porque a partícula desacelera e então acelera à medida que t aumenta.

Parece, a partir da Figura 2, que a curva traçada pela partícula poderia ser uma parábola. Isso pode ser confirmado pela eliminação do parâmetro t, como a seguir. Obtemos $t = y - 1$ a partir da segunda equação e substituímos na primeira equação. Isso fornece

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

e assim a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola $x = y^2 - 4y + 3$. ■

Esta equação em x e y nos descreve *onde* a partícula esteve, mas não nos diz *quando* ela estava em um ponto específico. As equações paramétricas têm uma vantagem: elas nos dizem *quando* a partícula estava em determinado ponto. Elas também indicam a *direção* do movimento.

Nenhuma restrição foi colocada no parâmetro t no Exemplo 1, de modo que assumimos que t poderia ser qualquer número real. No entanto, algumas vezes restringimos t a um intervalo finito. Por exemplo, a curva parametrizada

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

mostrada na Figura 3 é a parte da parábola do Exemplo 1 que começa no ponto $(0, 1)$ e termina no ponto $(8, 5)$. A seta indica a direção na qual a curva é traçada quando aumenta de 0 até 4.

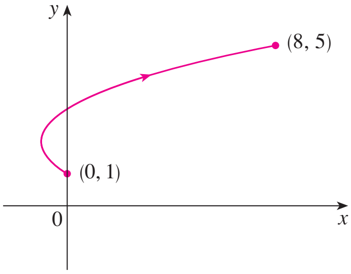


FIGURA 3

De forma geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tem **ponto inicial** $(f(a), g(a))$ e **ponto final** $(f(b), g(b))$.

EXEMPLO 2 Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Se marcarmos os pontos, parece que a curva é um círculo. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação de t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Então, o ponto (x, y) se move no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Observe que, neste exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura 4. Quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se move uma vez em torno do círculo, no sentido anti-horário, partindo do ponto (1, 0).

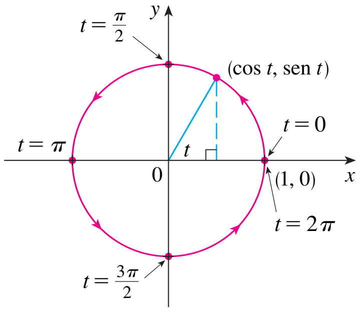


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Temos

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

de modo que as equações paramétricas representam o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Mas quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ começa em (0, 1) e se move *duas vezes* em torno do círculo no sentido horário, como indicado na Figura 5.

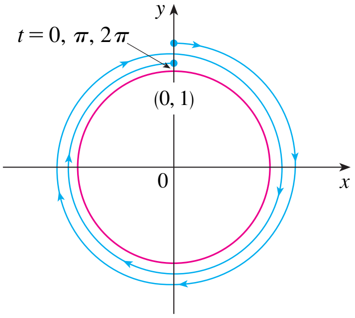


FIGURA 5

Os Exemplos 2 e 3 mostram que diferentes conjuntos de equações paramétricas podem representar a mesma *curva*. Então distinguimos uma curva, que é um conjunto de pontos, e uma *curva parametrizada*, na qual os pontos são percorridos em um modo particular.

EXEMPLO 4 Encontre equações paramétricas para o círculo unitário com centro (h, k) e raio r.

SOLUÇÃO Se tomarmos as equações do círculo unitário no Exemplo 2 e multiplicarmos as expressões para x e y por r, obtemos $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Você pode verificar que essas equações representam um círculo de raio r e centro na origem, percorrido no sentido anti-horário. Agora, trocamos h unidades na direção x e k unidades na direção y e obtemos equações paramétricas do círculo (Figura 6) com centro (h, k) e raio r:

$$x = h + r \cos t \qquad y = k + r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

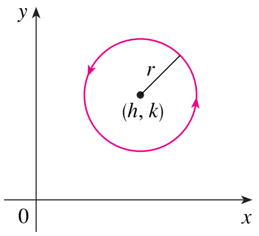


FIGURA 6
$x = h + r \cos t,\ y = k + r \operatorname{sen} t$

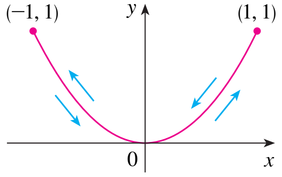


FIGURA 7

EXEMPLO 5 Esboce a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUÇÃO Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ e, dessa forma, o ponto (x, y) se move na parábola $y = x^2$. Mas observe também que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant x \leqslant 1$, assim as equações paramétricas representam apenas a parte da parábola onde $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Como $\operatorname{sen} t$ é periódica, o ponto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se move para a frente e para trás infinitamente ao longo da parábola de $(-1, 1)$ até $(1, 1)$. (Veja a Figura 7.)

TEC O *Module 10.1A* apresenta uma animação com a relação entre movimento ao longo de uma curva parametrizadas $x = f(t)$, $y = g(t)$ e o movimento ao longo de gráficos de f e g como funções de t. Clicando em TRIG você tem a família de curvas parametrizadas

$$x = a \cos bt \qquad y = c \operatorname{sen} dt$$

Se você escolher $a = b = c = d = 1$ e clicar em animação, você verá como os gráficos de $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ estão relacionados com o círculo no Exemplo 2. Se você escolher $a = b = c = 1$, $d = 2$, você vera os gráficos como na Figura 8. Clicando em animação ou movendo t para a direita, você pode ver o código de cores como o movimento ao longo dos gráficos de $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} 2\,t$ correspondem ao movimento da curva parametrizadas, que é chamado de figura de Lissajous.

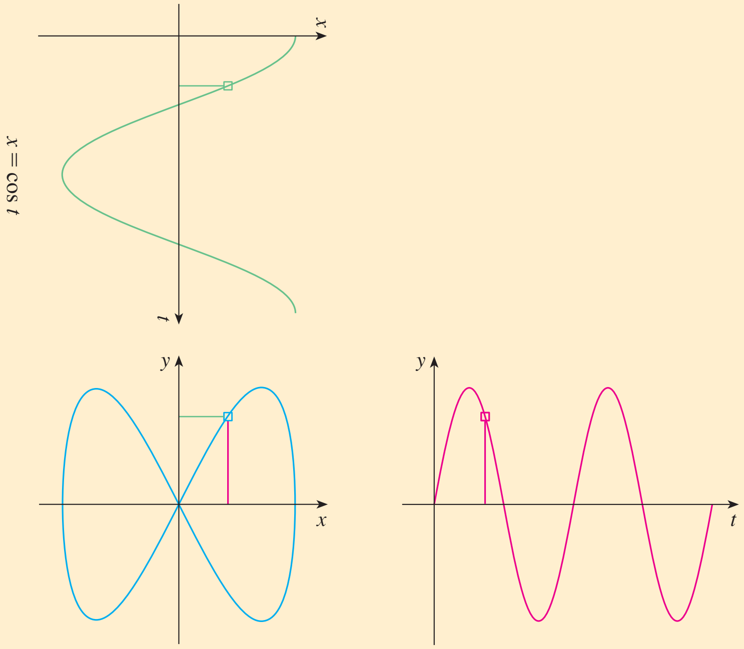


FIGURA 8 $x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} 2t \qquad\qquad y = \operatorname{sen} 2t$

Ferramentas Gráficas

A maioria das calculadoras gráficas e dos programas gráficos computacionais pode ser usada para traçar curvas definidas por equações paramétricas. De fato, é instrutivo olhar uma curva parametrizada sendo desenhada por uma calculadora gráfica, porque os pontos são marcados em ordem, à medida que os valores correspondentes do parâmetro aumentam.

EXEMPLO 6 Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUÇÃO Se fizermos o parâmetro ser $t = y$, então teremos as equações

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando essas equações paramétricas para traçar a curva, obtemos a Figura 9. Seria possível resolver a equação dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como quatro funções de x e traçá-las individualmente, mas as equações paramétricas oferecem um método muito mais fácil. ■

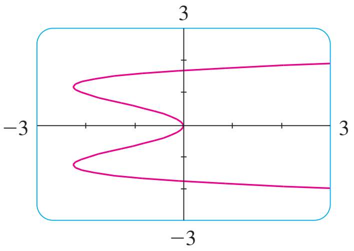


FIGURA 9

Em geral, se precisarmos traçar uma equação do tipo $x = g(y)$, poderemos usar as equações paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe também que curvas com equações $y = f(x)$ (aquelas com as quais estamos mais familiarizados – os gráficos de funções) também podem ser consideradas curvas com equações paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Ferramentas gráficas são particularmente úteis quando esboçamos curvas complicadas. Por exemplo, seria virtualmente impossível produzir manualmente as curvas mostradas nas Figuras 10, 11 e 12.

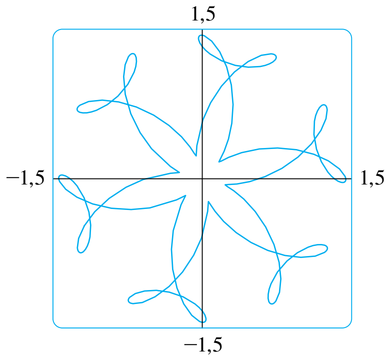


FIGURA 10

$x = \text{sen}\, t + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{1}{4}\,\text{sen}\, 13t$

$y = \cos t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 5t + \frac{1}{4}\cos 13t$

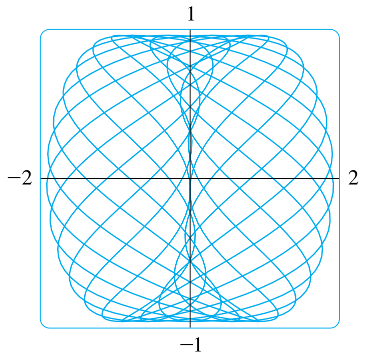


FIGURA 11

$x = \text{sen}\, t - \text{sen}\, 2{,}3t$

$y = \cos t$

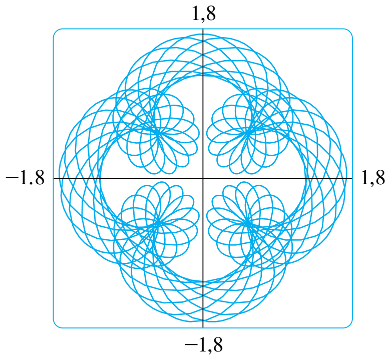


FIGURA 12

$x = \text{sen}\, t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 5t + \frac{1}{4}\cos 2{,}3t$

$y = \cos t + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{1}{4}\,\text{sen}\, 2{,}3t$

Um dos usos mais importantes das curvas parametrizadas é no Computer-Aided Design (CAD). No Projeto de Laboratório depois da Seção 10.2, investigaremos curvas parametrizadas especiais, chamadas **curvas de Bézier**, que são usadas amplamente em fabricação, especialmente na indústria automobilística. Essas curvas também são empregadas na especificação de formatos de letras e outros símbolos em impressoras a laser.

A Cicloide

EXEMPLO 7 A curva traçada pelo ponto P na borda de um círculo quando ele rola ao longo de uma reta é chamada **cicloide** (veja a Figura 13). Se o círculo tiver raio r e rolar ao longo do eixo x e se uma posição de P for a origem, encontre as equações paramétricas para a cicloide.

TEC Uma animação no *Module 10.1B* mostra como a cicloide é formada conforme o círculo se move.

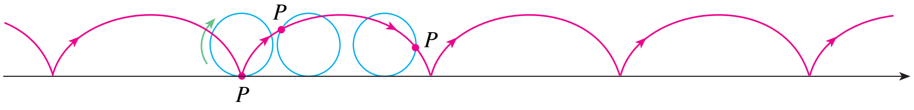


FIGURA 13

SOLUÇÃO Escolhemos como parâmetro o ângulo de rotação θ do círculo ($\theta = 0$ quando P está na origem). Suponha que o círculo tenha girado θ radianos. Como o círculo está em contato com a reta, vemos na Figura 14 que a distância que ele girou a partir da origem é

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Dessa forma, o centro do círculo será $C(r\theta, r)$. Sejam (x, y) as coordenadas de P. Da Figura 14, vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r\,\text{sen}\,\theta = r(\theta - \text{sen}\,\theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

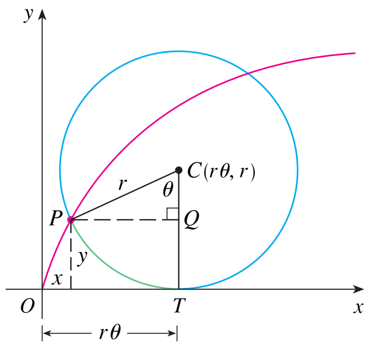


FIGURA 14

Portanto, as equações paramétricas da cicloide são

$$\boxed{1} \qquad x = r(\theta - \text{sen}\,\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Um arco da cicloide surge de uma rotação do círculo e, assim, é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 14, que ilustra o caso em que $0 < \theta < \pi/2$, podemos ver que essas equações ainda são válidas para outros valores de θ (veja o Exercício 39).

Ainda que seja possível eliminar o parâmetro θ das Equações 1, a equação cartesiana resultante em x e y é muito complicada e não tão conveniente para trabalhar quanto as equações paramétricas.

Uma das primeiras pessoas a estudar a cicloide foi Galileu, que propôs que pontes poderiam ser construídas no formato de cicloides e que tentou encontrar a área sob um arco de uma cicloide. Mais tarde essa curva apareceu na conexão com o **problema da braquistócrona**:

Encontre a curva ao longo da qual uma partícula irá deslizar no menor tempo (sob influência da gravidade) do ponto A para um ponto mais baixo B não diretamente abaixo de A. O matemático suíço John Bernoulli, que apresentou esse problema em 1696, mostrou que entre todas as curvas possíveis que ligam A e B, como na Figura 15, a partícula levará o menor tempo deslizando de A até B se a curva for um arco invertido de uma cicloide.

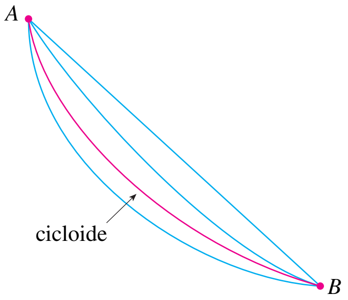


FIGURA 15

O físico holandês Huygens já tinha mostrado que a cicloide é também a solução para o **problema da tautócrona**; isto é, onde quer que a partícula P seja colocada em uma cicloide invertida, ela leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo (veja a Figura 16). Huygens propôs que o pêndulo de relógio (que ele inventou) deveria oscilar em um arco cicloidal, porque então ele levaria o mesmo tempo para fazer uma oscilação completa por um arco maior ou menor.

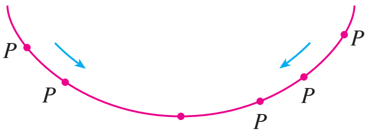


FIGURA 16

Famílias de Curvas Parametrizadas

EXEMPLO 8 Investigue a família de curvas com equações paramétricas

$$x = a + \cos t \qquad y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$$

O que essas curvas têm em comum? Como muda o formato quando a aumenta?

SOLUÇÃO Usamos um aparelho gráfico para produzir gráficos para os casos $a = -2, -1, -0{,}5, -0{,}2, 0, 0{,}5, 1$ e 2 mostrados na Figura 17. Observe que todas essas curvas (exceto no caso $a = 0$) têm dois ramos e ambos se aproximam da assíntota vertical $x = a$ quando x se aproxima de a partir da esquerda ou da direita.

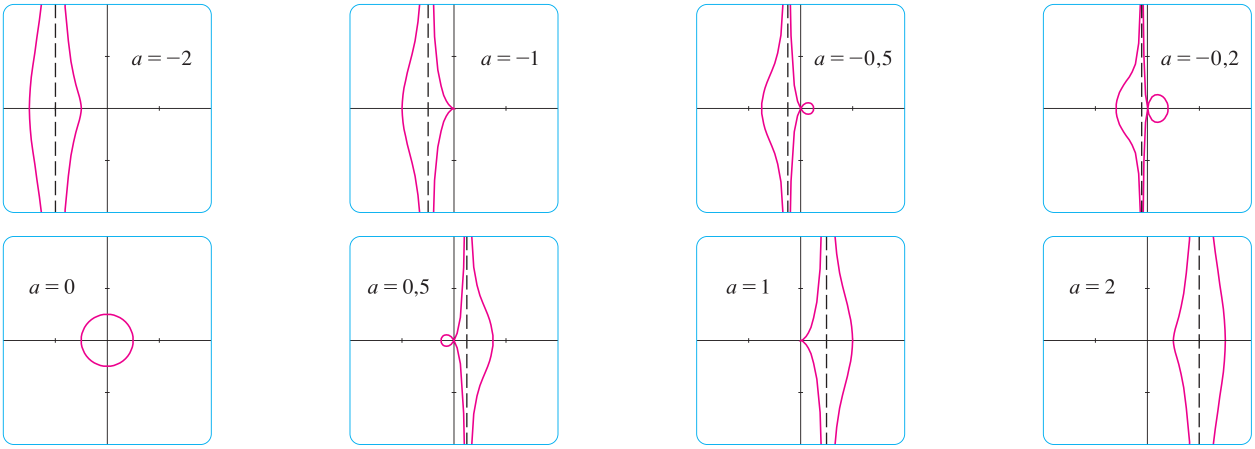


FIGURA 17 Membros da família $x = a + \cos t$, $y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$, todos traçados na janela retangular $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Quando $a < -1$, ambos os ramos são lisos; mas quando a se aproxima de -1, o ramo direito adquire um formato pontudo, chamado *cúspide*. Para a entre -1 e 0 a cúspide se torna um laço, que se torna maior quando a se aproxima de 0. Quando $a = 0$, ambos os ramos se juntam e formam um círculo (veja o Exemplo 2). Para a entre 0 e 1, o ramo esquerdo tem um laço, que se encolhe para se tornar uma cúspide quando $a = 1$. Para $a > 1$, os ramos se tornam lisos novamente e, quando a aumenta mais ainda, eles se tornam menos curvados. Observe que as curvas com a positivo são reflexões em torno do eixo y das curvas correspondentes com a negativo.

Essas curvas são denominadas **conchoides de Nicomedes**, em homenagem ao antigo estudioso grego Nicomedes. Ele as chamou de conchoides porque o formato de seus ramos lembra uma concha.

10.1 Exercícios

1–4 Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

1. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 4t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

2. $x = 2\cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

3. $x = \cos^2 t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^t - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

5–10

(a) Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

(b) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

5. $x = 3 - 4t, \quad y = 2 - 3t$

6. $x = 1 - 2t, \quad y = \frac{1}{2}t - 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 4$

7. $x = 1 - t^2, \quad y = t - 2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

8. $x = t - 1, \quad y = t^3 + 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

10. $x = t^2, \quad y = t^3$

11–18

(a) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

(b) Esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

11. $x = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos\frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = 2\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{cossec} t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^t - 1, \quad y = e^{2t}$

15. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

16. $y = \sqrt{t+1}, y = \sqrt{t-1}$

17. $x = \operatorname{senh} t, \quad y = \cosh t$

18. $x = \operatorname{tg}^2\theta, \quad y = \sec\theta, -\pi/2 < 0 < \pi/2$

19–22 Descreva o movimento de uma partícula com posição (x, y) quando t varia no intervalo dado.

19. $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 1 + 2\operatorname{sen} t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\,\pi/2$

20. $x = 2\operatorname{sen} t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\,\pi/2$

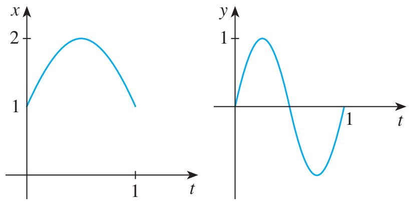
21. $x = 5\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

22. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

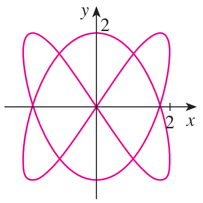
23. Suponha que uma curva seja dada pela equação paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ onde a imagem de f é $[1, 4]$ e a imagem de g é $[2, 3]$. O que você pode dizer sobre a curva?

24. Associe os gráficos das equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ em (a) – (d) com as curvas paramétricas rotuladas de I–IV. Dê razões para suas escolhas.

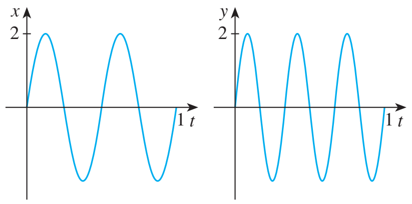
(a)



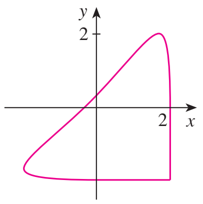
I



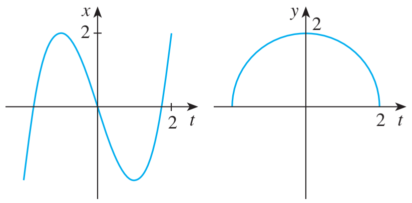
(b)



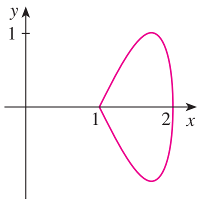
II



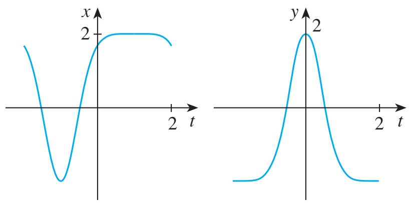
(c)



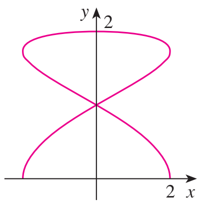
III



(d)

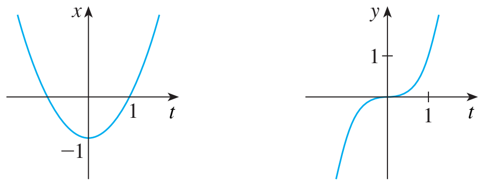


IV

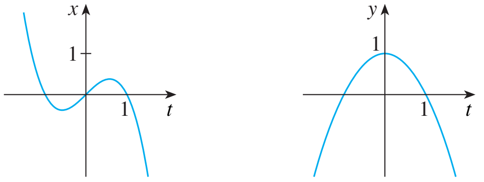


25–27 Use os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para esboçar a curva parametrizada $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Indique com setas a direção na qual a curva é traçada quanto t aumenta.

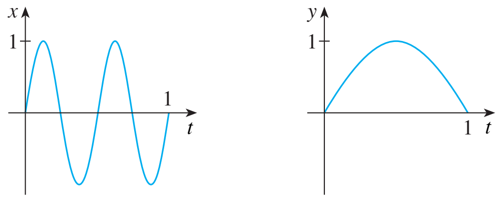
25.



26.



27.



28. Associe as equações paramétricas aos gráficos de I–VI. Dê razões para suas escolhas. (Não use uma ferramenta gráfica.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

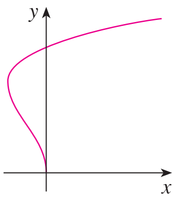
(c) $x = \text{sen}\, 2t, \quad y = \text{sen}(t + \text{sen}\, 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \text{sen}\, 2t$

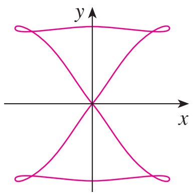
(e) $x = t + \text{sen}\, 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\text{sen}\, 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$

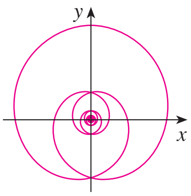
I



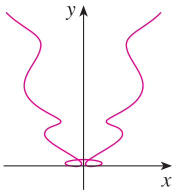
II



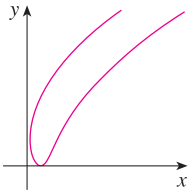
III



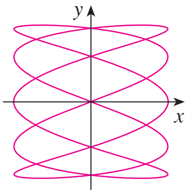
IV



V



VI



29. Trace a curva $x = y - 2\,\text{sen}\, \pi y$.

30. Trace as curvas $y = x^3 - 4x$ e $x = y^3 - 4y$ e encontre seus pontos de intersecção, com precisão de uma casa decimal.

31. (a) Mostre que as equações paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

onde $0 \leqslant t \leqslant 1$ descrevem o segmento de reta que une os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encontre as equações paramétricas para representar o segmento de reta de $(-2, 7)$ para $(3, -1)$.

32. Usando uma ferramenta gráfica e o resultado do Exercício 31(a), desenhe o triângulo com vértices $A\,(1, 1)$, $B(4, 2)$ e $C\,(1, 5)$.

33. Encontre equações paramétricas para a trajetória de uma partícula que se move ao longo do círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ da seguinte maneira:

(a) Uma vez no sentido horário, a partir de (2, 1).

(b) Três vezes no sentido anti-horário, a partir de (2, 1).

(c) Meia-volta no sentido anti-horário, a partir de (0, 3).

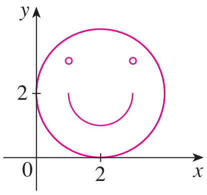
34. (a) Encontre as equações paramétricas para a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Dica*: Modifique as equações do círculo no Exemplo 2.]

(b) Use as equações paramétricas para traçar a elipse quando $a = 3$ e $b = 1, 2, 4$ e 8.

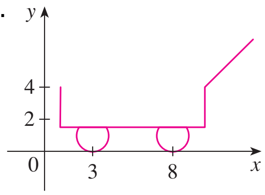
(c) Como muda o formato da elipse quando b varia?

35–36 Use uma calculadora gráfica ou um computador para reproduzir a figura.

35.



36.



37–38 Compare as curvas representadas pelas equações paramétricas. Em que elas diferem?

37. (a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

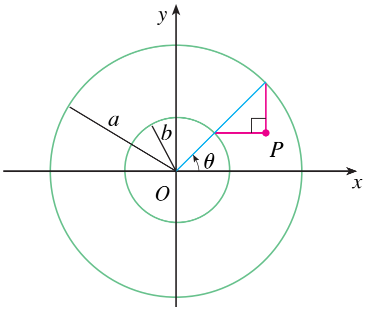
39. Deduza as Equações 1 para o caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Seja P um ponto a uma distância d do centro de um círculo de raio r. A curva traçada em P como um círculo desliza ao longo de uma linha reta chamada **trocoide**. (Pense no movimento de um ponto sobre um raio de uma roda de bicicleta.) A cicloide é o caso especial de uma trocoide com $d = r$. Usando o mesmo parâmetro θ que para a cicloide e supondo que a reta seja o eixo x e $\theta = 0$ quando P está em um de seus pontos mais baixos, mostre que as equações paramétricas para a trocoide são

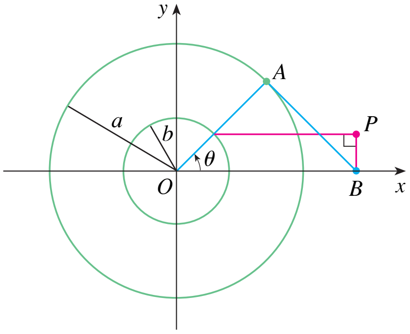
$$x = r\theta - d\,\text{sen}\,\theta \qquad y = r - d\cos\theta$$

Esboce a trocoide para os casos $d < r$ e $d > r$.

41. Se a e b forem números fixos, encontre as equações paramétricas para a curva que consiste em todas as posições possíveis do ponto P na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. Então elimine o parâmetro e identifique a curva.



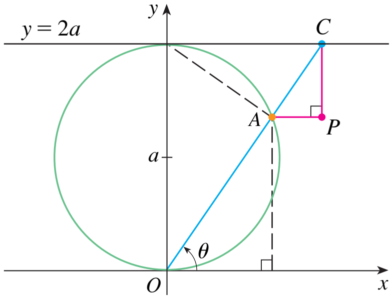
42. Se a e b forem números fixos, encontre as equações paramétricas para a curva que consiste em todas as posições possíveis do ponto P na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. O segmento de reta AB é tangente ao círculo maior.



43. Uma curva, denominada **bruxa de Maria Agnesi**, consiste em todas as possíveis posições do ponto P na figura. Mostre que equações paramétricas para essa curva podem ser escritas como

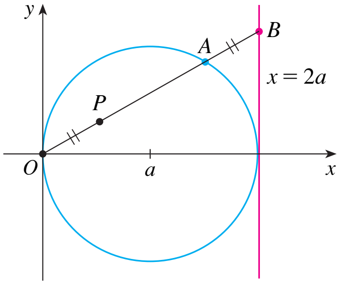
$$x = 2a \operatorname{cotg} \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$$

Esboce a curva.



44. (a) Encontre as equações paramétricas para o conjunto de todos os pontos P, como mostrado na figura, tais que $|OP| = |AB|$. (Essa curva é chamada **cissoide de Diocles**, em homenagem ao estudioso grego Diocles, que introduziu a cissoide como um método gráfico para a construção da aresta de um cubo cujo volume é o dobro daquele de um cubo dado.)

(b) Use a descrição geométrica da curva para desenhar um esboço das curvas à mão. Verifique seu trabalho usando as equações paramétricas para traçar a curva.



45. Suponha que a posição de uma partícula no instante t seja dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

e que a posição de uma segunda partícula seja dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Trace as trajetórias de ambas as partículas. Quantos pontos de intersecção existem?

(b) Alguns desses pontos de intersecção são *pontos de colisão*? Em outras palavras, essas partículas alguma vez estão no mesmo lugar ao mesmo tempo? Se isso ocorrer, encontre os pontos de colisão.

(c) Descreva o que acontecerá se a trajetória da segunda partícula for dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Se um projétil é lançado com uma velocidade inicial de v_0 metros por segundo num ângulo α acima da horizontal e assumindo que a resistência do ar é desprezível, então a posição depois de t segundos é dada pelas equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

onde g é a aceleração da gravidade (9,8 m/s²).

(a) Se uma arma for disparada com $\alpha = 30°$ e $v_0 = 500$ m/s, quando a bala atingirá o solo? A que distância da arma a bala atingirá o solo? Qual a altura máxima alcançada pela bala?

(b) Use uma ferramenta gráfica para verificar suas respostas na parte (a). Então trace a trajetória do projétil para vários outros valores do ângulo α para ver onde a bala atinge o solo. Resuma o que você encontrou.

(c) Mostre que a trajetória é parabólica, eliminando o parâmetro.

47. Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. Como muda o formato quando c aumenta? Ilustre, traçando vários membros da família.

48. As **curvas de catástrofe em forma de cauda de andorinha** são definidas pelas equações paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Trace várias dessas curvas. Quais as características que essas curvas têm em comum? Como variam quando c aumenta?

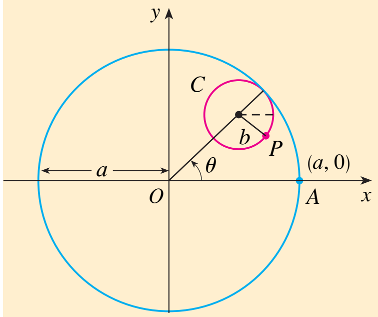
49. Faça um gráfico de diversos membros de uma família de curvas com equações paramétricas $x = t + a \cos t$, $y = t + a \operatorname{sen} t$, onde $a > 0$. Como muda o formato quando a aumenta? Para quais valores de a a curva tem pontos de mínimo?

50. Faça um gráfico com vários membros das família de curvas $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} nt$, $y = \cos t + \cos nt$, onde n é um número inteiro positivo. Quais as características que essas curvas têm em comum? O que acontece quando n cresce?

51. As curvas com equações $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ são chamadas **figuras de Lissajous**. Investigue como essas curvas mudam quando a, b e n variam. (Tome n como um inteiro positivo.)

52 Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} ct$, onde $c > 0$. Comece tomando c como um inteiro positivo e veja o que acontece com a forma à medida que c cresce. A seguir, explore algumas das possibilidades que ocorrem quando c é uma fração.

PROJETO DE LABORATÓRIO ROLANDO CÍRCULOS AO REDOR DE CÍRCULOS



Neste projeto investigaremos as famílias de curvas, chamadas *hipocicloides* e *epicicloides*, que são geradas pelo movimento de um ponto em um círculo que rola dentro ou fora de outro círculo.

1. Uma **hipocicloide** é uma curva traçada por um ponto fixo P num círculo C de raio b conforme C desliza no interior do círculo com centro O e raio a. Mostre que se a posição inicial P é $(a, 0)$ e o parâmetro θ é escolhido como na figura, então as equações paramétricas da hipocicloide são

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos\left(\frac{a - b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{b}\,\theta\right)$$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

TEC Olhe no *Module 10.1B* para ver como as hipocicloides são formadas pelo movimento de círculos deslizantes.

2. Use uma ferramenta gráfica para desenhar os gráficos de hipocicloides com a sendo um inteiro positivo e $b = 1$. Como o valor de a afeta o gráfico? Mostre que, se tomarmos $a = 4$, então as equações paramétricas da hipocicloide se reduzirão a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\,\mathrm{sen}^3\,\theta$$

Essa curva é denominada **hipocicloide de quatro cúspides**, ou **astroide**.

3. Agora tente $b = 1$ e $a = n/d$, uma fração onde n e d não têm fator comum. Primeiro faça $n = 1$ e tente determinar graficamente o efeito do denominador d no formato do gráfico. Então faça n variar mantendo d constante. O que acontece quando $n = d + 1$?

4. O que acontece se $b = 1$ e a for irracional? Experimente com um número irracional do tipo $\sqrt{2}$ ou $-$ 2. Tome valores cada vez maiores para θ e especule sobre o que deveria acontecer se traçássemos a hipocicloide para todos os valores reais de θ.

5. Se o círculo C rolar do *lado de fora* de um círculo fixo, a curva traçada por P será chamada **epicicloide**. Encontre equações paramétricas para a epicicloide.

6. Investigue os possíveis formatos para a epicicloide. Use métodos similares aos Problemas 2–4.

10.2 Cálculo com Curvas Parametrizadas

Tendo visto como representar as curvas por equações paramétricas, vamos agora aplicar os métodos de cálculo a essas curvas parametrizadas. Em particular, resolveremos problemas envolvendo tangentes, área, comprimento de arco e área de superfície.

Tangentes

Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis e queremos encontrar a reta tangente a um ponto da curva $x = f(t)$ e $y = g(t)$ onde y também é uma função diferenciável de x. A Regra da Cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Se $dx/dt \neq 0$, podemos isolar dy/dx:

Se pensarmos em uma curva parametrizada sendo traçada pelo movimento de uma partícula, então dy/dt e dx/dt são as velocidades vertical e horizontal da partícula e a Fórmula 1 diz que a inclinação da tangente é a razão dessas velocidades.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{se} \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

A Equação 1 nos permite encontrar a inclinação $dy\,/\,dx$ da tangente para uma curva paramétrica sem ter que eliminar o parâmetro t. Podemos ver de $\boxed{1}$ que a curva tem uma tangente horizontal quando $dy/dt = 0$ (desde que $dy/dt \neq 0$) e tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 0$ (desde que $dy/dt \neq 0$). Essa informação é útil para esboçar as curvas parametrizadas.

Como sabemos do Capítulo 4, no Volume I, é também útil considerar d^2y/dx^2. Isso pode ser encontrado mudando y por dy/dx na Equação 1:

⊘ Observe que $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

EXEMPLO 1 Uma curva C é definida pelas equações paramétricas $x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$.
(a) Mostre que C tem duas tangentes no ponto (3, 0) e encontre suas equações.
(b) Encontre os pontos em C onde a tangente é horizontal ou vertical.
(c) Determine onde a curva sobe e desce e onde sua concavidade é para cima ou para baixo.
(d) Esboce a curva.

SOLUÇÃO

(a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ quando $t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$. Portanto, o ponto (3, 0) em C surge de dois valores do parâmetro, $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. Isso indica que C intercepta a si própria em (3, 0). Uma vez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

a inclinação da tangente quando $t = \pm\sqrt{3}$ é $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$; assim, as equações das tangentes em (3, 0) são

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

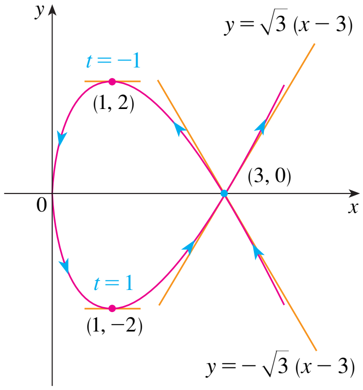


FIGURA 1

(b) C tem uma tangente horizontal quando $dy/dx = 0$, isto é, quando $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Uma vez que $dy/dt = 3t^2 - 3$, isso ocorre quando $t^2 = 1$, isto é, $t = \pm 1$. Os pontos correspondentes em C são (1, −2) e (1, 2). C tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 2t = 0$, isto é, $t = 0$. (Observe que $dy/dt \neq 0$ ali). O ponto correspondente em C é (0, 0).
(c) Para determinar a concavidade, calculamos a segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Então a concavidade da curva é para cima quando $t > 0$ e para baixo quando $t < 0$.
(d) Usando as informações das partes (b) e (c), esboçamos C na Figura 1.

EXEMPLO 2
(a) Encontre a tangente à cicloide $x = r(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ no ponto onde $\theta = \pi/3$. (Veja o Exemplo 7, na Seção 10.1.)
(b) Em que pontos a tangente é horizontal? Quando é vertical?

SOLUÇÃO

(a) A inclinação da reta tangente é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\,\text{sen}\,\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}$$

Quando $\theta = \pi/3$, temos

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Portanto, a inclinação da tangente é $\sqrt{3}$ e sua equação é

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{3}\,x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

A tangente está esboçada na Figura 2.

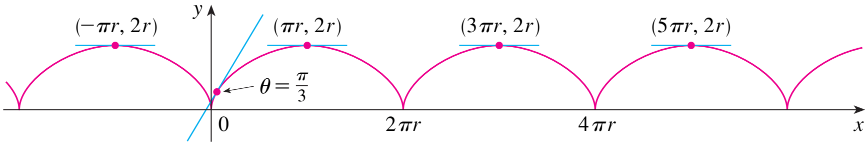


FIGURA 2

(b) A tangente é horizontal quando $dy/dx = 0$, o que ocorre quando $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $1 - \cos\theta \neq 0$, isto é, $\theta = (2n - 1)\pi$, n um inteiro. O ponto correspondente na cicloide é $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Quando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ quanto $dy/d\theta$ são 0. A partir do gráfico parece que existem tangentes verticais naqueles pontos. Podemos verificar isso usando a Regra de L'Hôspital, como a seguir:

$$\lim_{\theta\to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta\to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta\to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Um cálculo similar mostra que $dy/dx \to -\infty$ quando $\theta \to 2n\pi^-$; assim, realmente existem tangentes verticais quando $\theta = 2n\pi$, isto é, quando $x = 2n\pi r$.

Áreas

Sabemos que a área sob uma curva $y = F(x)$ de a até b é $A = \int_a^b F(x)\,dx$, em que $F(x) \geqslant 0$. Se a curva for dada por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, então podemos deduzir uma fórmula de área pelo uso da Regra da Substituição para Integrais Definidas como a seguir:

Os limites de integração para t são encontrados da maneira usual com a Regra da Substituição. Quando $x = a$, t é α ou β. Quando $x = b$, t é o valor remanescente.

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt \qquad \left[\text{ou} \quad \int_\beta^\alpha g(t)\,f'(t)\,dt\right]$$

EXEMPLO 3 Encontre a área sob um arco da cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

(Veja a Figura 3.)

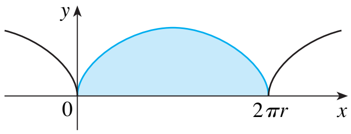


FIGURA 3

SOLUÇÃO Um arco da cicloide é dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Usando a Regra da Substituição com $y = r(1 - \cos\theta)$ e $dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$, temos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\,r(1 - \cos\theta)\,d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\ &= r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

O resultado do Exemplo 3 diz que a área sob um arco da cicloide é três vezes a área do círculo que rola e gera a cicloide (veja o Exemplo 7 na Seção 10.1). Galileu conjecturou esse resultado, mas este foi demonstrado inicialmente pelos matemáticos francês Roberval, e italiano Torricelli.

Comprimento de Arco

Já sabemos como encontrar o comprimento L de uma curva C dada na forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. A Fórmula 8.1.3 diz que, se F' for contínua, então

$$\boxed{2} \qquad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Suponha que C também possa ser descrita pelas equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, em que $dx/dt = f'(t) > 0$. Isso significa que C é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando t aumenta de α até β e $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Colocando a Fórmula 1 na Fórmula 2 e usando a Regra da Substituição, obtemos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

Uma vez que $dx/dt > 0$, temos

$$\boxed{3} \qquad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Mesmo que C não possa ser expressa na forma $y = F(x)$, a Fórmula 3 ainda é válida, mas a obtemos por aproximações poligonais. Dividimos o intervalo do parâmetro $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos de comprimentos iguais Δt. Se $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ são as extremidades desses subintervalos, então $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ são as coordenadas dos pontos $P_i(x_i, y_i)$ que estão em C e o polígono com vértices $P_0, P_1, \dots, P_n$ aproxima C. (Veja a Figura 4.)

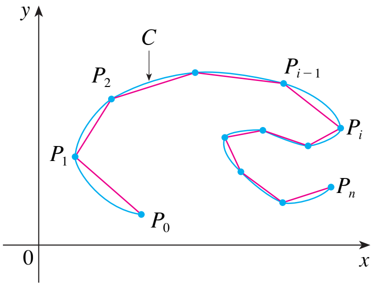


FIGURA 4

Como na Seção 8.1, no Volume I, definimos o comprimento L de C como o limite dos comprimentos dessas poligonais aproximadoras quando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

O Teorema do Valor Médio, quando aplicado a f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, fornece um número t_i^* em (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Agora $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, e essa equação fica

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\, \Delta t$$

Analogamente, quando aplicado a g, o Teorema do Valor Médio fornece um número t_i^{**} em (t_{i-1}, t_i), de forma que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\, \Delta t$$

Portanto

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2} \\ &= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t \end{aligned}$$

e também

$$\boxed{4} \qquad L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t$$

A soma em $\boxed{4}$ se parece com a soma de Riemann da função $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$, contudo, não é exatamente uma soma de Riemann, porque em geral $t_i^* \neq t_i^{**}$. Mesmo assim, se f' e g' forem contínuas, pode ser mostrado que o limite em $\boxed{4}$ é o mesmo que se t_i^* e t_i^{**} fossem iguais; ou seja,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Então, usando a notação de Leibniz, temos o seguinte resultado, que possui a mesma forma de 3.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se uma curva C é descrita por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C é percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de α até β, então o comprimento de C é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que a fórmula no Teorema 5 é consistente com as fórmulas gerais $L = \int ds$ e $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ da Seção 8.1, no Volume I.

EXEMPLO 4 Se usarmos a representação do círculo unitário dada no Exemplo 2, na Seção 10.1,

$$x = \cos t \qquad y = \text{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

então $dx/dt = -\text{sen}\, t$ e $dy/dt = \cos t$, logo o Teorema 5 nos dá

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como esperado. Se, por outro lado, utilizarmos a representação dada no Exemplo 3 na Seção 10.1,

$$x = \text{sen}\, 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

então $dx/dt = 2\cos 2t$, $dy/dt = -2\,\text{sen}\, 2t$ e a integral do Teorema 5 fornece

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\,\text{sen}^2\, 2t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$$

Observe que a integral fornece o dobro do comprimento do arco do círculo, porque quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto $(\text{sen}\, 2t, \cos 2t)$ percorre o círculo duas vezes. Em geral, ao encontrarmos o comprimento da curva C a partir de uma representação paramétrica, temos de tomar cuidado para ter a certeza de que C é percorrida apenas uma vez quando t aumenta de α até β.

EXEMPLO 5 Encontre o comprimento de um arco da cicloide $x = r(\theta - \text{sen}\, \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$.

SOLUÇÃO Do Exemplo 3 vemos que um arco é descrito pelo intervalo paramétrico $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Uma vez que

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\,\text{sen}\, \theta$$

temos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\,\text{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}\, d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta \end{aligned}$$

Para calcular essa integral, usamos a identidade $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ com $\theta = 2x$, que fornece $1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, obtemos $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$, logo, $\text{sen}(\theta/2) \geqslant 0$. Portanto

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\,\text{sen}^2(\theta/2)} = 2\left|\text{sen}(\theta/2)\right| = 2\,\text{sen}(\theta/2)$$

e também

$$\begin{aligned} L &= 2r\int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\Big[-2\cos(\theta/2)\Big]_0^{2\pi} \\ &= 2r[2 + 2] = 8r \end{aligned}$$

O resultado do Exemplo 5 diz que o comprimento de um arco de uma cicloide é oito vezes o raio do círculo gerador (veja a Figura 5). Isso foi demonstrado pela primeira vez em 1658 por sir Christopher Wren, que depois se tornou o arquiteto da Catedral de São Paulo, em Londres.

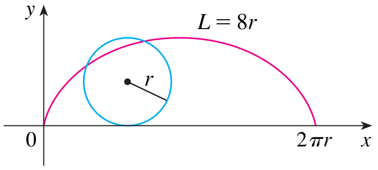


FIGURA 5

Área de Superfície

Da mesma maneira como para o comprimento do arco, podemos adaptar a Fórmula 8.2.5, no Volume I, para obter uma fórmula para a área da superfície. Se a curva dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, girar em torno do eixo x, onde f', g' são contínuas e $g(t) \geqslant 0$, então a área da superfície resultante é dada por

$$\boxed{6} \qquad S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

As fórmulas simbólicas gerais $S = \int 2\pi y\, ds$ e $S = \int 2\pi x\, ds$ (Fórmulas 8.2.7 e 8.2.8, no Volume I), ainda são válidas, mas para as curvas parametrizadas usamos

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EXEMPLO 6 Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

SOLUÇÃO A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

sobre o eixo x. Portanto, da Fórmula 6, temos

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r \operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi \int_0^{\pi} r \operatorname{sen} t \cdot r\, dt \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^{\pi} = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

10.2 Exercícios

1–2 Encontre dy/dx.

1. $x = t \operatorname{sen} t,\quad y = t^2 + t$

2. $x = 1/t,\quad y = \sqrt{t}\, e^{-t}$

3–6 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto correspondente ao valor do parâmetro dado.

3. $x = t^4 + 1,\quad y = t^3 + t;\quad t = -1$

4. $x = t - t^{-1},\quad y = 1 + t^2;\quad t = 1$

5. $x = t\cos t,\quad y = t \operatorname{sen} t;\quad t = \pi$

6. $x = \cos\theta \neq \operatorname{sen} 2\theta,\quad y = \operatorname{sen}\theta \neq \cos 2\theta;\quad \theta = 0$

7–8 Encontre uma equação da tangente da curva num dado ponto por dois métodos: (a) sem eliminar o parâmetro e (b) eliminando o parâmetro primeiro.

7. $x = 1 + \ln t,\quad y = t^2 + 2;\quad (1, 3)$

8. $x = 1 + \sqrt{t},\quad y = e^{t^2};\quad (2, e)$

🖩 **9–10** Encontre uma equação da(s) tangente(s) à curva no ponto dado. A seguir, trace a curva e a(s) tangente(s).

9. $x = 6 \operatorname{sen} t,\quad y = t^2 + t;\quad (0, 0)$

10. $x = \cos t + \cos 2t,\quad y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t;\quad (-1, 1)$

11–16 Encontre dy/dx e d^2y/dx^2. Para quais valores de t a curva é côncava para cima?

11. $x = t^2 + 1,\quad y = t^2 + t$

12. $x = t^3 - 12t,\quad y = t^2 - 1$

13. $x = e^t,\quad y = te^{-t}$

14. $x = t^2 + 1,\quad y = e^t - 1$

15. $x = 2 \operatorname{sen} t,\quad y = 3\cos t,\quad 0 < t < 2\pi$

16. $x = \cos 2t,\quad y = \cos t,\quad 0 < t < \pi$

17–20 Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical. Se você tiver uma ferramenta gráfica, trace a curva.

17. $x = t^3 - 3t,\quad y = t^2 - 3$

18. $x = t^3 - 3t,\quad y = t^3 - 3t^2$

19. $x = \cos\theta,\quad y = \cos 3\theta$

20. $x = e^{\operatorname{sen}\theta},\quad y = e^{\cos\theta}$

🖩 **21.** Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais à esquerda na curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. Então, use o cálculo para calcular as coordenadas exatas.

🖩 **22.** Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo e do ponto mais à esquerda na curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. A seguir, encontre as coordenadas exatas.

🖩 **23–24** Trace a curva em uma janela retangular que mostre todos os aspectos importantes da curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2,\quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2,\quad y = 2t^2 - t$

25. Mostre que a curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t \cos t$ tem duas tangentes em $(0, 0)$ e encontre suas equações. Esboce a curva.

🖩 **26.** Trace a curva $x = \cos t + 2\cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$ para descobrir onde ela intercepta a si mesma. A seguir, encontre equações para ambas as tangentes nesse ponto.

27. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à trocoide $x = r\theta - d \operatorname{sen}\theta$, $y = r - d\cos\theta$ em termos de θ. (Veja o Exercício 40, na Seção 10.1.)

🖩 É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(b) Mostre que, se $d < r$, então a trocoide não tem uma tangente vertical.

28. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à trocoide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$ em termos de θ. (As astroides foram exploradas no Projeto de Laboratório.)

(b) Em que pontos a tangente é horizontal ou vertical?

(c) Em que pontos a tangente tem inclinação 1 ou -1?

29. Em quais pontos na curva $x = 2t^3$, $y = 1 + 4t - t^2$ a reta tangente tem inclinação 1?

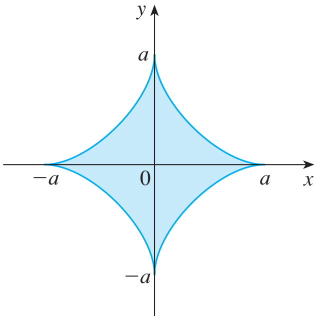
30. Encontre as equações das tangentes à curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto (4, 3).

31. Use as equações paramétricas de uma elipse, $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, para calcular a área delimitada por essas curvas.

32. Calcule a área delimitada pela curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ e pelo eixo y.

33. Encontre a área delimitada pelo eixo x e pela curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

34. Calcule a área da região limitada pela astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$. (As astroides foram exploradas no Projeto de Laboratório.)



35. Encontre a área sob um arco da trocoide do Exercício 40, na Seção 10.1, para o caso $d < r$.

36. Seja $\mathcal{R}$ a região dentro do laço da curva no Exemplo 1.

(a) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

(b) Se $\mathcal{R}$ girar em torno do eixo x, encontre o volume do sólido resultante.

(c) Encontre o centroide de $\mathcal{R}$.

37–40 Escreva uma integral que represente o comprimento da curva. A seguir, use sua calculadora para encontrar o comprimento com precisão de quatro casas decimais.

37. $x = t + e^{-t}$, $y = t - e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = t^2 - t$, $y = t^4$, $1 \leqslant t \leqslant 4$

39. $x = t - 2\,\text{sen}\,t$, $y = 1 - 2\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

40. $x = t + \sqrt{t}$, $y = t - \sqrt{t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

41–44 Calcule o comprimento da curva.

41. $x = 1 + 3t^2$, $y = 4 + 2t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

42. $x = e^t + e^{-t}$, $y = 5 - 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 3$

43. $x = t\,\text{sen}\,t$, $y = t\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

44. $x = 3\cos t - \cos 3t$, $y = 3\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,3t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

45–46 Trace a curva e calcule seu comprimento.

45. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

46. $x = \cos t + \ln(\text{tg}\,\tfrac{1}{2}t)$, $y = \text{sen}\,t$, $\pi/4 \leqslant t \leqslant 3\pi/4$

47. Trace a curva $x = \text{sen}\,t + \text{sen}\,1{,}5t$, $y = \cos t$ e encontre seu comprimento correto com 4 casas decimais.

48. Ache o comprimento do laço da curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento da curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leqslant t \leqslant 6$.

50. No Exercício 43, na Seção 10.1, foi pedido que você deduzisse as equações paramétricas $x = 2a\,\text{cotg}\,\theta$, $y = 2a\,\text{sen}^2\theta$ para a curva chamada bruxa de Maria Agnesi. Use a Regra de Simpson com $n = 4$ para estimar o comprimento do arco dessa curva dada por $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

51–52 Encontre a distância percorrida por uma partícula com posição (x, y) quando t varia em um dado intervalo de tempo. Compare com o comprimento da curva.

51. $x = \text{sen}^2 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant 3\pi$

52. $x = \cos^2 t$, $y = \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

53. Mostre que o comprimento total da elipse $x = a\,\text{sen}\,\theta$, $y = b\cos\theta$, $a > b > 0$, é

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\theta}\;d\theta$$

onde e é a excentricidade da elipse $\left(e = c/a, \text{ com } c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

SCA **54.** Calcule o comprimento total da astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = \text{sen}^3\theta$ com $a > 0$.

55. (a) Trace a **epitrocoide** com equações

$$x = 11\cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11\,\text{sen}\,t - 4\,\text{sen}(11t/2)$$

Qual intervalo do parâmetro fornece a curva completa?

SCA (b) Use seu SCA para calcular o comprimento aproximado dessa curva.

56. Uma curva chamada **espiral de Cornu** é definida pelas equações paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\,du$$
$$y = S(t) = \int_0^t \text{sen}(\pi u^2/2)\,du$$

onde C e S são as funções de Fresnel que foram introduzidas no Capítulo 5.

(a) Trace essa curva. O que acontece quando $t \to \infty$ e $t \to -\infty$?

(b) Calcule o comprimento da espiral de Cornu a partir da origem até o ponto com o valor do parâmetro t.

57–60 Escreva uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x. Use sua calculadora para encontrar a superfície com precisão de quatro casas decimais.

57. $x = t\,\text{sen}\,t$, $y = t\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

58. $x = \text{sen}\,t$, $y = \text{sen}\,2t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

59. $x = 1 + te^t$, $y = (t^2 + 1)e^t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

60. $x = t^2 - t^3$, $y = t + t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

61–63 Encontre a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

61. $x = t^3$, $y = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

62. $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

63. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

64. Trace a curva

$$x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \qquad y = 2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta$$

Se essa curva girar em torno do eixo x, calcule a área da superfície resultante. (Use o gráfico para ajudar a encontrar o intervalo correto do parâmetro.)

65–66 Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

67. Se f' for contínua e $f'(t) \neq 0$ para $a \leqslant t \leqslant b$, mostre que a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, pode ser colocada na forma $y = F(x)$. [*Dica*: Mostre que f^{-1}.]

68. Use a Fórmula 2 para deduzir a Fórmula 7 a partir da Fórmula 8.2.5, no Volume I, para o caso no qual a curva pode ser representada na forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

69. A **curvatura** no ponto P da curva é definida como

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

onde ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente em P, como mostrado na figura. Então, a curvatura é o valor absoluto da taxa de variação de ϕ em relação ao comprimento de arco. Essa pode ser considerada uma medida da taxa de variação de direção da curva em P e será estudada em mais detalhes no Capítulo 13.

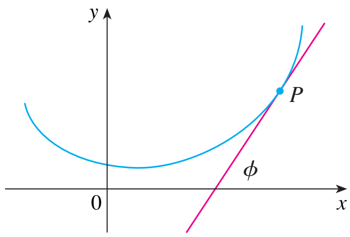
(a) Para a curva parametrizada $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduza a fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t, assim $\dot{x} = dx/dt$. [*Dica*: Use $\phi = \text{tg}^{-1}(dy/dx)$ e a Fórmula 2 para encontrar $d\phi/dt$. Então, use a Regra da Cadeia para achar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando uma curva $y = f(x)$ como a curva parametrizada $x = x$, $y = f(x)$, com o parâmetro x, mostre que a fórmula na parte (a) se torna

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



70. (a) Use a fórmula no Exercício 69(b) para encontrar a curvatura da parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

(b) Em que ponto essa parábola tem curvatura máxima?

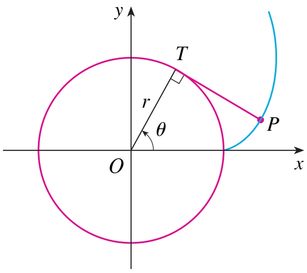
71. (a) Use a fórmula no Exercício 69(a) para encontrar a curvatura da cicloide $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ no topo de um de seus arcos.

72. (a) Mostre que a curvatura em cada ponto de uma reta é $\kappa = 0$.

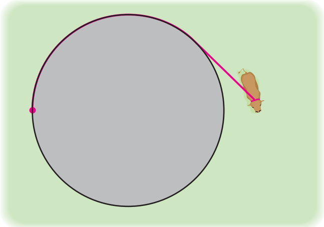
(b) Mostre que a curvatura em cada ponto do círculo de raio r é $\kappa = 1/r$.

73. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, se a posição inicial de P for $(r, 0)$ e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são

$$x = r(\cos\theta + \theta\,\text{sen}\,\theta) \qquad y = r(\text{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Uma vaca é amarrada a um silo com raio r por uma corda comprida o suficiente para alcançar apenas o outro lado do silo. Calcule a área disponível para a vaca pastar.



PROJETO DE LABORATÓRIO

CURVAS DE BÉZIER

As **curvas de Bézier** são usadas em Computer-Aided Design (CAD) e têm esse nome em homenagem a Pierre Bézier (1910-1999), matemático francês que trabalhava na indústria automobilística. Uma curva cúbica de Bézier é determinada por quatro *pontos de controle*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, e é definida pelas equações paramétricas

$$x = x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3t^3$$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

onde $0 \leqslant t \leqslant 1$. Observe que, quando $t = 0$, temos $(x, y) = (x_0, y_0)$, e quando $t = 1$, obtemos $(x, y) = (x_3, y_3)$; assim, a curva começa em P_0 e termina em P_3.

1. Trace a curva de Bézier com pontos de controle $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ e $P_3(40, 5)$. Então, na mesma tela, trace os segmentos P_0P_1, P_1P_2 e P_2P_3. (O Exercício 31 na Seção 10.1 mostra como fazer isso.) Observe que os pontos de controle intermediários P_1 e P_2 não estão na curva; a curva começa em P_0, vai em direção a P_1 e P_2 sem tocá-los, e termina em P_3.
2. A partir do gráfico no Problema 1, parece que a tangente em P_0 passa por P_1 e a tangente em P_3 passa por P_2. Demonstre isso.
3. Tente produzir uma curva de Bézier com um laço mudando o segundo ponto de controle no Problema 1.
4. Algumas impressoras a laser usam as curvas de Bézier para representar letras e outros símbolos. Experimente com pontos de controle até você encontrar uma curva de Bézier que dê uma representação razoável da letra C.
5. Formatos mais complexos podem ser representados juntando-se duas ou mais curvas de Bézier. Suponha que a primeira curva de Bézier tenha pontos de controle P_0, P_1, P_2, P_3 e a segunda tenha pontos de controle P_3, P_4, P_5, P_6. Se quisermos que essas duas partes se juntem de modo liso, então as tangentes em P_3 devem coincidir, e os pontos P_2, P_3 e P_4 devem estar nessa reta tangente comum. Usando esse princípio, encontre os pontos de controle para um par de curvas de Bézier que represente a letra S.

10.3 Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas. Até agora usamos as coordenadas cartesianas, que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares. Nesta seção descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

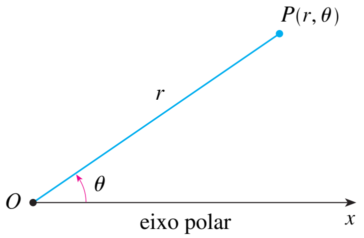


FIGURA 1

Escolhemos um ponto no plano chamado **polo** (ou origem) e está rotulado de O. Então desenhamos uma meia linha começando em O chamada **eixo polar** . Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta OP, como na Figura 1. Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) e r, θ são chamados **coordenadas polares** P. Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.

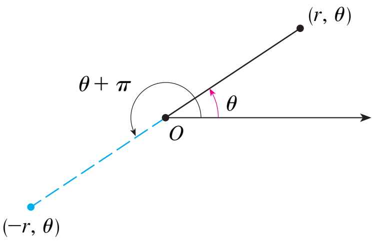


FIGURA 2

Estendemos o significado de coordenadas polares (r, θ) para o caso no qual r é negativo convencionando que, como na Figura 2, os pontos $(-r, \theta)$ e (r, θ) estão na mesma reta passando por O e estão à mesma distância $|r|$ a partir de O, mas em lados opostos de O. Se $r > 0$, o ponto (r, θ) está no mesmo quadrante que θ; se $r < 0$, ele está no quadrante do lado oposto ao polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

EXEMPLO 1 Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas.

(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUÇÃO Os pontos estão marcados na Figura 3. Na parte (d) o ponto $(-3, 3\pi/4)$ está localizado três unidades a partir do polo no quarto quadrante, porque o ângulo $3\pi/4$ está no segundo quadrante e $r = -3$ é negativo.

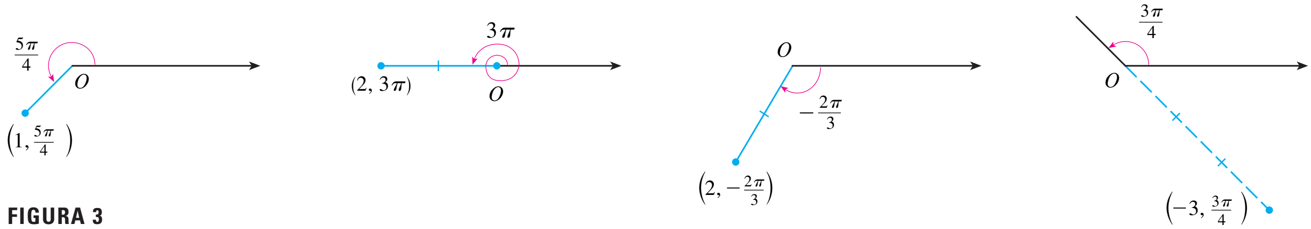


FIGURA 3

No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. Por exemplo, o ponto $(1, 5\pi/4)$ no Exemplo 1(a) poderia ser escrito como $(1, -3\pi/4)$ ou $(1, 13\pi/4)$ ou $(-1, \pi/4)$. (Veja a Figura 4.)

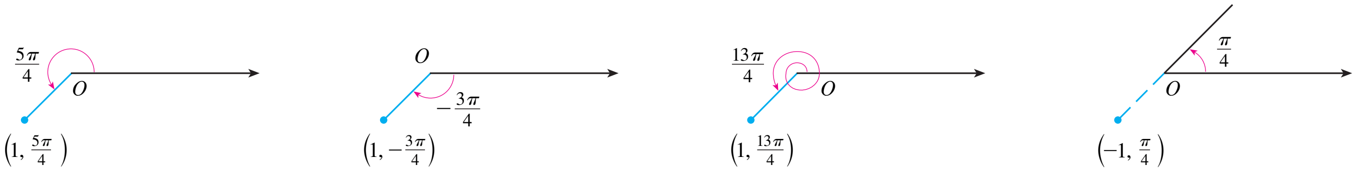


FIGURA 4

De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π, o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) é também representado por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{e} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

onde n é qualquer inteiro.

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 5, na qual o polo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir da figura, temos

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$$

e também

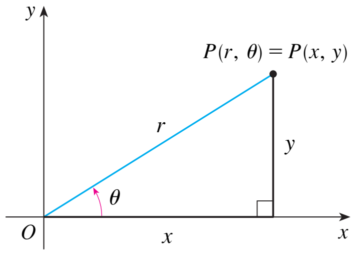


FIGURA 5

$$\boxed{1} \qquad \boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta}$$

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 5, que ilustra o caso onde $r > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$, essas equações são válidas para todos os valores de r e θ. (Veja a definição geral de sen θ e cos θ no Apêndice D, no Volume I.)

As Equações 1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontrarmos r e θ quando x e y são conhecidos, usamos as equações

$$\boxed{2} \qquad \boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}}$$

que podem ser deduzidas a partir das Equações 1 ou simplesmente lidas a partir da Figura 5.

EXEMPLO 2 Converta o ponto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares para cartesianas.

SOLUÇÃO Como $r = 2$ e $\theta = \pi/3$, as Equações 1 fornecem

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Portanto, o ponto é $(1, \sqrt{3})$ nas coordenadas cartesianas.

EXEMPLO 3 Represente o ponto com coordenadas cartesianas $(1, -1)$ em termos de coordenadas polares.

SOLUÇÃO Se escolhermos r positivo, então a Equação 2 fornece

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como o ponto $(1, -1)$ está no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$. Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; e outra é $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

OBSERVAÇÃO As Equações 2 não determinam univocamente θ quando x e y são dados, porque, à medida que θ aumenta no intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cada valor de $\operatorname{tg} \theta$ ocorre duas vezes. Portanto, para converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares, não é apenas suficiente encontrar r e θ que satisfaçam as Equações 2. Como no Exemplo 3, devemos escolher θ de modo que o ponto (r, θ) esteja no quadrante correto.

Curvas Polares

O **gráfico de uma equação polar** $r = f(\theta)$, ou mais genericamente, $F(r, \theta) = 0$, consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação.

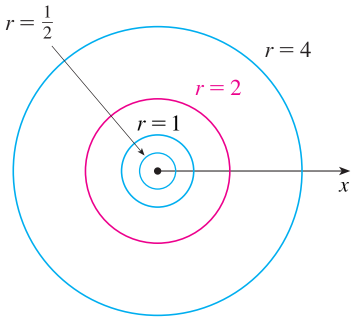


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Que curva é representada pela equação polar $r = 2$?

SOLUÇÃO A curva consiste em todos os pontos (r, θ) com $r = 2$. Como r representa a distância do ponto ao polo, a curva $r = 2$ representa o círculo com centro O e raio 2. Em geral, a equação $r = a$ representa um círculo com centro O e raio $|a|$. (Veja a Figura 6.)

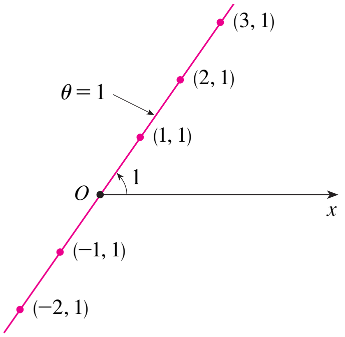


FIGURA 7

EXEMPLO 5 Esboce a curva polar $\theta = 1$.

SOLUÇÃO Essa curva consiste em todos os pontos (r, θ) tal que o ângulo polar θ é 1 radiano. É uma reta que passa por O e forma um ângulo de 1 radiano com o eixo polar (veja a Figura 7). Observe que os pontos $(r, 1)$ na reta com $r > 0$ estão no primeiro quadrante, enquanto aqueles com $r < 0$ estão no terceiro quadrante.

EXEMPLO 6

(a) Esboce a curva com equação polar $r = 2 \cos \theta$.

(b) Encontre a equação cartesiana para essa curva.

SOLUÇÃO

(a) Na Figura 8 encontramos os valores de r para alguns valores convenientes de θ e marcamos os pontos correspondentes (r, θ). Então juntamos esses pontos para esboçar a curva, que parece ser um círculo. Usamos os valores de θ apenas entre 0 e π, já que, se deixarmos θ aumentar além de π, obtemos os mesmos pontos novamente.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

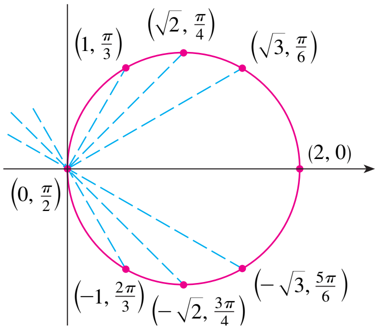

$(1, \frac{\pi}{3})$
$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
$(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$
$(2, 0)$
$(0, \frac{\pi}{2})$
$(-1, \frac{2\pi}{3})$
$(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$
$(-\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$

FIGURA 8
Tabela de valores e gráfico de $r = 2\cos\theta$

(b) Para convertermos a equação dada em uma equação cartesiana, usamos as Equações 1 e 2. A partir de $x = r\cos\theta$, temos $\cos\theta = x/r$; assim, a equação $r = 2\cos\theta$ torna-se $r = 2x/r$, que fornece

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando o quadrado, obtemos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que é uma equação do círculo com centro (1, 0) e raio 1.

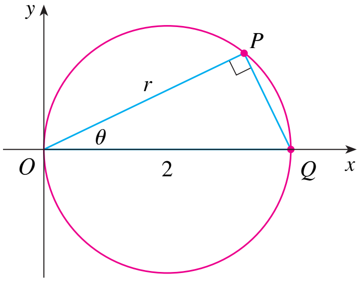


FIGURA 9

A Figura 9 mostra em uma ilustração geométrica que o círculo no Exemplo 6 tem a equação $r = 2\cos\theta$. O ângulo OPQ é um ângulo reto (por quê?) e assim $r/2 = \cos\theta$.

EXEMPLO 7 Esboce a curva polar $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUÇÃO Em vez de marcarmos os pontos como no Exemplo 6, primeiro esboçamos o gráfico de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas *cartesianas* na Figura 10 pelo deslocamento da curva seno uma unidade para cima. Isso nos permite ler de uma vez os valores de r que correspondem aos valores crescentes de θ. Por exemplo, vemos que, quando θ aumenta de 0 até $\pi/2$, r (a distância a partir de O) aumenta de 1 até 2, assim esboçamos a parte correspondente da curva polar na Figura 11(a). Quando θ aumenta de $\pi/2$ até π, a Figura 10 mostra que r diminui de 2 até 1, e dessa forma esboçamos a próxima parte da curva como na Figura 11(b). Quando θ aumenta de π até $3\pi/2$, r diminui de 1 para 0, como apresentado na parte (c). Finalmente, quando θ aumenta de $3\pi/2$ até 2π, r aumenta de 0 para 1, como mostrado na parte (d). Se deixássemos θ aumentar além de 2π ou diminuir além de 0, simplesmente retraçaríamos nossa trajetória. Juntando as partes da curva nas Figuras 11(a)–(d), esboçamos a curva completa na parte (e). Ela é chamada **cardioide**, porque tem o formato parecido com o de um coração.

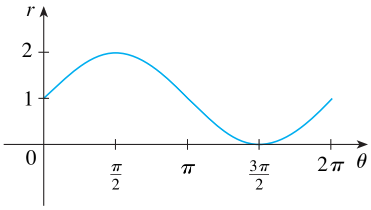
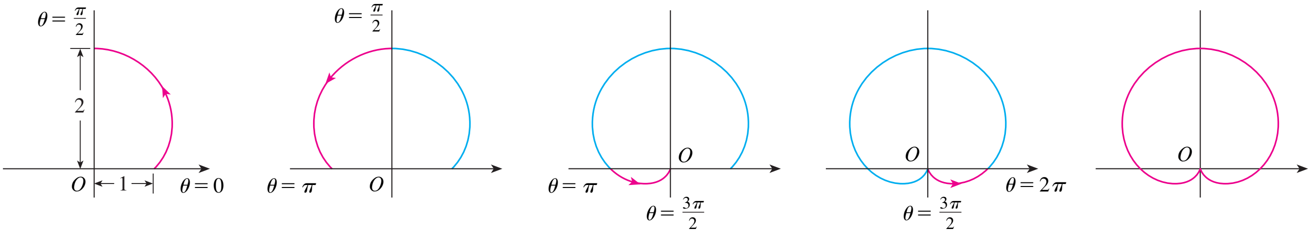


FIGURA 10
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



(a) (b) (c) (d) (e)

FIGURA 11 Estágios do esboço da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

EXEMPLO 8 Esboce a curva $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 7, fizemos o esboço de $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, em coordenadas cartesianas na Figura 12. Quando θ aumenta de 0 até $\pi/4$, a Figura 12 mostra que r diminui de 1 até 0, e assim desenhamos a parte correspondente da curva polar na Figura 13 (indicada por ①. Conforme θ aumenta de $\pi/4$ até $\pi/2$, r vai de 0 a -1. Isso significa que a distância de O aumenta de 0 até 1, mas, em vez de ser no primeiro quadrante, essa parte da curva polar (indicada por ②) está no lado oposto ao polo no terceiro quadrante. O restante da curva é desenhado de uma maneira semelhante, com números e setas indicando a ordem na qual as partes são traçadas. A curva resultante tem quatro laços e é denominada **rosácea de quatro pétalas**.

TEC O *Module 10.3* ajuda você a ver como as curvas polares são traçadas mostrando animações similares às Figuras 10–13.

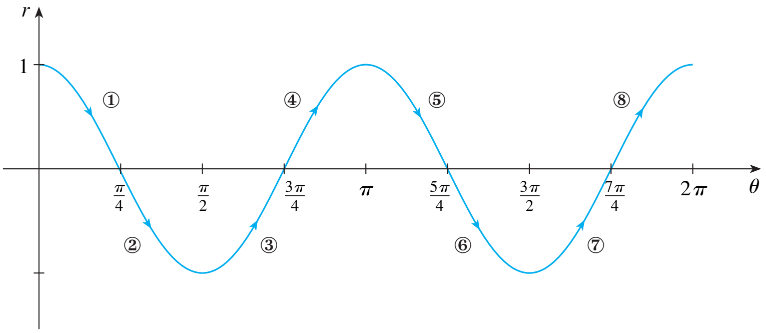


FIGURA 12

$r = \cos 2\theta$ em coordenadas cartesianas

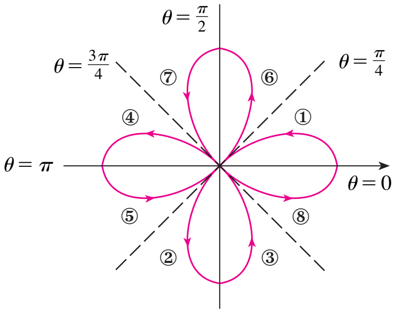


FIGURA 13

Rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$

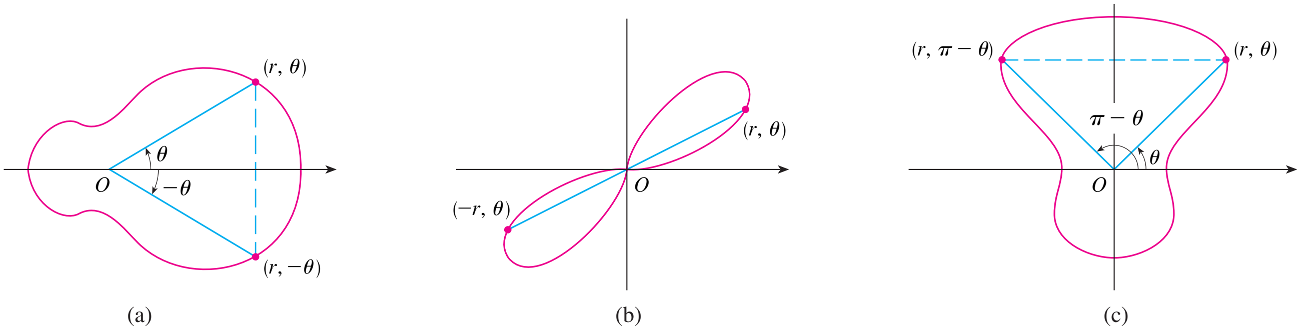
Simetria

Ao esboçar curvas polares, lembre-se de que é útil algumas vezes levar em conta a simetria. As três regras seguintes são explicadas pela Figura 14.

(a) Se uma equação polar não mudar quando θ for trocado por $-\theta$, a curva será simétrica em relação ao eixo polar.

(b) Se a equação não mudar quando r for trocado por $-r$, ou quando θ for trocado por $\theta + \pi$, a curva será simétrica em relação ao polo. (Isso significa que a curva permanecerá inalterada se a girarmos 180° em torno da origem.)

(c) Se a equação não mudar quando θ for trocado por $\pi - \theta$, a curva será simétrica em relação à reta vertical $\theta = \pi/2$.



(a) (b) (c)

FIGURA 14

As curvas nos Exemplos 6 e 8 são simétricas em relação ao eixo polar, pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$. As curvas nos Exemplos 7 e 8 são simétricas em relação à $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ e $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. A rosácea de quatro pétalas é também simétrica em relação ao polo. Essas propriedades de simetria poderiam ser usadas para esboçar as curvas. Por exemplo, no Exemplo 6 só precisaríamos ter marcado pontos para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ e então refleti-los em torno do eixo polar para obter o círculo completo.

Tangentes a Curvas Polares

Para encontrarmos a reta tangente a uma curva polar $r = f(\theta)$, vamos considerar θ como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas parametrizadas (Equação 10.2.2) e a Regra do Produto, temos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde $dy/d\theta = 0$ (desde que $dx/d\theta \neq 0$). Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde $dx/d\theta = 0$ (desde que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que, se estivermos olhando para as retas tangentes no polo, então $r = 0$ e a Equação 3 é simplificada para

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{se} \qquad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

Por exemplo, no Exemplo 8 achamos que $r = \cos 2\,\theta = 0$ quando $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$. Isso significa que as retas $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ (ou $y = x$ e $y = -x$) são retas tangentes a $r = \cos 2\,\theta$ na origem.

EXEMPLO 9

(a) Para a cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ do Exemplo 7, calcule a inclinação da reta tangente quando $\theta = \pi/3$.

(b) Encontre os pontos na cardioide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

SOLUÇÃO Usando a Equação 3 com $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\,\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

(a) A inclinação da tangente no ponto no qual $\theta = \pi/3$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}/2)(1-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, existem tangentes horizontais nos pontos $(2, \pi/2)$, $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$, $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$ e tangentes verticais em $(\frac{3}{2}, \pi/6)$ e $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$. Quando $\theta = 3\pi/2$, $dy/d\theta$ e $dx/d\theta$ são 0 e, dessa forma, devemos ser cuidadosos. Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1+2\operatorname{sen}\theta}{1-2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

Por simetria,

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

Então, existe uma reta tangente vertical no polo (veja a Figura 15).

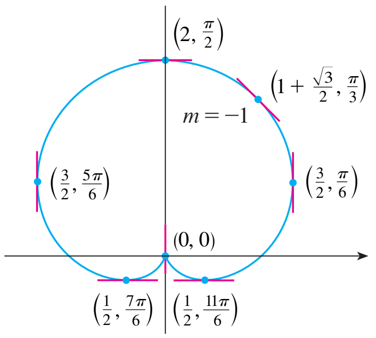

$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$
$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$
$m = -1$
$\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$
$\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$
$(0, 0)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

FIGURA 15

Retas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

OBSERVAÇÃO Em vez de lembrarmos a Equação 3, poderíamos empregar o método usado para deduzi-la. Por exemplo, no Exemplo 9, poderíamos ter escrito

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Portanto, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que é equivalente à nossa expressão prévia.

Traçando Curvas Polares com Ferramentas Gráficas

Embora seja útil saber esboçar as curvas polares simples manualmente, precisamos usar uma calculadora gráfica ou um computador quando nos deparamos com curvas complicadas, como as mostradas nas Figuras 16 e 17.

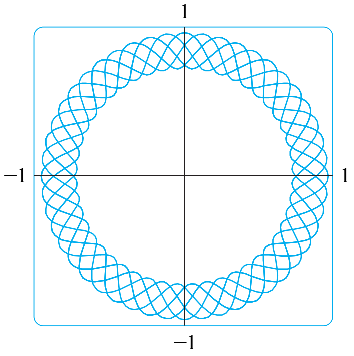


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^2(2{,}4\theta) + \cos^4(2{,}4\theta)$

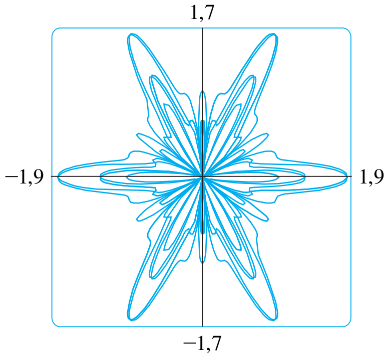


FIGURA 17
$r = \operatorname{sen}^2(1{,}2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Algumas ferramentas gráficas têm comandos que nos permitem traçar curvas polares diretamente. Com outras máquinas precisamos fazer a conversão para curvas parametrizadas primeiro. Neste caso, tomamos a equação polar $r = f(\theta)$ e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algumas máquinas requerem que o parâmetro seja denominado t em vez de θ.

EXEMPLO 10 Trace a curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUÇÃO Vamos assumir que nossa ferramenta gráfica não tenha um comando para traçar as curvas polares. Neste caso, precisamos trabalhar com as equações paramétricas correspondentes, que são

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para θ. Então nos perguntamos: quantas rotações completas são necessárias até que a curva comece a se repetir? Se a resposta for n,

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que $16n\pi/5$ seja um múltiplo par de π. Isso ocorrerá primeiro quando $n = 5$. Portanto, traçamos a curva inteira se especificarmos que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Trocando de θ para t, temos as equações

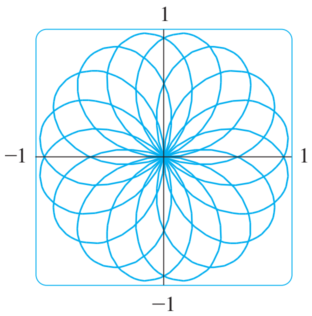


FIGURA 18
$r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \text{sen}(8t/5)\,\text{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

e a Figura 18 nos mostra a curva resultante. Observe que essa rosácea tem 16 laços.

EXEMPLO 11 Investigue a família de curvas polares dada por $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$. Como o formato muda conforme c varia? (Essas curvas são chamadas **limaçons**, que em francês significa caracol, por causa do formato dessas curvas para certos valores de c.)

SOLUÇÃO A Figura 19 mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de c. Para $c > 1$, há uma volta que é decrescente em tamanho conforme c diminui. Quando $c = 1$, o laço desaparece e a curva torna-se a cardioide que esboçamos no Exemplo 7. Para c entre 1 e $\frac{1}{2}$, a cúspide da cardioide é suavizada e torna-se uma "covinha". Quando c diminui de $\frac{1}{2}$ para 0, a limaçon parece oval. Essa oval se torna mais circular quando $c \to 0$ e quando $c = 0$, a curva é apenas o círculo $r = 1$.

No Exercício 53 pediremos que você demonstre analiticamente o que descobriu a partir dos gráficos na Figura 19.

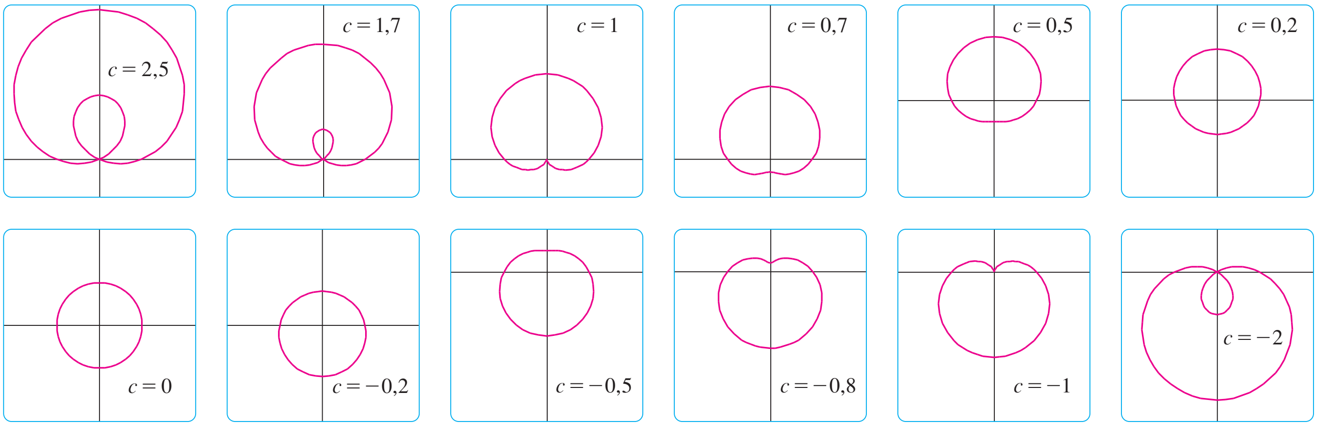


FIGURA 19
Membros da família de limaçons $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$

As partes restantes da Figura 19 mostram que, quando c se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa. De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com c positivo.

Limaçons surgem do estudo de movimento planetário. Em particular, a trajetória de Marte, vista do planeta Terra, tem sido modelada como um limaçon com uma volta, como partes da Figura 19 com $|c| > 1$.

10.3 Exercícios

1–2 Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com $r > 0$ e o outro com $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3–4 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5–6 As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas.

(i) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r > 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(ii) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r < 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

5. (a) $(2, -2)$ (b) $(-1, \sqrt{3})$

6. (a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(1, -2)$

7–12 Esboce a região no plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $0 \leqslant r < 2, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

9. $r \geqslant 0, \quad \pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4$

10. $1 \leqslant r \leqslant 3, \quad \pi/6 < \theta < 5\pi/6$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Dicas de Lição de Casa estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares $(2, \pi/3)$ e $(4, 2\pi/3)$.

14. Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

15–20 Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada.

15. $r = 2$

16. $r \cos \theta = 1$

17. $r = 2 \cos \theta$

18. $\theta = \pi/3$

19. $r^2 \cos 2\theta = 1$

20. $r = \text{tg}\,\theta \sec \theta$

21–26 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

21. $y = 2$

22. $y = x$

23. $y = 1 + 3x$

24. $4y^2 = x$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$

26. $xy = 4$

27–28 Para cada uma das curvas descritas, decida se a curva seria mais facilmente dada por uma equação polar ou por uma equação cartesiana. Então, escreva uma equação para a curva.

27. (a) Uma reta que passa pela origem e forma um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x positivo.
(b) Uma reta vertical pelo ponto $(3, 3)$.

28. (a) Um círculo com raio 5 e centro $(2, 3)$.
(b) Um círculo com centro na origem e raio 4.

29–46 Esboce uma curva com a equação polar dada primeiro esboçando o gráfico de r como função de θ em coordenadas cartesianas.

29. $r = -2 \,\text{sen}\, \theta$

30. $r = 1 - \cos \theta$

31. $r = 2(1 + \cos \theta)$

32. $r = 1 + 2 \cos \theta$

33. $r = \theta, \theta \geqslant 0$

34. $r = \ln \theta, \theta \geqslant 1$

35. $r = 4 \,\text{sen}\, 3\theta$

36. $r = \cos 5\theta$

37. $r = 2 \cos 4\theta$

38. $r = 3 \cos 6\theta$

39. $r = 1 - 2 \,\text{sen}\, \theta$

40. $r = 2 + \text{sen}\, \theta$

41. $r^2 = 9 \,\text{sen}\, 2\theta$

42. $r^2 = \cos 4\theta$

43. $r = 2 + \text{sen}\, 3\theta$

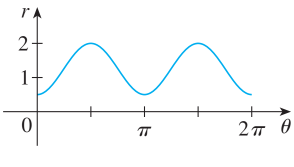
44. $r^2\theta = 1$

45. $r = 1 + 2 \cos 2\theta$

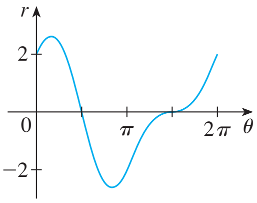
46. $r = 3 + 4 \cos \theta$

47–48 A figura mostra o gráfico de r como uma função de o em coordenadas cartesianas. Use-o para esboçar a curva polar correspondente.

47.



48.



49. Mostre que a curva polar $r = 4 + 2 \sec \theta$ (chamada **conchoide**) tem a reta $x = 2$ como uma assíntota vertical mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

50. Mostre que a curva $r = 2 - \text{cossec}\, \theta$ (também uma conchoide) tem a reta $y = -1$ como uma assíntota horizontal mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} y = -1$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

51. Mostre que a curva $r = \text{sen}\, \theta \,\text{tg}\, \theta$ (denominada **cissoide de Diocles**) tem a reta $x = 1$ como uma assíntota vertical. Mostre também que a curva está inteiramente dentro da faixa vertical $0 \leqslant x < 1$. Use esses fatos para ajudar a esboçar a cissoide.

52. Esboce a curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$.

53. (a) No Exemplo 11 os gráficos sugerem que a limaçon $r = 1 + c \,\text{sen}\, \theta$ tem um laço interno quando $|c| > 1$. Demonstre que isso é verdadeiro e encontre os valores de θ que correspondam ao laço interno.
(b) A partir da Figura 19 parece que a limaçon perde sua covinha quando $c = \frac{1}{2}$. Demonstre isto.

54. Associe as curvas polares com seus respectivos gráficos I–VI. Dê razões para suas escolhas. (Não use uma ferramenta gráfica.)

(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

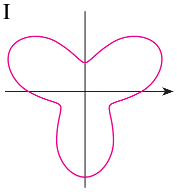
(c) $r = \cos(\theta/3)$

(d) $r = 1 + 2 \cos \theta$

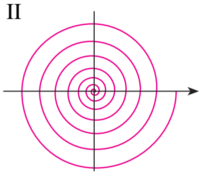
(e) $r = 2 + \text{sen}\, 3\theta$

(f) $r = 1 + 2 \,\text{sen}\, 3\theta$

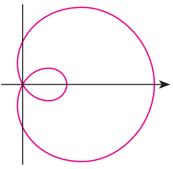
I



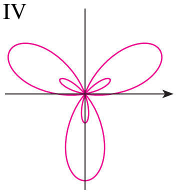
II



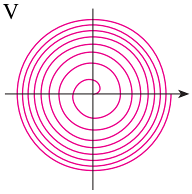
III



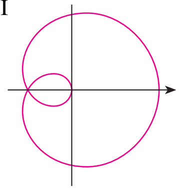
IV



V



VI



55–60 Calcule a inclinação da reta tangente para a curva polar dada no ponto especificado pelo valor de θ.

55. $r = 2 \,\text{sen}\, \theta, \quad \theta = \pi/6$

56. $r = 2 - \text{sen}\, \theta, \quad \theta = \pi/3$

57. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

58. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

59. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

60. $r = 1 + 2 \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$

61–64 Encontre os pontos na curva dada onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

61. $r = 3 \cos \theta$

62. $r = 1 - \text{sen}\, \theta$

63. $r = 1 + \cos \theta$

64. $r = e^{\theta}$

65. Mostre que a equação polar $r = a \,\text{sen}\, \theta + b \cos \theta$, para a qual $ab \neq 0$, representa um círculo e calcule seu centro e o raio.

66. Mostre que as curvas $r = a \,\text{sen}\, \theta$ e $r = a \cos \theta$ se interceptam com ângulos retos.

67–72 Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva polar. Escolha o intervalo do parâmetro para ter certeza de que você fez a curva inteira.

67. $r = 1 + 2\,\text{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

68. $r = \sqrt{1 - 0{,}8\,\text{sen}^2\theta}$ (hipopédia)

69. $r = e^{\text{sen}\,\theta} - 2\cos(4\theta)$ (curva em borboleta)

70. $r = |\text{tg}\,\theta|^{|\text{cotg}\,\theta|}$ (curva valentina)

71. $r = 1 + \cos^{999}\theta$ (curva de PacMan)

72. $r = \text{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

73. Como os gráficos $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/6)$ e $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/3)$ estão relacionados ao gráfico $r = 1 + \text{sen}\,\theta$? Em geral, como o gráfico de $r = f(\theta - \alpha)$ está relacionado ao gráfico de $r = f(\theta)$?

74. Use um gráfico para estimar a coordenada dos pontos mais altos na curva $r = \text{sen}\,2\theta$. Então, use o cálculo para encontrar o valor exato.

75. Investigue a família de curvas dadas por $r = 1 + c\cos\theta$, em que c é um número real. Como o formato muda conforme c varia?

76. Investigue a família de curvas dada por

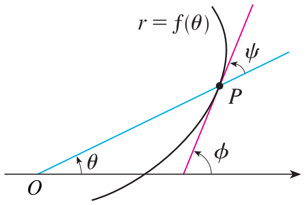
$$r = 1 + \cos^n\theta$$

onde n é um inteiro positivo. Como muda o formato quando n aumenta? O que acontece quando n se torna maior? Explique a forma para o n maior considerando o gráfico de r como uma função de θ nas coordenadas cartesianas.

77. Seja P um ponto qualquer (exceto a origem) na curva $r = f(\theta)$. Se ψ for o ângulo entre a reta tangente em P e a reta radial OP, mostre que

$$\text{tg}\,\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Dica*: Observe que $\psi = \phi - \theta$ na figura.]



78. (a) Use o Exercício 77 para mostrar que o ângulo entre a reta tangente e a reta radial é $\psi = \pi/4$ em cada ponto na curva $r = e^{\theta}$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente aos pontos onde $\theta = 0$ e $\pi/2$.

(c) Demonstre que qualquer curva polar $r = f(\theta)$, com a propriedade de que o ângulo ψ entre a reta radial e a reta tangente é uma constante, deve ser do tipo $r = Ce^{k\theta}$, onde C e k são constantes.

PROJETO DE LABORATÓRIO FAMÍLIAS DE CURVAS POLARES

Neste projeto você irá descobrir formas interessantes e bonitas que membros das famílias de curvas polares podem fazer. Você também irá ver como a forma da curva muda conforme você varia as constantes.

1. (a) Investigue a família de curvas definidas pelas equações polares $r = \text{sen}\,n\theta$, onde n é um inteiro positivo. Como o número de laços está relacionado a n?

(b) O que aconteceria se a equação na parte (a) fosse trocada por $r = |\text{sen}\,n\theta|$?

2. Uma família de curvas é dada pelas equações $r = 1 + c\,\text{sen}\,n\theta$, onde c é um número real e n é um inteiro positivo. Como o gráfico muda quando n aumenta? Como ele muda quando c varia? Ilustre traçando membros suficientes da família para justificar suas conclusões.

3. Uma família de curvas tem equações polares

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Investigue como o gráfico muda quando o número a varia. Em particular, você deveria identificar os valores de transição de a para os quais o formato básico da curva muda.

4. O astrônomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudou a família de curvas com equações polares

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

para as quais a e c são números reais positivos. Essas curvas são chamadas **ovais de Cassini**, mesmo que elas sejam ovais apenas para alguns valores de a e c. (Cassini pensava que essas curvas poderiam representar as órbitas dos planetas melhor que as elipses de Kepler.) Investigue a variedade de formas que essas curvas podem ter. Em particular, como estão relacionados a e c quando a curva se divide em duas partes?

10.4 Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

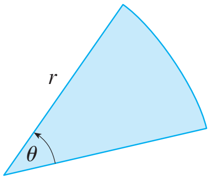


FIGURA 1

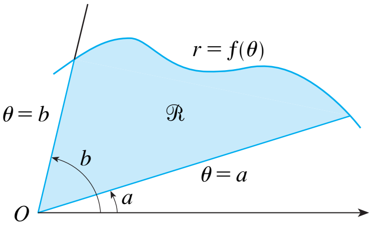


FIGURA 2

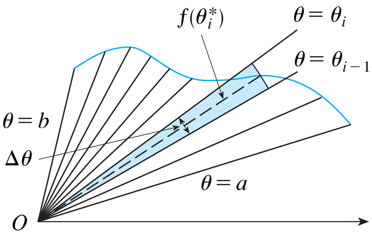


FIGURA 3

Nesta seção deduziremos a fórmula para a área de uma região cuja fronteira é dada por uma equação polar. Precisamos usar a fórmula para a área de um setor de um círculo:

1
$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$

onde, como na Figura 1, r é o raio e θ, a medida em radianos do ângulo central. A Fórmula [1 segue do fato de que a área de um setor é proporcional a seu ângulo central] $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. (Veja também o Exercício 35, na Seção 7.3, no Volume I.)

Seja $\mathcal{R}$ a região ilustrada na Figura 2, limitada pela curva polar $r = f(\theta)$ e pelos raios $\theta = a$ e $\theta = b$, onde f é uma função contínua positiva e onde $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos com extremidades $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e larguras iguais a $\Delta\theta$. Os raios $\theta = \theta_i$ podem dividir $\mathcal{R}$ em n regiões menores com ângulos centrais $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Se escolhermos θ_i^* no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, então a área ΔA_i da i-ésima região será aproximada pela área do setor de um círculo com ângulo central $\Delta\theta$ e raio $f(\theta_i^*)$. (Veja a Figura 3.)

Então, a partir da Fórmula 1 temos

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

e, assim, uma aproximação para a área total A de $\mathcal{R}$ é

2
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

A partir da Figura 3 parece que a aproximação em $\boxed{2}$ melhora quando $n \to \infty$. Mas as somas em $\boxed{2}$ são as somas de Riemann para a função $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Portanto, parece plausível (e de fato pode ser demonstrado) que a fórmula para a área A da região polar $\mathcal{R}$ é

3
$$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta}$$

A Fórmula 3 é frequentemente escrita como

4
$$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta}$$

subentendendo que $r = f(\theta)$. Observe a similaridade entre as Fórmulas 1 e 4.

Quando aplicamos a Fórmula 3 ou 4, é interessante pensar na área como sendo varrida por um raio em rotação que passa por O e que começa com ângulo a e termina com ângulo b.

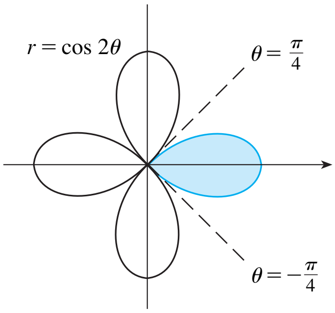


FIGURA 4

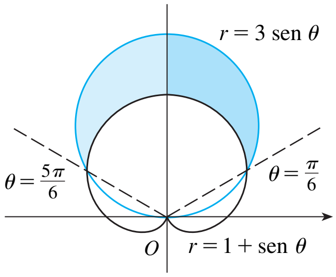
EXEMPLO 1 Calcule a área delimitada por um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO A curva $r = \cos 2\theta$ foi esboçada no Exemplo 8 na Seção 10.3. Observe a partir da Figura 4 que a região delimitada pelo laço direito é varrida pelo raio que gira de $\theta = -\pi/4$ até $\theta = \pi/4$. Dessa forma, a Fórmula 4 fornece

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta = \int_{0}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta$$

$$A = \int_{0}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

EXEMPLO 2 Calcule a área da região que está dentro do círculo $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ e fora da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.



$r = 3 \operatorname{sen} \theta$
$\theta = \frac{5\pi}{6}$
$\theta = \frac{\pi}{6}$
O
$r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

FIGURA 5

SOLUÇÃO A cardioide (veja o Exemplo 7 da Seção 10.3) e o círculo estão esboçados na Figura 5, e a região desejada está sombreada. Os valores de a e b na Fórmula 4 são determinados achando-se os pontos de intersecção das duas curvas. Elas se interceptam quando $3 \operatorname{sen} \theta = 1 + \operatorname{sen} \theta$, o que fornece $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$, ou seja, $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. A área desejada pode ser encontrada pela subtração da área dentro da cardioide entre $\theta = \pi/6$ e $\theta = 5\pi/6$ da área dentro do círculo de $\pi/6$ até $5\pi/6$. Logo,

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen} \theta)^2 \, d\theta - \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen} \theta)^2 \, d\theta$$

Como a região é simétrica em relação ao eixo $\theta = \pi/2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= 2\left[\tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta - \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2\theta) \, d\theta\right] \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4 \cos 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \qquad \left[\text{porque } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] \\ &= 3\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + 2 \cos \theta \Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi \end{aligned}$$

O Exemplo 2 ilustra o procedimento para encontrar a área da região delimitada por duas curvas polares. Em geral, seja $\mathcal{R}$ uma região, como ilustrado na Figura 6, que é limitada pelas curvas com as equações polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ e $\theta = b$, onde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ e $0 < b - a \leqslant 2\pi$. A área A de $\mathcal{R}$ é calculada pela subtração da área dentro de $r = g(\theta)$ da área dentro de $r = f(\theta)$; assim, usando a Fórmula 3 temos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2 \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta \end{aligned}$$

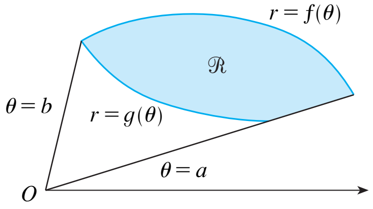
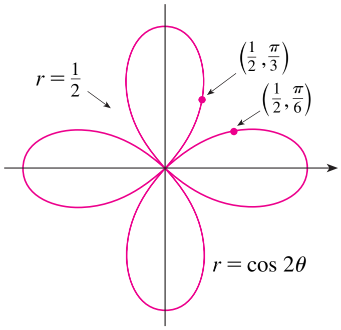


FIGURA 6

ATENÇÃO O fato de que um único ponto tem muitas representações em coordenadas polares algumas vezes torna difícil encontrar todos os pontos de intersecção de duas curvas polares. Por exemplo, é óbvio a partir da Figura 5 que o círculo e a cardioide têm três pontos de intersecção; contudo, no Exemplo 2, resolvemos as equações $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ e $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ e encontramos apenas dois pontos, $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. A origem também é um ponto de intersecção, mas não pudemos encontrá-lo resolvendo as equações para as curvas, pois a origem não tem uma única representação em coordenadas polares que satisfaça ambas as equações. Observe que, quando representada como $(0, 0)$ ou $(0, \pi)$, a origem satisfaz $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ e, assim, está no círculo; quando representada como $(0, 3\pi/2)$, satisfaz $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ e dessa forma, está na cardioide. Imagine dois pontos se movendo ao londo das curvas conforme o valor do parâmetro θ aumenta de 0 a 2π. Em uma curva a origem é alcançada em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$; na outra curva, ela é atingida em $\theta = 3\pi/2$. Os pontos não colidem na origem, porque eles a alcançam em tempos diferentes, mas de qualquer modo as curvas se interceptam.

Então, para encontrar todos os pontos de intersecção de duas curvas polares, é recomendável que você desenhe os gráficos de ambas as curvas. É especialmente conveniente usar uma calculadora gráfica ou um computador para ajudar nessa tarefa.



$r = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$
$r = \cos 2\theta$

FIGURA 7

EXEMPLO 3 Encontre todos os pontos de intersecção das curvas $r = \cos 2\theta$ e $r = \frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Se resolvermos as equações $r = \cos 2\theta$ e $r = \frac{1}{2}$, obteremos $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ e, portanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Então, os valores de θ entre 0 e 2π que satisfazem ambas as equações são $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Encontramos quatro pontos de intersecção: $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Contudo, você pode ver a partir da Figura 7 que as curvas têm outros quatro pontos de intersecção, a saber: $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Esses podem ser encontrados usando-se simetria ou observando que outra equação do círculo é $r = -\frac{1}{2}$ e então resolvendo as equações $r = \cos 2\theta$ e $r = -\frac{1}{2}$.

Comprimento de Arco

Para calcularmos o comprimento de uma curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, nos referimos a θ como um parâmetro e escrevemos as equações paramétricas da curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Usando a Regra do Produto e derivando em relação a θ, obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$

assim, usando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &\quad + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\end{aligned}$$

Assumindo que f' é contínua, podemos usar o Teorema 10.2.5 para escrever o comprimento de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Portanto, o comprimento da curva com equação polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, é

5

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

V **EXEMPLO 4** Calcule o comprimento da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUÇÃO A cardidoide é mostrada na Figura 8. (Esboçamos no Exemplo 7 na Seção 10.3.) Seu comprimento total é dado pelo intervalo do parâmetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, então a Fórmula 5 dá

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\theta}\, d\theta\end{aligned}$$

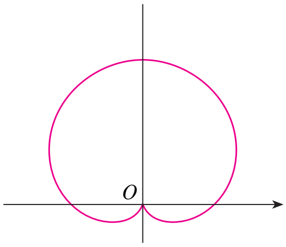


FIGURA 8
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Poderíamos calcular essa integral pela multiplicação e divisão do integrando por $\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$, ou poderíamos usar um sistema de computação algébrica. De qualquer maneira, calculamos que o comprimento da cardioide é $L = 8$. ■

10.4 Exercícios

1–4 Encontre a área da região que é delimitada pelas curvas dadas e está no setor especificado.

1. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$

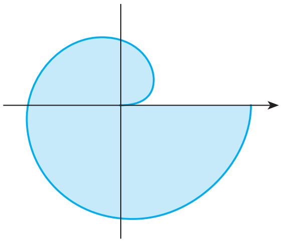
2. $r = e^{\theta/2}, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

3. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta, \quad r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

4. $r = \operatorname{tg} \theta, \ \pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

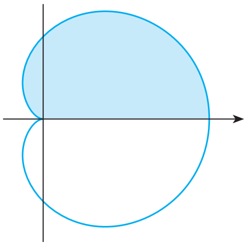
5–8 Encontre a área da região sombreada.

5.



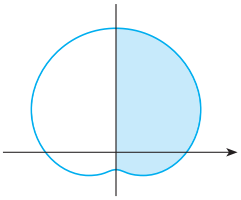
$r = \sqrt{\theta}$

6.



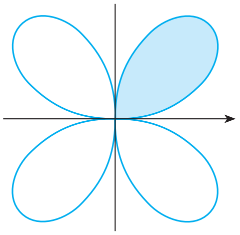
$r = 1 + \cos\theta$

7.



$r = 4 + 3 \operatorname{sen}\theta$

8.



$r = \operatorname{sen} 2\theta$

9–12 Esboce a curva e calcule a área delimitada por ela.

9. $r = 2 \operatorname{sen}\theta$

10. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

11. $r = 3 + 2\cos\theta$

12. $r = 4 + 3 \operatorname{sen}\theta$

13–16 Trace a curva e calcule a área delimitada por ela.

13. $r = 2 \operatorname{sen} 4\theta$

14. $r = 3 - 2\cos 4\theta$

15. $r = \sqrt{1 + \cos^2(5\theta)}$

16. $r = 1 + 5 \operatorname{sen} 6\theta$

17–21 Encontre a área da região dentro de um laço da curva.

17. $r = 4\cos 3\theta$

18. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

20. $r = 2 \operatorname{sen} 5\theta$

21. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}\theta$ (laço interno)

22. [Calcule a área delimitada pelo laço do **estrofoide**] $r = 2\cos\theta - \sec\theta$.

23–28 Encontre a área da região que está dentro da primeira curva e fora da segunda curva.

23. $r = 2\cos\theta, \quad r = 1$

24. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta, \quad r = 1$

25. $r^2 = 8\cos 2\theta, \quad r = 2$

26. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta, \quad r = 3 \operatorname{sen}\theta$

27. $r = 3\cos\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$

28. $r = 3 \operatorname{sen}\theta, \quad r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

29–34 Encontre a área da região que está dentro de ambas as curvas.

29. $r = \sqrt{3}\cos\theta, \quad r = \operatorname{sen}\theta$

30. $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

31. $r = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2\cos\theta, \quad r = 3 + 2 \operatorname{sen}\theta$

33. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

34. $r = a \operatorname{sen}\theta, \quad r = b\cos\theta, \quad a > 0, b > 0$

35. Encontre a área dentro do laço maior e fora do laço menor da $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

36. [Ache a área entre o laço maior e o laço menor da curva] $r = 1 + 2\cos 3\theta$.

37–42 Encontre todos os pontos de intersecção das curvas dadas.

37. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta, \quad r = 3 \operatorname{sen}\theta$

38. $r = 1 - \cos\theta, \quad r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

39. $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = 1$

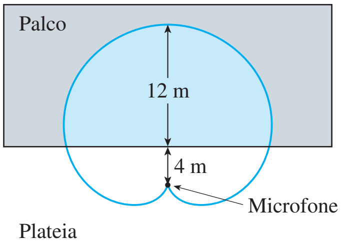
40. $r = \cos 3\theta, \quad r = \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r = \operatorname{sen}\theta, \quad r = \operatorname{sen} 2\theta$

42. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

43. Os pontos de intersecção da cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e do laço espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, não podem ser encontrados exatamente. Use uma ferramenta gráfica para encontrar os valores aproximados de θ nos quais eles se interceptam. Então, use esses valores para estimar a área que está dentro de ambas as curvas.

44. Ao gravarem apresentações ao vivo, os engenheiros de som usam um padrão de captação em forma de cardioide, pois ele suprime o barulho da audiência. Suponha que o microfone esteja colocado a 4 m da frente do palco (como na figura) e que o limite da região de captação ótima seja dado pela cardioide $r = 8 + 8 \operatorname{sen}\theta$, onde r é medido em metros e o microfone está no polo. Os músicos querem saber a área que eles terão no palco dentro da área de captação ótima do microfone. Responda a esta pergunta.



45–48 Calcule o comprimento exato da curva polar.

45. $r = 2\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

46. $r = 5^\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

47. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $r = 2(1 + \cos\theta)$

49–50 Calcule o comprimento da curva. Use uma gráfico para determinar o intervalo de parâmetro.

49. $r = \cos^4(\theta/4)$

50. $r = \cos^2(\theta/2)$

51–54 Use uma calculadora ou um computador para encontrar o comprimento do laço, com precisão de quatro casas decimais. Se necessário, use uma gráfico para determinar o intervalo de parâmetro.

51. Uma volta na curva $r = \cos 2\theta$

52. $r = \operatorname{tg}\theta, \quad \pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

53. $r = \operatorname{sen}(6 \operatorname{sen}\theta)$

54. $r = \operatorname{sen}(\theta/4)$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. AsHomework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

55. (a) Use a Fórmula 10.2.6 para mostrar que a área da superfície gerada pela rotação da curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

(onde f' é contínua e $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$) em torno do eixo polar é

$$S = \int_a^b 2\pi r \operatorname{sen} \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(b) Use a fórmula na parte (a) para calcular a área da superfície gerada pela rotação da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ em torno do eixo polar.

56. (a) Encontre a fórmula para a área da superfície gerada pela rotação da curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ (onde f' é contínua e $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$), em torno da reta $\theta = \pi/2$.

(b) Calcule a área da superfície gerada pela rotação da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ em torno da reta $\theta = \pi/2$.

10.5 Seções Cônicas

Nesta seção daremos as definições geométricas de parábolas, elipses e hipérboles e deduziremos suas equações-padrão. Elas são chamadas **seções cônicas**, ou **cônicas**, porque resultam da intersecção de um cone com um plano, como mostrado na Figura 1.

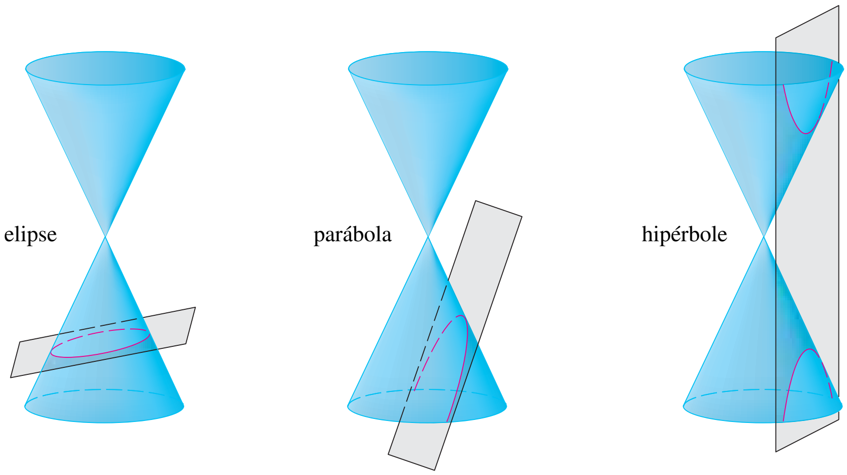


FIGURA 1
Cônicas

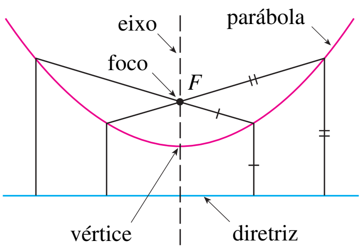


FIGURA 2

Parábolas

Uma **parábola** é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo F (denominado **foco**) e a uma reta fixa (chamada **diretriz**) são iguais. Essa definição é ilustrada pela Figura 2. Observe que o ponto na metade do caminho entre o foco e a diretriz está na parábola; ele é conhecido como **vértice**. A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é intitulada **eixo** da parábola.

No século XVI, Galileu mostrou que a trajetória de um projétil atirado no ar com um certo ângulo em relação ao solo é uma parábola. Desde essa época, os formatos parabólicos têm sido usados para desenhar faróis de carro, telescópios refletores e pontes suspensas.

Obteremos uma equação particularmente simples para uma parábola se colocarmos o vértice na origem O e sua diretriz paralela ao eixo x, como na Figura 3. Se o foco for o ponto $(0, p)$, então a diretriz tem a equação $y = -p$. Se $P(x, y)$ é qualquer ponto na parábola, então a distância de P até o foco é de

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

e a distância de P até a diretriz é $|y + p|$. (A Figura 3 ilustra o caso onde $p > 0$.) A propriedade de definição de uma parábola é que essas distâncias são iguais:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

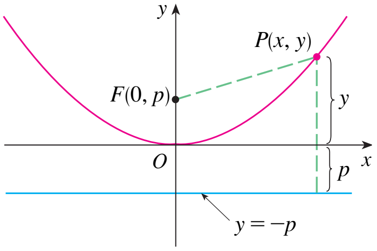


FIGURA 3

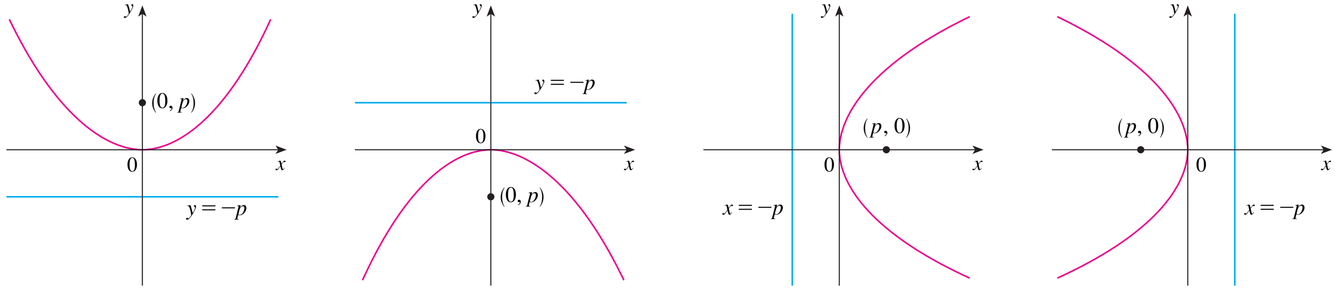
Obtemos uma equação equivalente elevando ao quadrado e simplificando:

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

$\boxed{1}$ Uma equação da parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$ é

$$x^2 = 4py$$

Se escrevermos $a = 1/(4p)$, então a equação padrão de uma parábola $\boxed{1}$ torna-se $y = ax^2$. A concavidade é para cima se $p > 0$ e para baixo se $p < 0$ [veja a Figura 4, partes (a) e (b)]. O gráfico é simétrico em relação ao eixo y porque $\boxed{1}$ não muda quando x é trocado por $-x$.



(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ (b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ (c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ (d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

FIGURA 4

Se trocarmos x e y em $\boxed{1}$, obteremos

$$\boxed{2} \qquad \boxed{y^2 = 4px}$$

que é uma equação da parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$. (Trocar x e y significa refletir em relação à linha diagonal $y = x$.) A parábola abre para a direita se $p > 0$ e para a esquerda se $p < 0$ [veja a Figura 4, partes (c) e (d)]. Em ambos os casos, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, que é o eixo da parábola.

EXEMPLO 1 Encontre o foco e a diretriz da parábola $y^2 + 10x = 0$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Se escrevermos a equação como $y^2 = -10x$ e a compararmos com a Equação 2 veremos que $4p = -10$, assim, $p = -\frac{5}{2}$. Então, o foco é $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e a diretriz é $x = \frac{5}{2}$. O esboço é mostrado na Figura 5.

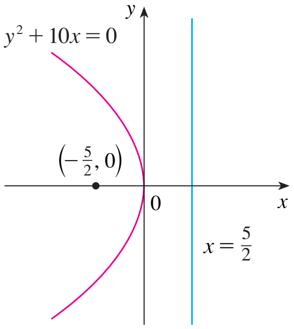


FIGURA 5

Elipses

Uma **elipse** é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante (veja a Figura 6). Esses dois pontos são chamados **focos**. Uma das Leis de Kepler é que as órbitas dos planetas no sistema solar são elipses com o Sol em um dos focos.

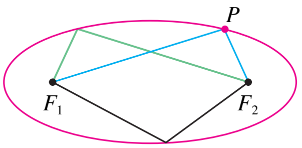


FIGURA 6

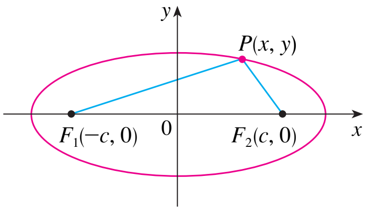


FIGURA 7

Para obtermos a equação mais simples para uma elipse, colocamos os focos no eixo x nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ como na Figura 7, de modo que a origem esteja na metade do caminho entre os focos. Seja a soma das distâncias de um ponto na elipse até os focos $2a > 0$. Então $P(x, y)$ é um ponto na elipse quando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

isto é, $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que se simplifica para $$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevamos ao quadrado novamente:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

que se torna $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

A partir do triângulo F_1F_2P na Figura 7, vemos que $2c < 2a$, assim, $c < a$ e, portanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniência, seja $b^2 = a^2 - c^2$. Então, a equação da elipse torna-se $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ou, se ambos os lados forem divididos por a^2b^2,

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

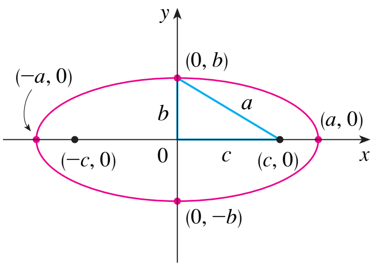


FIGURA 8

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geqslant b$

Como $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, segue que $b < a$. As intersecções com o eixo x são encontradas fazendo-se $y = 0$. Então $x^2/a^2 = 1$, ou $x^2 = a^2$, assim $x = \pm a$. Os pontos correspondentes $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são chamados **vértices** da elipse, e o segmento de reta que une os vértices é dito **eixo maior**. Para encontrarmos as intersecções com o eixo y fazemos $x = 0$ e obtemos $y^2 = b^2$, ou seja, $y = \pm b$. O segmento de reta unindo os pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$ é o **eixo menor**. A Equação 3 não muda se x for trocado por $-x$ ou y for trocado por $-y$, logo, é simétrica em relação a ambos os eixos. Observe que, se os focos coincidirem, então $c = 0$, portanto, $a = b$ e a elipse torna-se um círculo com raio $r = a = b$.

Resumimos essa discussão a seguir (veja também a Figura 8).

$\boxed{4}$ A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tem focos $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$, e vértices $(\pm a, 0)$.

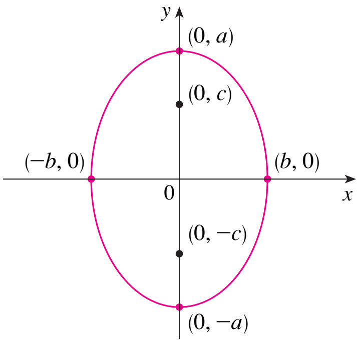


FIGURA 9

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1,\ a \geqslant b$

Se os focos de uma elipse estiverem localizados no eixo y em $(0, \pm c)$, então podemos encontrar sua equação trocando x e y em $\boxed{4}$. (Veja a Figura 9.)

$\boxed{5}$ A elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tem focos $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$, e vértices $(0, \pm a)$.

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$ e localize os focos.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma padrão para uma elipse, e assim temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. As intersecções com o eixo x são ± 4 e as intersecções com o eixo y são ± 3. Além disso, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, portanto $c = \sqrt{7}$, e os focos são $\left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$. O gráfico é esboçado na Figura 10.

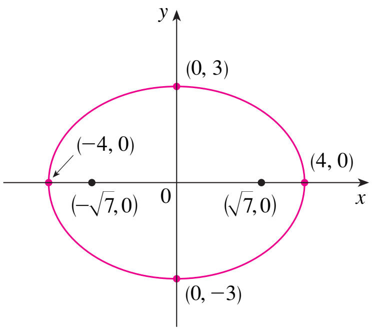


FIGURA 10

$9x^2 + 16y^2 = 144$

EXEMPLO 3 Encontre uma equação para a elipse com focos $(0, \pm 2)$ e vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUÇÃO Usando a notação de $\boxed{5}$, temos $c = 2$ e $a = 3$. Então, obtemos $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$; logo, uma equação para a elipse é

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Outra maneira de escrever a equação é $9x^2 + 5y^2 = 45$.

Como as parábolas, as elipses têm uma propriedade de reflexão interessante, com consequências práticas. Se uma fonte de luz – ou som – for colocada em um foco de uma superfície com secções transversais elípticas, então toda luz – ou som – é refletida da superfície para o outro foco (veja o Exercício 65). Esse princípio é usado em *litotripsia*, um tratamento para pedras nos rins. Um refletor com secção transversal elíptica é colocado de maneira que a pedra no rim esteja em um foco. Ondas sonoras de alta intensidade geradas no outro foco são refletidas para a pedra e a destroem sem causar dano ao tecido vizinho. O paciente não sofre o trauma de uma cirurgia e se recupera em poucos dias.

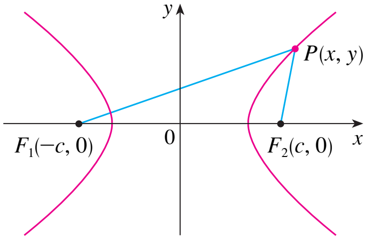


FIGURA 11

P está na hipérbole quando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$.

Hipérbole

Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença entre as distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (os focos) é uma constante. Essa definição é ilustrada na Figura 11.

As hipérboles ocorrem frequentemente como gráficos de equações em química, física, biologia e economia (Lei de Boyle, Lei de Ohm, curvas de demanda e de oferta). Uma aplicação particularmente importante de hipérboles é encontrada nos sistemas de navegação desenvolvidos nas I e II Guerras Mundiais (veja o Exercício 51).

Observe que a definição de uma hipérbole é similar àquela de uma elipse; a única mudança é que a soma das distâncias torna-se uma diferença das distâncias. De fato, a dedução da equação de uma hipérbole é também similar àquela dada anteriormente para uma elipse. Pediremos para você mostrar no Exercício 52 que, quando os focos estão no eixo x em $(\pm c, 0)$ e a diferença das distâncias for $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, então a equação da hipérbole é

$$\boxed{6} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que as intersecções com o eixo x são novamente $\pm a$, e os pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são os **vértices** da hipérbole. Mas, se colocarmos $x = 0$ na Equação 6, teremos $y^2 = -b^2$, que é impossível; dessa forma, não existe intersecção com o eixo y. A hipérbole é simétrica em relação a ambos os eixos.

Para analisarmos a hipérbole um pouco mais, olhamos a Equação 6 e obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

Isso mostra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Portanto, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas *ramos*.

Quando desenhamos uma hipérbole é útil desenhar primeiro as **assíntotas**, que são as linhas pontilhadas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 12. Ambos os ramos da hipérbole atingem as assíntotas; isto é, eles se tornam arbitrariamente perto das assíntotas. [Veja o Exercício 73 da Seção 4.5, no Volume I, onde é mostrado que estas retas são assíntotas oblíquas.]

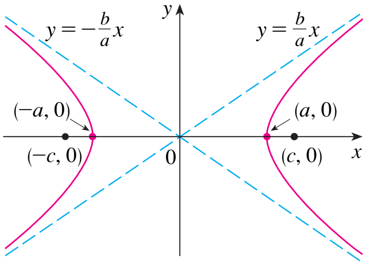


FIGURA 12

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\boxed{7}$ A hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tem focos $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$, e assíntotas $y = \pm(b/a)x$.

Se os focos de uma hipérbole estiverem no eixo y, então, trocando os papéis de x e y, obtemos a seguinte informação, que é ilustrada na Figura 13.

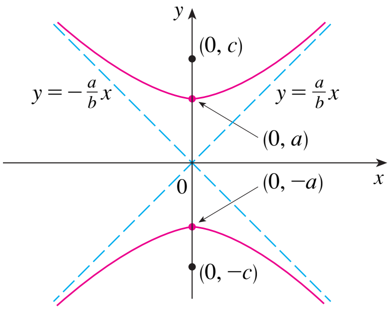


FIGURA 13
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\boxed{8}$ A hipérbole

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

tem focos $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$, e assíntotas $y = \pm(a/b)x$.

EXEMPLO 4 Encontre os focos e as assíntotas da hipérbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ e esboce seu gráfico.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

que é da forma dada em $\boxed{7}$ com $a = 4$ e $b = 3$. Como $c^2 = 16 + 9 = 25$, os focos são $(\pm 5, 0)$. As assíntotas são as retas $y = \frac{3}{4}\ x$ e $y = \frac{3}{4}\ x$. O gráfico é visto na Figura 14. ■

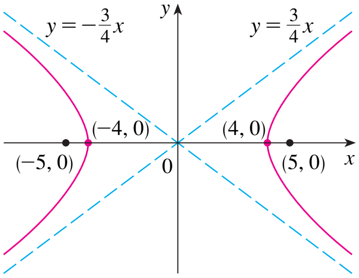


FIGURA 14
$9x^2-16y^2=144$

EXEMPLO 5 Encontre os focos e a equação da hipérbole com vértices $(0, \pm 1)$ e assíntota $y = 2x$.

SOLUÇÃO A partir de $\boxed{8}$ e da informação dada, vemos que $a = 1$ e $a/b = 2$. Então, $b = a/2 = \frac{1}{2}$ e $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Os focos são $\left(0, \pm\sqrt{5}/2\right)$ e a equação da hipérbole é

$$y^2 - 4x^2 = 1$$ ■

Cônicas Transladadas

Como discutido no Apêndice C, no Volume I, transladamos as cônicas tomando as equações-padrão $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ e $\boxed{8}$ e trocando x e y por $x - h$ e $y - k$.

EXEMPLO 6 Encontre uma equação para a elipse com focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ e vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUÇÃO O eixo maior é o segmento de reta que une os vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ e tem comprimento 4; assim, $a = 2$. A distância entre os focos é 2, e assim, $c = 1$. Então, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Como o centro da elipse é $(3, -2)$, trocamos x e y em $\boxed{4}$ por $x - 3$ e $y + 2$ para obter

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$$

como a equação da elipse. ■

EXEMPLO 7 Esboce a cônica $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ e ache seus focos.

SOLUÇÃO Completamos os quadrados como a seguir:

$$\begin{aligned}
4(y^2-2y)-9(x^2-8x)&=176\\
4(y^2-2y+1)-9(x^2-8x+16)&=176+4-144\\
4(y-1)^2-9(x-4)^2&=36\\
\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-4)^2}{4}&=1
\end{aligned}$$

Isso está na forma de $\boxed{8}$, exceto que x e y estão trocados por $x - 4$ e $y - 1$. Então, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ e $c^2 = 13$. A hipérbole está deslocada quatro unidades para a direita e uma unidade para cima. Os focos são $\left(4, 1 + \sqrt{13}\right)$ e $\left(4, 1 - \sqrt{13}\right)$ e os vértices são $(4, 4)$ e $(4, -2)$. As assíntotas são $y - 1 = \pm\frac{3}{2}\ (x - 4)$. A hipérbole é esboçada na Figura 15. ■

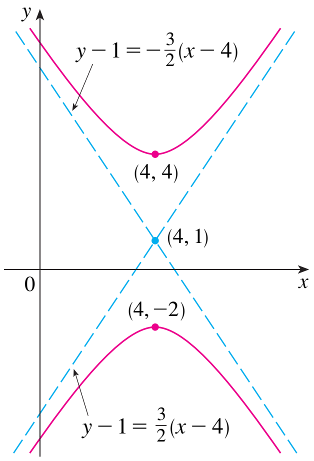


FIGURA 15
$9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$

10.5 Exercícios

1–8 Encontre o vértice, o foco e a diretriz da parábola e esboce seu gráfico.

1. $x^2 = 6y$

2. $2y^2 = 5x$

3. $2x = -y^2$

4. $3x^2 + 8y = 0$

5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$

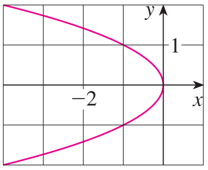
6. $x - 1 = (y + 5)^2$

7. $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$

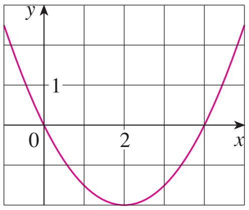
8. $y + 12x - 2x^2 = 16$

9–10 Encontre uma equação da parábola. A seguir, ache o foco e a diretriz.

9.



10.



11–16 Encontre os vértices e os focos da elipse e esboce seu gráfico.

11. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

12. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

13. $4x^2 + y^2 = 16$

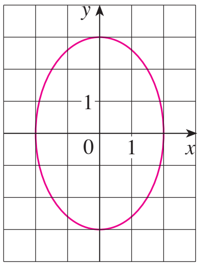
14. $4x^2 + 25y^2 = 25$

15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

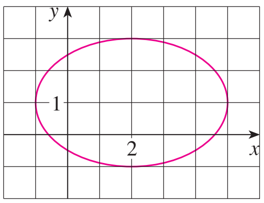
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17–18 Encontre uma equação da elipse. A seguir, localize seus focos.

17.



18.



19–24 Encontre os vértices, os focos e as assíntotas da hipérbole e esboce seu gráfico.

19. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

20. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

21. $x^2 - y^2 = 100$

22. $y^2 - 16x^2 = 16$

23. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$

24. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

25–30 Identifique o tipo de seção cônica cuja equação é dada e encontre os vértices e os focos.

25. $x^2 = y + 1$

26. $x^2 = y^2 + 1$

27. $x^2 = 4y - 2y^2$

28. $y^2 - 8y = 6x - 16$

29. $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$

30. $4x^2 + 4x + y^2 = 0$

31–48 Encontre uma equação para a cônica que satisfaz as condições dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(1, 0)$

32. Parábola, foco $(0, 0)$, diretriz $y = 6$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, diretriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(3, 6)$, vértice $(3, 2)$

35. Parábola, vértice $(2, 3)$, eixo vertical, passando em $(1, 5)$

36. Parábola, eixo horizontal, passando em $(-1, 0)$, $(1, -1)$ e $(3, 1)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértices $(0, \pm 13)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0, 6)$, vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$

40. Elipse, focos $(0, -1)$, $(8, -1)$, vértices $(9, -1)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, foco $(-1, 6)$

42. Elipse, focos $(\pm 4, 0)$, passando por $(-4, 1{,}8)$

43. Hipérbole, vértices $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbole, vértices $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbole, vértices $(-3, -4)$, $(-3, 6)$, focos $(-3, -7)$ e $(-3, 9)$

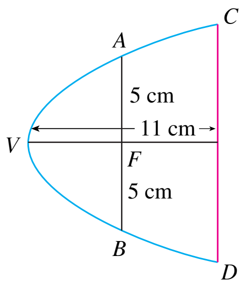
46. Hipérbole, vértices $(-1, 2)$ e $(7, 2)$, focos $(-2, 2)$ e $(8, 2)$

47. Hipérbole, vértices $(\pm 3, 0)$, assíntotas $y = \pm 2x$

48. Hipérbole, focos $(2, 0)$ e $(2, 8)$, assíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ e $y = 5 - \frac{1}{2}x$

49 Em uma órbita lunar o ponto mais próximo da superfície da Lua é chamado *perilúnio* e o ponto mais distante da superfície da Lua é denominado *apolúnio*. A nave espacial *Apollo 11* foi colocada em uma órbita lunar elíptica com altitude de perilúnio de 110 km e altitude de apolúnio de 314 km (acima da Lua). Encontre uma equação dessa elipse se o raio da Lua for 1.728 km e o centro da Lua estiver em um dos focos.

50. Uma secção transversal de um refletor parabólico é mostrada na figura. A lâmpada é colocada no foco, e a abertura no foco é 10 cm.
(a) Ache uma equação da parábola.
(b) Encontre o diâmetro da abertura $|CD|$, 11 cm a partir do vértice.

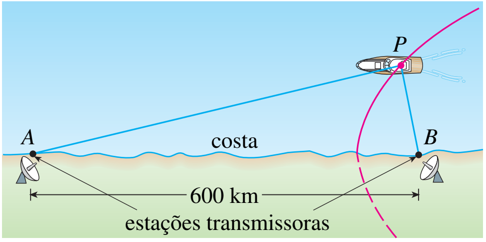


1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

51. No sistema de navegação por rádio LORAN (LOng RAnge Navigation), duas estações locais de rádios situadas em A e B transmitem sinais simultaneamente para um navio ou avião localizados em P. O computador de bordo converte a diferença de tempo na recepção desses sinais em diferença de distância $|PA| - |PB|$ e isso, de acordo com a definição de uma hipérbole, localiza o navio ou o avião em um ramo da hipérbole (veja a figura). Suponha que a estação B esteja localizada 600 km a leste da estação A na costa. Um navio recebe o sinal de B 1 200 microssegundos (μs) antes de receber o sinal de A.

(a) Assumindo que o sinal de rádio viaja a uma velocidade de 980 pés/μs, encontre uma equação da hipérbole na qual o navio está.

(b) Se o navio deveria estar ao norte de B, a que distância da costa ele estará?



52. Use a definição de uma hipérbole para deduzir a Equação 6 para uma hipérbole com focos $(\pm c, 0)$ e vértices $(\pm a, 0)$.

53. Mostre que a função definida pelo ramo superior da hipérbole $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ tem concavidade para cima.

54. Encontre uma equação para a elipse com focos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ e eixo maior com comprimento igual a 4.

55. Determine o tipo de curva representado pela equação

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 1$$

em cada um dos seguintes casos: (a) $k > 16$, (b) $0 < k < 16$ e (c) $k < 0$.

(d) Mostre que todas as curvas nas partes (a) e (b) têm os mesmos focos, não importando o valor de k.

56. (a) Mostre que a equação da reta tangente à parábola $y^2 = 4px$ no ponto (x_0, y_0) pode ser escrita como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

(b) Onde essa reta tangente intercepta o eixo x? Use esse fato para desenhar a reta tangente.

57. Mostre que as retas tangentes à parábola $x^2 = 4py$ desenhadas a partir de um ponto qualquer na diretriz são perpendiculares.

58. Mostre que se uma elipse e uma hipérbole tiverem os mesmos focos, então suas retas tangentes em cada ponto de intersecção são perpendiculares.

59. Use a Regra de Simpson com $n = 8$ para estimar o comprimento da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

60. Plutão percorre uma órbita elíptica ao redor do Sol (em um foco). O comprimento do eixo maior é $1{,}18 \times 10^{10}$ km e o comprimento do eixo menor é $1{,}14 \times 10^{10}$ km. Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar a distância percorrida pelo planeta durante uma órbita completa em torno do Sol.

61. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e pela reta vertical passando por um foco.

62. (a) Se uma elipse é girada em torno de seu eixo maior, encontre o volume do sólido resultante.

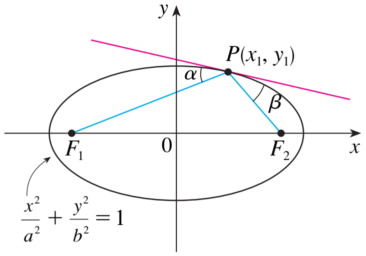
(b) Se ela for girada em torno de seu eixo menor, encontre o volume resultante.

63. Encontre o centroide da região limitada pelo eixo x e a metade superior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

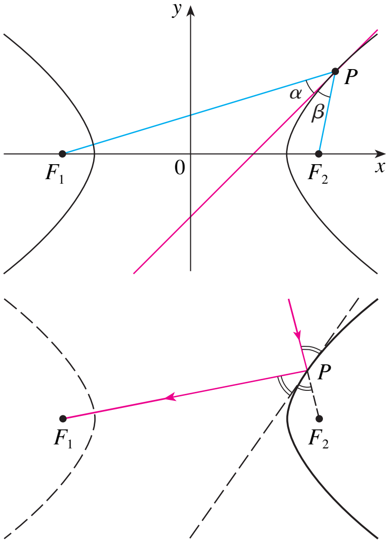
64. (a) Calcule a área da superfície da elipsoide que é gerada ao rotacionar a elipse em torno de seu eixo maior.

(b) Qual é a área da superfície se a elipse for rotacionada em seu eixo menor?

65. Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ com focos F_1 e F_2 e sejam α e β os ângulos entre as retas PF_1, PF_2 e a elipse como na Figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. Isso explica como galerias de sussurros e litotripsia funcionam. O som vindo de um dos focos é refletido e passa pelo outro foco.



66. Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto na hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ com focos F_1 e F_2 e sejam α e β os ângulos entre as retas PF_1, PF_2 e a hipérbole, como mostrado na figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. (Essa é a propriedade de reflexão da hipérbole. Isso mostra que a luz dirigida ao foco F_2 de um espelho hiperbólico é refletida em direção ao outro foco F_1.)



10.6 Seções Cônicas em Coordenadas Polares

Na seção anterior definimos a parábola em termos de um foco e da diretriz, mas definimos a elipse e a hipérbole em termos de dois focos. Nesta seção daremos um tratamento mais uniforme para os três tipos de seções cônicas em termos de um foco e da diretriz. Além disso, colocaremos o foco na origem; assim, uma seção cônica terá uma equação polar simples, o que fornece uma descrição conveniente do movimento dos planetas, satélites e cometas.

1 **TEOREMA** Seja F um ponto fixado (chamado **foco**) e l uma reta fixada (denominada **diretriz**) em um plano. Seja e um número positivo fixado (conhecido como **excentricidade**). O conjunto de todos os pontos P no plano tal que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(ou seja, a razão da distância a F e da distância a l é a constante e) é uma seção cônica. A cônica é

(a) uma elipse se $e < 1$
(b) uma parábola se $e = 1$
(c) uma hipérbole se $e > 1$

DEMONSTRAÇÃO Observe que, se a excentricidade for $e = 1$, então $|PF| = |Pl|$, e assim a condição dada simplesmente se torna a definição de uma parábola, como mostrado na Seção 10.5.

Vamos colocar o foco F na origem e a diretriz paralela ao eixo y e d unidades para a direita. Então a diretriz tem a equação $x = d$ e é perpendicular ao eixo polar. Se o ponto P tiver coordenadas polares (r, θ), vemos a partir da Figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

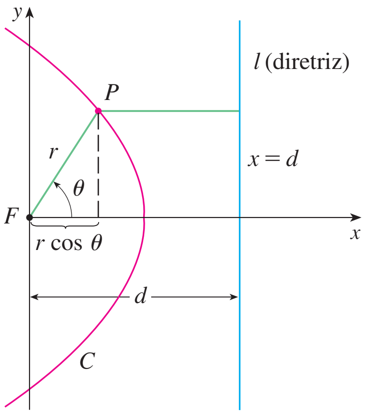


FIGURA 1

Então, a condição $|PF|/|Pl| = e$ ou $|PF| = e|Pl|$ torna-se

2 $$r = e(d - r\cos\theta)$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os lados dessa equação polar e convertermos para coordenadas retangulares, teremos

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

ou $$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Depois de completarmos os quadrados, temos

3 $$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Se $e < 1$, reconhecemos a Equação 3 como a equação de uma elipse. De fato, ela é da forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde

4 $$h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Na Seção 10.5 descobrimos que os focos de uma elipse estão a uma distância c do centro, onde

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2} \tag{5}$$

Isso mostra que
$$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

e confirma que o foco como definido no Teorema 1 significa a mesma coisa que o foco definido na Seção 10.5. Também segue das Equações 4 e 5 que a excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Se $e > 1$, então $1 - e^2 < 0$ e vemos que a Equação 3 representa uma hipérbole. Da mesma maneira que fizemos anteriormente, poderíamos reescrever a Equação 3 na forma

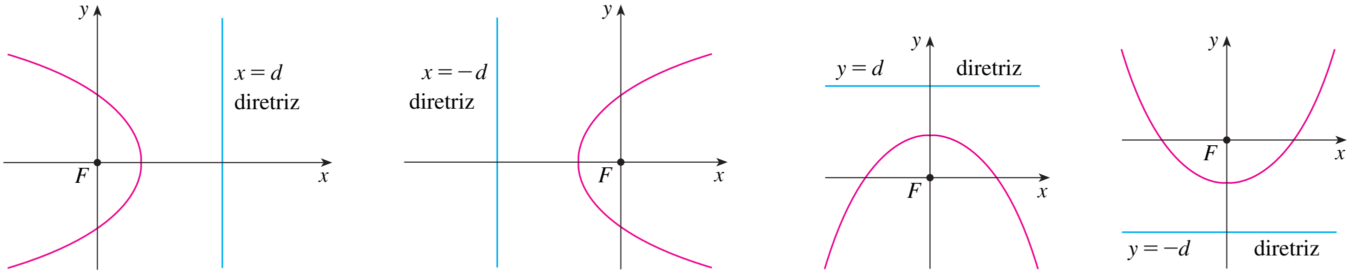
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e ver que
$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{onde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$ ∎

Isolando r na Equação 2, vemos que a equação polar da cônica mostrada na Figura 1 pode ser escrita como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Se a diretriz for escolhida como estando à esquerda do foco em $x = -d$, ou se a diretriz for escolhida como estando paralela ao eixo polar em $y = \pm d$, então a equação polar da cônica é dada pelo seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 2. (Veja os Exercícios 21–23.)



(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 2
Equações polares de cônicas

6 **Teorema** A equação polar da forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

representa uma seção cônica com excentricidade e. A cônica é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ ou uma hipérbole se $e > 1$.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação polar para uma parábola que tem seu foco na origem e cuja diretriz é a reta $y = -6$.

SOLUÇÃO Usando o Teorema 6 com $e = 1$ e $d = 6$, e usando a parte (d) da Figura 2, vemos que a equação da parábola é

$$r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

EXEMPLO 2 Uma cônica é dada pela equação polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encontre a excentricidade, identifique a cônica, localize a diretriz e esboce a cônica.

SOLUÇÃO Dividindo numerador e denominador por 3, escrevemos a equação como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Do Teorema 6, vemos que isso representa uma elipse com $e = \frac{2}{3}$. Uma vez que $ed = \frac{10}{3}$, temos

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

logo, a diretriz tem a equação cartesiana $x = -5$. Quando $\theta = 0$, $r = 10$; quando $\theta = \pi$, $r = 2$. Assim os vértices têm coordenadas polares $(10, 0)$ e $(2, \pi)$. A elipse é esboçada na Figura 3.

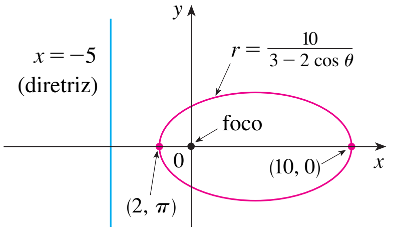


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Esboce a cônica $r = \dfrac{12}{2 + 4\operatorname{sen}\theta}$.

SOLUÇÃO Escrevendo a equação na forma

$$r = \frac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$$

vemos que a excentricidade é $e = 2$ e, portanto, representa uma hipérbole. Como $ed = 6$, $d = 3$ e a diretriz tem a equação $y = 3$. Os vértices ocorrem quando $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$, assim eles são $(2, \pi/2)$ e $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. Também é útil marcar os pontos de intersecção com o eixo x. Isso ocorre quando $\theta = 0, \pi$; em ambos os casos $r = 6$. Para maior precisão poderíamos desenhar as assíntotas. Observe $r \to \pm\infty$ quando $1 + 2\operatorname{sen}\theta \to 0^+$ ou 0^- e $1 + 2\operatorname{sen}\theta = 0$ quando $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$. Então, as assíntotas são paralelas aos raios $\theta = 7\pi/6$ e $\theta = 11\pi/6$. A hipérbole é esboçada na Figura 4.

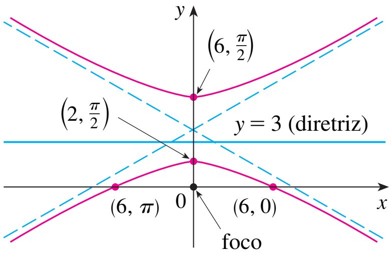

y
$\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$
$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$
y = 3 (diretriz)
(6, π)
0
(6, 0)
x
foco

FIGURA 4
$r = \dfrac{12}{2 + 4\operatorname{sen}\theta}$

Na rotação de seções cônicas descobriremos que é muito mais conveniente usar as equações polares do que as equações cartesianas. Apenas usamos o fato de que (veja o Exercício 73, na Seção 10.3) o gráfico de $r = f(\theta - \alpha)$ é o gráfico de $r = f(\theta)$ que gira no sentido anti-horário ao redor da origem por um ângulo α.

EXEMPLO 4 Se a elipse do Exemplo 2 girar por um ângulo $\pi/4$ ao redor da origem, encontre uma equação polar e trace a elipse resultante.

SOLUÇÃO Obtemos a equação da elipse que gira trocando θ por $\theta - \pi/4$ na equação dada no Exemplo 2. Assim a nova equação é

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

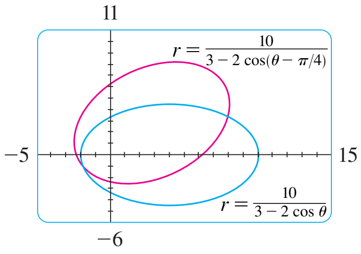
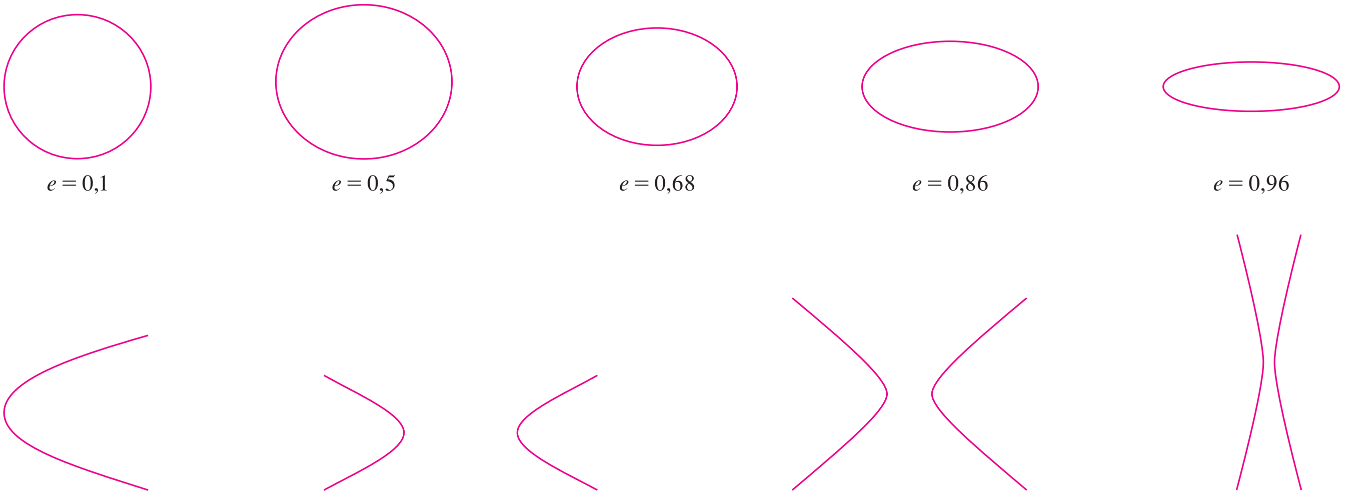


FIGURA 5

Usamos essa equação para traçar a elipse girada na Figura 5. Observe que a elipse gira ao redor de seu foco esquerdo.

Na Figura 6 usamos um computador para esboçar um número de cônicas para demonstrar o efeito de variar a excentricidade e. Note que quando e está próximo de 0 a elipse é quase circular, enquanto ela se torna mais alongada conforme $e \longrightarrow 1^-$. Quando $e = 1$, claro, a cônica é uma parábola.



$e = 0,1$ $e = 0,5$ $e = 0,68$ $e = 0,86$ $e = 0,96$

$e = 1$ $e = 1,1$ $e = 1,4$ $e = 4$

FIGURA 6

LEIS DE KEPLER

Em 1609, o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler, com base em uma enorme quantidade de dados astronômicos, publicou as seguintes três leis do movimento planetário.

Leis de Kepler

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta ligando o Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Embora Kepler tenha formulado suas leis em termos dos movimentos dos planetas em torno do Sol, elas se aplicam igualmente bem ao movimento de luas, cometas, satélites e outros corpos sujeitos a uma única força gravitacional. Na Seção 13.4 mostraremos como deduzir as leis de Kepler a partir das leis de Newton. Aqui, usamos a Primeira Lei de Kepler, com a equação polar de uma elipse, para calcular quantidades de interesse em astronomia.

Para o propósito de cálculos astronômicos, é útil expressar a equação de uma elipse em termos de sua excentricidade e e de seu semieixo maior a. Podemos escrever a distância d do foco à diretriz em termos de a se usarmos $\boxed{4}$:

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Assim, $ed = a(1 - e^2)$. Se a diretriz for $x = d$, então a equação polar é

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

$\boxed{7}$ A equação polar de uma elipse com foco na origem, semieixo maior a, excentricidade e e diretriz $x = d$ pode ser escrita na forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

As posições de um planeta que estão mais próximas e mais distantes do Sol são chamadas **periélio** e **afélio**, respectivamente, e correspondem aos vértices da elipse. As distâncias do Sol ao periélio e afélio são chamadas **distância do periélio** e **distância do afélio**, respectivamente. Na Figura 1, o Sol está no foco F, de modo que no periélio temos $\theta = 0$ e, da Equação 7,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 0} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

De forma análoga, no afélio $\theta = \pi$ e $r = a(1 + e)$.

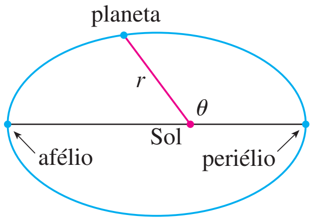


FIGURA 7

$\boxed{8}$ A distância do periélio de um planeta ao Sol é $a(1 - e)$ e a distância do afélio é $a(1 + e)$.

EXEMPLO 5

(a) Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra em torno do Sol (em um foco), dado que a excentricidade é cerca de 0,017 e o comprimento do eixo maior é cerca de $2{,}99 \times 10^8$ km.

(b) Encontre a distância da Terra ao Sol no periélio e no afélio.

SOLUÇÃO

(a) O comprimento do eixo maior é $2a = 2{,}99 \times 10^8$, de modo que $a = 1{,}495 \times 10^8$. Foi dado que $e = 0{,}017$ e assim, da Equação 7, uma equação da órbita da Terra em torno do Sol é

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{(1{,}495 \times 10^8)[1 - (0{,}017)^2]}{1 + 0{,}017 \cos \theta}$$

ou, aproximadamente,

$$r = \frac{1{,}49 \times 10^8}{1 + 0{,}017 \cos \theta}$$

(b)De $\boxed{8}$, a distância do periélio da Terra ao Sol é

$$a(1 - e) \approx (1{,}495 \times 10^8)(1 - 0{,}017) \approx 1{,}47 \times 10^8 \text{ km}$$

e a distância do afélio é

$$a(1 + e) \approx (1{,}495 \times 10^8)(1 + 0{,}017) \approx 1{,}52 \times 10^8 \text{ km}$$

10.6 Exercícios

1–8 Escreva uma equação polar de uma cônica com o foco na origem e com os dados fornecidos

1. Elipse, excentricidade $\frac{1}{2}$, diretriz $x = 4$

2. Parábola, diretriz $x = -3$

3. Hipérbole, excentricidade 1,5, diretriz $y = 2$

4. Hipérbole, excentricidade 3, diretriz $x = 3$

5. Parábola, vértice em $(4, 3\pi/2)$

6. Elipse, excentricidade 0,8, vértice $(1, \pi/2)$

7. Elipse, excentricidade $\frac{1}{2}$, diretriz $r = 4 \sec \theta$

8. Hipérbole, excentricidade 3, diretriz $r = -6 \operatorname{cossec} \theta$

9–16 (a) Encontre a excentricidade, (b) identifique a cônica, (c) dê uma equação da diretriz e (d) esboce a cônica.

9. $r = \dfrac{4}{5 - 4 \operatorname{sen} \theta}$

10. $r = \dfrac{12}{3 - 10 \cos \theta}$

11. $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

12. $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$

13. $r = \dfrac{9}{6 + 2 \cos \theta}$

14. $r = \dfrac{8}{4 + 5 \operatorname{sen} \theta}$

15. $r = \dfrac{3}{4 - 8 \cos \theta}$

16. $r = \dfrac{10}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta}$

17. (a) Encontre a excentricidade e a diretriz da cônica $r = 1/(1 - 2 \operatorname{sen} \theta)$ e faça um gráfico da cônica e sua diretriz.
(b) Se a cônica girar no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo $3\pi/4$, escreva a equação resultante e trace sua curva.

18. Trace a parábola $r = 4/(5 + 6 \cos \theta)$ e sua diretriz. Também trace a curva obtida pela rotação dessa parábola ao redor de seu foco por um ângulo $\pi/3$.

19. Trace as cônicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ com $e = 0{,}4$, $0{,}6$, $0{,}8$ e $1{,}0$ na mesma tela. Como o valor de e afeta o formato da curva?

20. (a) Faça o gráfico das cônicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ e vários valores de d. Como o valor de d afeta o formato da curva?
(b) Faça o gráfico das cônicas para $d = 1$ e vários valores de e. Como o valor de e afeta o formato da curva?

21. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz $x = -d$ tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

22. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz $y = d$ tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

23. Mostre que uma cônica com foco na origem, excentricidade e e diretriz $y = -d$ tem a equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

24. Mostre que as parábolas $r = c/(1 + \cos \theta)$ e $r = d/(1 - \cos \theta)$ se interceptam em ângulos retos.

25. A órbita de Marte em torno do Sol é uma elipse com excentricidade 0,093 e semieixo maior $2{,}28 \times 10^8$ km. Encontre uma equação polar da órbita.

26. A órbita de Júpiter tem excentricidade 0,048 e o comprimento do seu eixo maior é $1{,}56 \times 10^9$ km. Encontre uma equação polar para a órbita.

27. A órbita do cometa Halley, visto pela última vez em 1986 e com retorno esperado para 2062, é uma elipse com excentricidade 0,97 e com um foco no Sol. O comprimento do eixo maior é 36,18 AU [Uma unidade astronômica (AU) é a distância média entre a Terra e o Sol, cerca de 93 milhões de milhas.] Encontre uma equação polar para a órbita do cometa Halley. Qual é a distância máxima do cometa até o Sol?

28. O cometa Hale-Bopp, descoberto em 1995, tem uma órbita elíptica com excentricidade 0,9951 e o comprimento do eixo maior é 356,5 AU. Encontre uma equação polar para a órbita desse cometa. Quão perto do Sol chega esse cometa?

Dean Ketelsen

29. O planeta Mercúrio viaja numa órbita elíptica com excentricidade de 0,206. Sua distância mínima do Sol é de $4{,}6 \times 10^7$ km. Calcule sua distância máxima do Sol.

30. A distância de Plutão até o Sol é $4{,}43 \times 10^9$ km no periélio e $7{,}37 \times 10^9$ km no afélio. Encontre a excentricidade da órbita de Plutão.

31. Usando os dados do Exercício 29, calcule a distância percorrida pelo planeta Mercúrio durante uma órbita completa ao redor do Sol. (Se sua calculadora ou sistema de computação algébrica calcular integrais definidas, use-o. Caso contrário, use a Regra de Simpson.)

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

10 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma curva parametrizada?
(b) Como você esboça uma curva parametrizada?

2. (a) Como você calcula a inclinação de uma tangente a uma curva parametrizada?
(b) Como você calcula a área sob uma curva parametrizada?

3. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes itens:
(a) O comprimento de uma curva parametrizada.
(b) A área da superfície obtida pela rotação de uma curva parametrizada em torno do eixo x.

4. (a) Use um diagrama para explicar o significado das coordenadas polares (r, θ) de um ponto.
(b) Escreva as equações para expressar as coordenadas cartesianas (x, y) de um ponto em termos de coordenadas polares.
(c) Quais equações você usaria para encontrar as coordenadas polares de um ponto se soubesse as coordenadas cartesianas?

5. (a) Como você calcula a inclinação de uma reta tangente a uma curva polar?
(b) Como você calcula a área de uma região limitada por uma curva polar?
(c) Como você calcula o comprimento de uma curva polar?

6. (a) Dê uma definição geométrica de uma parábola.
(b) Escreva uma equação de uma parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$. Então, o foco é $(p, 0)$ e a diretriz é $x = -p$.

7. (a) Dê uma definição de uma elipse em termos dos focos.
(b) Escreva uma equação para a elipse com focos $(\pm c, 0)$ e vértices $(\pm a, 0)$.

8. (a) Dê uma definição de uma hipérbole em termos dos focos.
(b) Escreva uma equação para a hipérbole com os focos $(\pm c, 0)$ e os vértices $(\pm a, 0)$.
(c) Escreva equações para as assíntotas da hipérbole na parte (b).

9. (a) O que é a excentricidade de uma seção cônica?
(b) O que você pode dizer sobre a excentricidade se a seção cônica for uma elipse? Uma hipérbole? Uma parábola?
(c) Escreva uma equação polar para uma seção cônica com excentricidade e e diretriz $x = d$. O que acontece se a diretriz for $x = -d$? $y = d$? $y = -d$?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisfaz $g'(1) = 0$, então ela tem uma tangente horizontal quando $t = 1$.

2. Se $x = f(t)$ e $y = g(t)$ têm segundas derivadas, então

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$

3. O comprimento da curva $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ é $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.

4. Se um ponto é representado por (x, y) em coordenadas cartesianas (onde $x \neq 0$) e (r, θ) em coordenadas polares, então $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$.

5. As curvas polares $r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta$ e $r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$ têm o mesmo gráfico.

6. As equações $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ têm todas o mesmo gráfico.

7. As equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ possuem o mesmo gráfico de $x = t^3$, $y = t^6$.

8. O gráfico de $y^2 = 2y + 3x$ é uma parábola.

9. A reta tangente a uma parábola intercepta a parábola apenas uma vez.

10. Uma hipérbole nunca intercepta sua diretriz.

Exercícios

1–4 Esboce a curva parametrizada e elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana da curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leqslant t \leqslant 1$

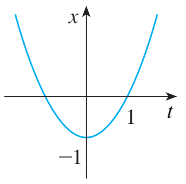
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

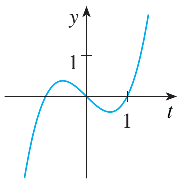
3. $x = \cos \theta, \quad y = \sec \theta, 0 \leqslant \theta < \pi/2$

4. $x = 2 \cos \theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen} \theta$

5. Escreva os diferentes conjuntos de equações paramétricas para a curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para esboçar a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique com setas a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.





7. (a) Marque o ponto com coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A seguir, encontre suas coordendas cartesianas.
(b) As coordenadas cartesianas de um ponto são $(-3, 3)$. Encontre dois conjuntos de coordenadas polares para o ponto.

8. Esboce a região que consiste nos pontos cujas coordenadas polares satisfazem $1 \leqslant r < 2$ e $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$.

9–16 Esboce a curva polar.

9. $r = 1 - \cos\theta$

10. $r = \text{sen } 4\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\,\text{sen }\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17–18 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. A curva com equação polar $r = (\text{sen }\theta)/\theta$ é chamada **cocleoide**. Use um gráfico de r como função de θ em coordenadas cartesianas para esboçar a cocleoide manualmente. Então trace-a com uma máquina para verificar seu esboço.

20. Trace a elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ e sua diretriz. Trace também a elipse obtida por sua rotação em torno da origem, de um ângulo de $2\pi/3$.

21–24 Calcule a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto correspondente ao valor especificado do parâmetro.

21. $x = \ln t, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25–26 Encontre dy/dx e d^2y/dx^2.

25. $x = t + \text{sen } t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo na curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Então, use o cálculo para calcular as coordenadas exatas.

28. Calcule a área da região delimitada pelo laço da curva no Exercício 27.

29 Em quais pontos a curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\,\text{sen } t - a\,\text{sen } 2t$$

tem tangentes verticais e horizontais? Use essa informação para ajudar a esboçar a curva.

30. Calcule a área delimitada pela curva no Exercício 29.

31. Calcule a área delimitada pela curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Calcule a área delimitada pelo laço interno da curva $r = 1 - 3\,\text{sen }\theta$.

33. Encontre os pontos de intersecção das curvas $r = 2$ e $r = 4\cos\theta$.

34. Encontre os pontos de intersecção das curvas $r = \text{cotg }\theta$ e $r = 2\cos\theta$.

35. Encontre a área da região que está dentro de ambos os círculos $r = 2\,\text{sen }\theta$ e $r = \text{sen }\theta + \cos\theta$.

36. Encontre a área da região que está dentro da curva $r = 2 + \cos 2\theta$, mas fora da curva $r = 2 + \text{sen }\theta$.

37–40 Calcule o comprimento da curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

40. $r = \text{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

41–42 Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

43. As curvas definidas pelas equações paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

são chamadas **estrofoides** (do grego "girar ou torcer"). Investigue como essas curvas mudam quando c varia.

44. Uma família de curvas tem equações polares $r^a = |\text{sen } 2\theta|$, onde a é um número positivo. Investigue como essas curvas mudam quando a varia.

45–48 Encontre os focos e os vértices e esboce o gráfico.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

49. Encontre uma equação da elipse com foco $(\pm 4, 0)$ e diretriz $(\pm 5, 0)$.

50. Encontre uma equação da hipérbole com focos $(2, 1)$ e vértices $x = -4$.

51. Encontre uma equação da hipérbole com focos $(0, \pm 4)$ e assíntotas $y = \pm 3x$.

52. Encontre uma equação da elipse com focos $(3, \pm 2)$ e eixo principal com comprimento 8.

53. Encontre uma equação para a elipse que compartilhe um vértice e um foco com a parábola $x^2 + y = 100$ e que tenha seu outro foco na origem.

54. Mostre que, se m for qualquer número real, então existem exatamente duas retas de inclinação m tangentes à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e suas equações são $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

55. Encontre uma equação polar para a elipse com foco na origem, excentricidade $\frac{1}{3}$ e diretriz com equação $r = 4\sec\theta$.

56. Mostre que os ângulos entre o eixo polar e as assíntotas da hipérbole $r = ed/(1 - e\cos\theta)$, $e > 1$, são dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. Uma curva chamada **fólio de Descartes** é definida pelas equações paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 - t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 - t^3}$$

(a) Mostre que, se (a, b) estiverem na curva, então (b, a) também está; isto é, a curva é simétrica em relação à reta $y = x$. Onde a curva intercepta essa reta?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

(b) Encontre os pontos na curva onde as retas tangentes são horizontais ou verticais.

(c) Mostre que a reta $y = -x - 1$ é uma assíntota oblíqua.

(d) Esboce a curva.

(e) Mostre que a equação cartesiana dessa curva é $x^3 + y^3 = 3xy$.

(f) Mostre que a equação polar pode ser escrita na forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^3 \theta}$$

(g) Encontre a área da região dentro do laço dessa curva.

SCA (h) Mostre que a área do laço é a mesma que está entre a assíntota e os ramos infinitos da curva. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a integral.)

Problemas Quentes

1. Uma curva é definida pelas equações paramétricas

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\, du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$$

Calcule o comprimento do arco da curva a partir da origem até o ponto mais próximo onde exista uma reta tangente vertical.

2. (a) Encontre os pontos mais altos e mais baixos sobre a curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

(b) Esboce a curva. (Observe que ela é simétrica em relação a ambos os eixos e a ambas as retas $y = \pm x$; assim, inicialmente é suficiente considerar $y \geqslant x \geqslant 0$.)

SCA (c) Use as coordenadas polares e um sistema de computação algébrica para encontrar a área dentro da curva.

3. Qual é a menor janela que contém cada membro da família de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, onde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre sua resposta traçando vários membros da família nesta janela.

4. Quatro insetos são posicionados nos quatro cantos de uma quadrado com comprimento de a. Os insetos andam no sentido anti-horário na mesma velocidade e cada um deles sempre anda diretamente em direção ao próximo inseto. Eles se aproximam do centro do quadrado ao longo de um caminho em espiral.

(a) Encontre a equação polar do caminho do inseto supondo que o polo esteja no centro do quadrado. (Use o fato de que a reta ligando um inseto até o próximo é tangente ao caminho do inseto.)

(b) Encontre a distância percorrida por um inseto quando ele encontra os outros insetos no centro.

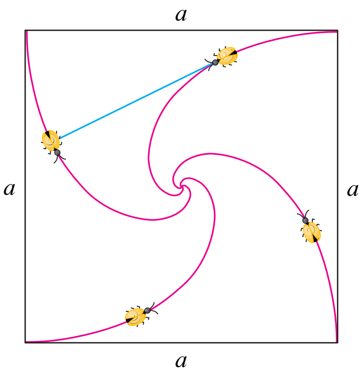


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

5. Mostre que qualquer linha tangente à hipérbole toca a hipérbole na metade do caminho entre os pontos de intersecção com a tangente e as assíntotas.

6. Um círculo C de raio $2r$ tem seu centro na origem. O círculo de raio r rola sem sair do sentido anti-horário ao redor de C. Um ponto P está localizado num raio fixo de um círculo em movimento numa distância b do centro, $0 < b < r$. [Ver partes (i) e (ii) da Figura.] Seja L a reta do centro de C ao centro do círculo em rotação e seja θ o ângulo que L faz com o eixo x positivo.

(a) Usando θ como um parâmetro, mostre que as equações paramétricas da trajetória percorrida por P são

$$x = b \cos 3\theta + 3r \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} 3\theta + 3r \operatorname{sen} \theta$$

Observação: se $b = 0$, a trajetória é um círculo de raio $3r$; se $b = r$, a trajetória é uma *epicicloide*. A trajetória percorrida por P para $0 < b < r$ é chamada *epitrocoide*.

(b) Trace a curva para diversos valores de b entre 0 e r.

(c) Mostre que pode ser inscrito um triângulo equilátero na epitrocoide e que seu centroide está no círculo de raio b centrado na origem.

Observação: Este é o princípio do motor de rotação de Wankel. Quando o triângulo equilátero gira com seu vértice na epitrocoide, seu centroide percorre um círculo cujo centro está no centro da curva.

(d) Na maioria dos motores de rotação os lados do triângulo equilátero são substituídos por arcos de círculo centrados no vértice oposto como na parte (iii) da figura (então, o diâmetro do rotor é constante). Mostre que o rotor irá caber na epitrocoide se $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.

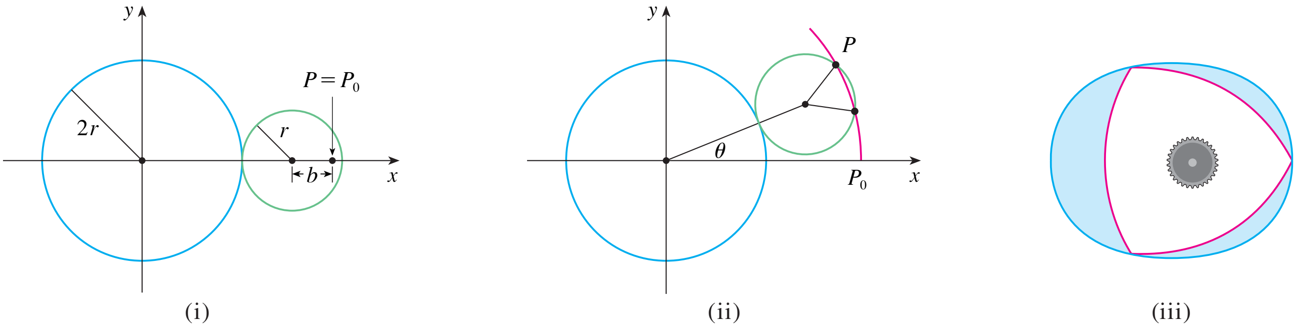


FIGURA PARA O PROBLEMA 6

11

Sequências e Séries Infinitas

Epic Stock/Shutterstock

Na última seção deste capítulo você será solicitado a usar uma série para obter uma fórmula para a velocidade de uma onda oceânica.

Sequências e séries infinitas foram introduzidas rapidamente em *Uma Apresentação do Cálculo* em conexão com os paradoxos de Zenon e a representação decimal de números. Sua importância em cálculo surge da ideia de Newton da representação de funções como somas de séries infinitas. Por exemplo, para encontrar áreas, ele frequentemente integrava uma função expressando-a primeiro como uma série e então integrando cada termo da série. Seguiremos sua ideia na Seção 11.10 para integrar funções como e^{-x^2}. (Lembre-se de que, anteriormente, fomos incapazes de fazer isso.) Muitas das funções que surgem em física-matemática e química, tais como as funções de Bessel, são definidas como somas de séries; assim, é importante nos familiarizarmos com os conceitos básicos de convergência de sequências e séries infinitas.

Os físicos também usam séries de outra maneira, como veremos na Seção 11.11. Em áreas de estudo diversas, como óptica, relatividade especial e eletromagnetismo, eles analisam fenômenos trocando uma função pelos primeiros termos da série que a representa.

11.1 Sequências

Pode-se pensar numa **sequência** como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots, \; a_n, \ldots$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2 é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo*. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

NOTAÇÃO A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EXEMPLO 1 Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o n-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

$$\text{(a)} \quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

$$\text{(b)} \quad \left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\} \quad a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \quad \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$$

$$\text{(c)} \quad \left\{\sqrt{n-3}\,\right\}_{n=3}^{\infty} \qquad a_n = \sqrt{n-3}, \;\; n \geqslant 3 \; \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$$

$$\text{(d)} \quad \left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad a_n = \cos\frac{n\pi}{6}, \;\; n \geqslant 0 \; \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\frac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$$

EXEMPLO 2 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\}$$

supondo que o padrão dos primeiros termos continue.

SOLUÇÃO Foi-nos dado que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3.125}$$

Observe que os numeradores dessas frações começam com 3 e são incrementados por 1 à medida que avançamos para o próximo termo. O segundo termo tem numerador 4; o terceiro, numerador 5; generalizando, o n-ésimo termo terá numerador $n + 2$. Os denominadores são a potência de 5, logo a_n tem denominador 5^n. Os sinais dos termos alternam entre positivo e negativo, assim, precisamos multiplicar por uma potência de -1. No Exemplo 1(b) o fator $(-1)^n$ significava que começamos com um termo negativo. Neste exemplo, queremos começar com um termo positivo e assim usamos $(-1)^{n-1}$ ou $(-1)^{n+1}$. Portanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

EXEMPLO 3 Aqui estão algumas sequências que não têm uma equação de definição simples.
(a) A sequência $\{p_n\}$, onde p_n é a população do mundo no dia 1º de janeiro do ano n.
(b) Se fizermos a_n ser o algarismo na n-ésima casa decimal do número e, então $\{a_n\}$ é uma sequência bem definida cujos primeiros termos são

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) A **sequência de Fibonacci** $\{f_n\}$ é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano conhecido como Fibonacci resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos (veja o Exercício 83).

Uma sequência como aquela no Exemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, pode ser visualizada marcando seus termos na reta real, como na Figura 1, ou traçando seu gráfico, como na Figura 2. Observe que, como uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos, seu gráfico consiste em pontos isolados com coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

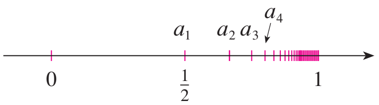


FIGURA 1

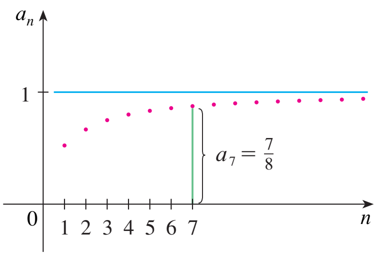


FIGURA 2

A partir da Figura 1 ou 2 parece que os termos da sequência $a_n = n/(n+1)$ estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato, a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

pode ficar tão pequena quanto se desejar, tornando n suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência $\{a_n\}$ aproximam-se de L quando n torna-se grande. Observe que a seguinte definição do limite de uma sequência é muito parecida com a definição do limite de uma função no infinito, dada na Seção 2.6, no Volume I.

$\boxed{1}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n \to \infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

A Figura 3 ilustra a Definição 1 mostrando os gráficos de duas sequências que têm limite L.

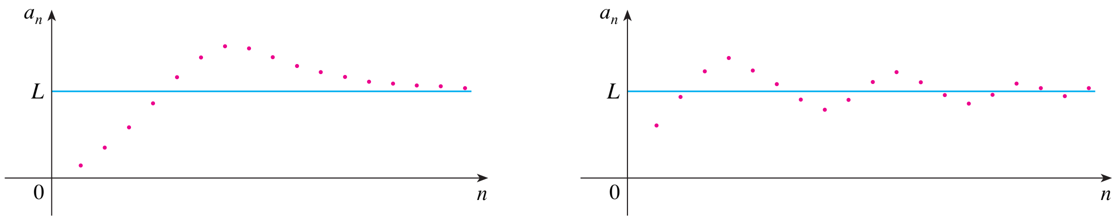


FIGURA 3
Gráficos de duas sequências com $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

Uma versão mais precisa da Definição 1 é a seguinte.

Compare esta definição com a Definição 2.6.7

$\boxed{2}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite L** e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

A Definição 2 é ilustrada pela Figura 4, na qual os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um N tal que todos os termos da sequência de a_{N+1} em diante devem estar naquele intervalo.

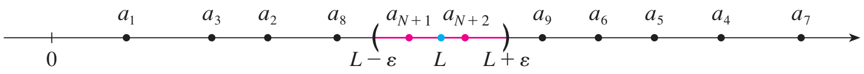


FIGURA 4

Outra ilustração de Definição 2 é dada na Figura 5. Os pontos no gráfico de $\{a_n\}$ devem estar entre as linhas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ se $n > N$. Esse quadro deve ser válido independentemente do quão pequeno ε é escolhido, mas geralmente um ε menor exige um N maior.

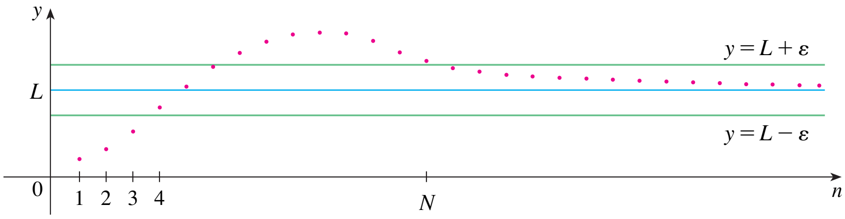


FIGURA 5

A comparação da Definição 2 com a Definição 2.6.7, no Volume 1, mostra que a única diferença entre $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ é que n precisa ser inteiro. Então, temos o seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 6.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

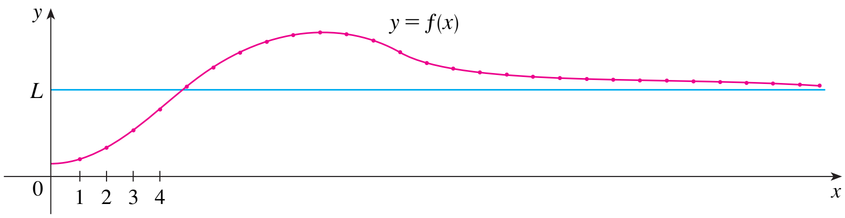


FIGURA 6

Em particular, como sabemos que $\lim_{x\to\infty}(1/x^r) = 0$ quando $r > 0$ (Teorema 2.6.5, no Volume I), temos

4 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{se } r > 0$$

Se a_n aumentar quando n aumentar, usaremos a notação $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. A seguinte definição precisa é similar à Definição 2.6.9, no Volume I.

5 **Definição** $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, mas de maneira especial. Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

As Propriedades do Limite dadas na Seção 2. 3, no Volume I, também valem para os limites de sequências, e suas demonstrações são similares.

Propriedades do Limite para Sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

O Teorema do Confronto também pode ser adaptado para sequências como a seguir (veja a Figura 7).

Se $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

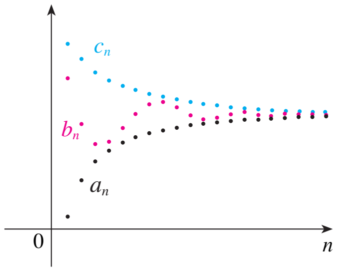


FIGURA 7
A sequência $\{b_n\}$ fica presa entre as sequências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$

Outro fato útil sobre limites de sequências é dado pelo seguinte teorema, cuja demonstração é pedida no Exercício 87.

6 **Teorema** Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUÇÃO O método é semelhante ao que foi utilizado na Seção 2.6, no Volume I: dividir o numerador e denominador pela maior potência de n que ocorre no denominador e depois usar as Leis de limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Aqui usamos a Equação 4 com $r = 1$.

EXEMPLO 5 A sequência $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4, dividimos o numerador e o denominador por n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10}{n^2} + \dfrac{1}{n}}} = \infty$$

porque o numerador é constante e o denominador se aproxima de 0. Então $\{a_n\}$ é divergente.

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUÇÃO Observe que numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$. Não podemos empregar a Regra de l'Hôspital diretamente, porque ela não se aplica a sequências, mas, sim, a funções de uma variável real. Contudo, podemos usar a Regra de l'Hôspital para a função relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ e obter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Temos, portanto, pelo Teorema 3,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

EXEMPLO 7 Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Se escrevermos os termos da sequência, obteremos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

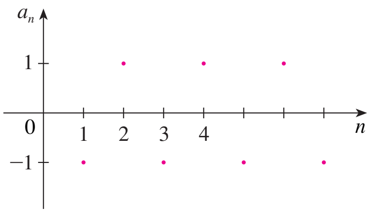


FIGURA 8

O gráfico desta sequência é mostrado na Figura 8. Uma vez que os termos oscilam entre 1 e -1 com frequência indefinida, a_n não se aproxima de nenhum número. Logo $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe; ou seja, a sequência $\{(-1)^n\}$ é divergente.

O gráfico da sequência no Exemplo 8 é mostrado na Figura 9 e confirma a nossa resposta.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ se ele existir.

SOLUÇÃO Primeiro calculamos o limite do valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Portanto, pelo Teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

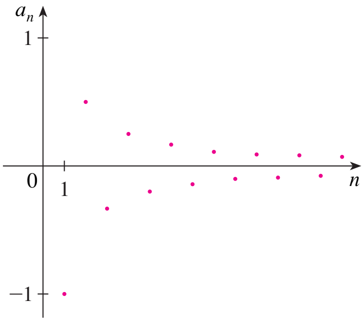


FIGURA 9

O seguinte teorema diz que se aplicarmos uma função contínua aos termos de uma sequência convergente, o resultado também será convergente. A demonstração é pedida no Exercício 88.

7 Teorema Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUÇÃO Como a função seno é contínua em 0, o Teorema 7 nos permite escrever

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} (\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

EXEMPLO 10 Discuta a convergência da sequência $a_n = n!/n^n$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUÇÃO Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$, mas aqui não temos uma função correspondente para usar com a Regra de l'Hôspital ($x!$ não está definido quando x não é um inteiro). Vamos escrever alguns termos para pensar sobre o que acontece com a_n quando n cresce:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$\boxed{8} \qquad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Parece, a partir dessas expressões e do gráfico na Figura 10, que os termos estão decrescendo e talvez se aproximem de 0. Para confirmar isso, observe na Equação 8 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que a expressão em parênteses é no máximo 1, porque o numerador é menor (ou igual) ao denominador. Logo,

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabemos que $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$ pelo Teorema do Confronto.

EXEMPLO 11 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 2.6 e dos gráficos das funções exponenciais na Seção 1.5, ambos do Volume I, que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo, colocando $a = r$ e usando o Teorema 3, temos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

É óbvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Se $-1 < r < 0$ então $0 < |r| < 1$ então

Criando Gráficos de Sequências

Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos especiais que nos permitem criar sequências e traçá-las diretamente. Com a maioria das calculadoras gráficas, contudo, as sequências podem ser traçadas usando equações paramétricas. Por exemplo, a sequência no Exemplo 10 pode ser traçada inserindo-se as equações paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

e fazendo o gráfico no modo pontual começando com $t = 1$ e tomando o passo t igual a 1. O resultado é exposto na Figura 10.

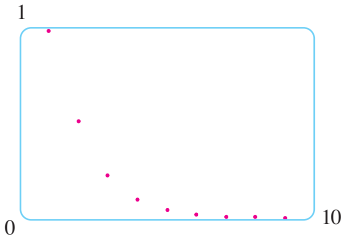


FIGURA 10

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ pelo Teorema 6. Se $r \leqslant -1$, então $\{r^n\}$ diverge como no Exemplo 7. A Figura 11 mostra os gráficos para vários valores de r. (O caso $r = -1$ é mostrado na Figura 8.)

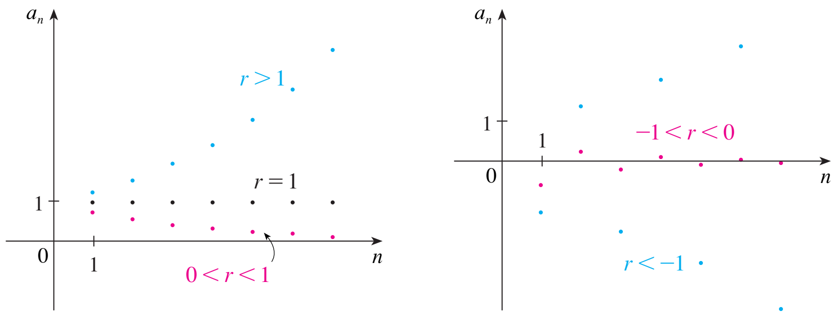


FIGURA 11
A sequência $a_n = r^n$

Os resultados do Exemplo 11 estão resumidos a seguir para uso futuro.

9 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

10 **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 12 A sequência $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ é decrescente porque

O lado direito é menor porque tem um denominador maior.

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

e, portanto, $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

EXEMPLO 13 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 1 Devemos mostrar que $a_{n+1} < a_n$, isto é,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Essa desigualdade é equivalente àquela que obteríamos pela multiplicação cruzada:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} &\iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\iff 1 < n^2+n \end{aligned}$$

Como $n \geqslant 1$, sabemos que a desigualdade $n^2 + n > 1$ é verdadeira. Portanto $a_{n+1} < a_n$ e $\{a_n\}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 2 Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \qquad \text{sempre que } x^2 > 1$$

Assim, f é decrescente em $(1, \infty)$ e em $f(n) > f(n + 1)$. Portanto, $\{a_n\}$ é decrescente. ■

11 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente ($a_n > 0$) mas não superiormente. A sequência $a_n = n/(n + 1)$ é limitada porque $0 < a_n < 1$ para todo n.

Sabemos que nem toda sequência limitada é convergente [por exemplo, a sequência $a_n = (-1)^n$ satisfaz $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, mas é divergente, como mostrado no Exemplo 7], e que nem toda sequência monótona é convergente ($a_n = n \to \infty$). Mas se uma sequência for limitada *e* monótona, então ela deve ser convergente. Este fato é provado no Teorema 12, mas intuitivamente você pode entender porque é verdadeiro, olhando para a Figura 12. Se $\{a_n\}$ está aumentando e $a_n \leqslant M$ para todo n, então os termos são forçados se aglomerar e se aproximar de algum número L.

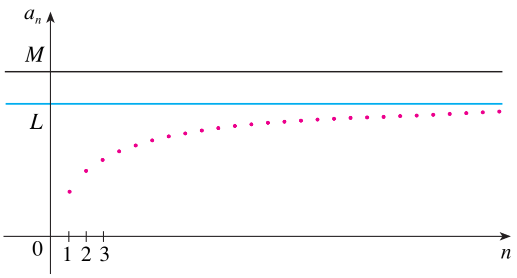


FIGURA 12

A demonstração do Teorema 12 é baseada no **Axioma de Completude** para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que diz que, se S é um conjunto não vazio de números reais, que tem um limitante superior M ($x \leqslant M$ para todo x em S), então S tem um **limitante superior mínimo** b. (Isto significa que b é um limite superior para S, mas se M é qualquer outro limitante superior, então $b \leqslant M$.) O Axioma de Completude é uma expressão do fato de que não há salto ou furo na reta do número real.

12 Teorema da Sequência Monótona Toda sequência monótona limitada é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência crescente. Como $\{a_n\}$ é limitada, o conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ tem um limitante superior. Pelo Axioma de Completude, existe um menor limitante superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior para S (pois L é o limite superior mínimo). Portanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para algum inteiro } N$$

Mas a sequência é crescente, logo $a_n \geqslant a_N$ para cada $n > N$. Assim, se $n > N$, temos

$$a_n > L - \varepsilon$$

então $$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

desde que $a_n \leqslant L$. Assim,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \;\; n > N$$

então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Uma demonstração similar (usando o maior limitante inferior) funciona se $\{a_n\}$ for decrescente. ▬

Na demonstração do Teorema 12 vemos que uma sequência que é crescente e limitada superiormente é convergente. (Da mesma forma, uma sequência decrescente que é limitada inferiormente é convergente.) Este fato é usado muitas vezes quando lidamos com séries infinitas.

EXEMPLO 14 Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela *relação de recorrência*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUÇÃO Começamos calculando os primeiros termos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5 \qquad a_5 = 5{,}75 \qquad a_6 = 5{,}875$$

$$a_7 = 5{,}9375 \qquad a_8 = 5{,}96875 \qquad a_9 = 5{,}984375$$

A indução matemática é frequentemente usada para trabalhar com sequências recursivas. Veja o fim do Caítulo 1 (Volumel) para consultar o Princípio da Indução Matemática.

Esses termos iniciais sugerem que a sequência é crescente e que os termos estão se aproximando de 6. Para confirmar que a sequência é crescente, usamos a indução matemática para mostrar que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geqslant 1$. Isto é verdade para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Se assumirmos que isso é verdadeiro para $n = k$, então temos

$$a_{k+1} > a_k$$

então $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Logo, $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Deduzirmos que $a_{n+1} > a_n$ é verdadeiro para $n = k + 1$. Portanto, a desigualdade é verdadeira para todo n por indução matemática.

Em seguida, verificamos que $\{a_n\}$ é limitada mostrando que $a_n < 6$ para todo n. (Uma vez que a sequência é crescente, já sabemos que ela tem um limitante inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para todo n). Sabemos que $a_1 < 6$, assim a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha que isso seja verdadeiro para $n = k$. Então,

$$a_k < 6$$

então $$a_k + 6 < 12$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Logo, $$a_{k+1} < 6$$

Isso mostra, por indução matemática, que $a_n < 6$ para todo n.

Como a sequência $\{a_n\}$ é crescente e limitada, o Teorema 12 garante que ela tem um limite. O teorema não nos conta qual é o valor do limite. Mas agora que sabemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos usar a relação de recorrência dada para escrever

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Como $a_n \to L$, segue também que $a_{n+1} \to L$ (quando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, igualmente). Logo, temos

Uma demonstração desse fato é pedida no Exercício 70.

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Resolvendo essa equação para L, temos $L = 6$, como previsto. ■

11.1 Exercícios

1. (a) O que é uma sequência?
(b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
(b) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

3–12 Liste os cinco primeiros termos da sequência.

3. $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$

4. $a_n = \dfrac{3^n}{1 + 2^n}$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

6. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$

7. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

8. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

9. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

10. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

11. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

13–18 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

13. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$

14. $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

15. $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right\}$

16. $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

17. $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\right\}$

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

19–22 Calcule, com quatro casas decimais, os primeiros 10 termos da sequência e use-os para traçar o gráfico da sequência com a mão. Esta sequência parece ter um limite? Se assim for, calcule-o. Se não, explique por quê.

19. $a_n = \dfrac{3n}{1 + 6n}$

20. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

22. $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

23–56 Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

23. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

24. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

25. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

26. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

27. $a_n = e^{1/n}$

28. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

29. $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

30. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

31. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$

32. $a_n = e^{2n/(n+2)}$

33. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

34. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

35. $a_n = \cos(n/2)$

36. $a_n = \cos(2/n)$

37. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

38. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

39. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n}$

41. $\{n^2 e^{-n}\}$

42. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

43. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

44. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

45. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

46. $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$

47. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

48. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

49. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

50. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

51. $a_n = \operatorname{arctg}(\ln n)$

52. $a_n = n - \sqrt{n + 1}\,\sqrt{n + 3}$

53. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

54. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

55. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

56. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

57–63 Use um gráfico da sequência para decidir se ela é convergente ou divergente. Se a sequência for convergente, conjecture o valor do limite a partir do gráfico e então demonstre sua conjectura.

57. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

58. $a_n = \sqrt{n}\, \operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{n}\right)$

59. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

60. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

61. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

62. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n)^n}$

---

64. (a) Determine se a sequência definida a seguir é convergente ou divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \quad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) O que acontece se o primeiro termo para $a_1 = 2$?

65. Se \$ 1.000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, contabilizados anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1.000(1{,}06)^n$ dólares.

(a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência $\{a_n\}$.

(b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.

66. Se você depositar \$ 100 no final de cada mês em uma conta que paga juros de 3% ao ano com capitalização mensal, o montante de juros acumulados após n meses é dado pela sequência

$$I_n = 100\left(\frac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} - n\right)$$

(a) Encontre os seis primeiros termos da sequência.

(b) O quanto de juros você vai ter ganho depois de dois anos?

67. Um piscicultor possui 5.000 bagres em sua lagoa. O número de bagres aumenta 8% ao mês e o agricultor retira 300 bagres por mês.

(a) Mostre que a população de bagres P_n depois n meses é dada recursivamente por

$$P_n = 1{,}08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5.000$$

(b) Quantos bagres estão na lagoa depois de seis meses?

68. Calcule os primeiros 40 termos da sequência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número impar} \end{cases}$$

e $a_1 = 11$. Faça o mesmo se $a_1 = 25$. Faça uma conjectura sobre este tipo de sequência.

69. Para quais valores de r a sequência $\{nr^n\}$ é convergente?

70. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(b) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

71. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

72–78 Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

72. $a_n = (-2)^{n+1}$

73. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

74. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

75. $a_n = n(-1)^n$

76. $a_n = ne^{-n}$

77. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

78. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

---

79. Calcule o limite da sequência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

80. Uma sequência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

(b) Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

81. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

82. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leqslant 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre seu limite.

83. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é f_n, onde $\{f_n\}$ é a sequência de Fibonacci definida no Exemplo 3(c).

(b) Seja $a_n = f_{n+1}/f_n$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

84. (a) Sejam $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre a parte (a) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

85. (a) Use um gráfico para conjecturar o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use um gráfico da sequência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$ na Definição 2.

86. Use a Definição 2 diretamente para demonstrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ quando $|r| < 1$.

87. Demonstre o Teorema 6.

[*Dica*: Use a Definição 2 ou o Teorema do Confronto.]

88. Demonstre o Teorema 7.

89. Demonstre que, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}$ for limitada, então $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

90. Seja $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Mostre que, se $0 \leqslant a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduza que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

(c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para mostrar que $\{a_n\}$ é crescente.

(d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.

(e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que $a_n < 4$ para todo n.

(f) Use o Teorema 12 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (O limite é e. Ver Equação 3.6.6, no Volume I).

91. Sejam a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1, sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Use a indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduza que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas convergentes.

(c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss chamou o valor comum desses limites de **média aritmética-geométrica** dos números a e b.

92. (a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Se $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

encontre os oito primeiros membros da sequência $\{a_n\}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Isso dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

93. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são constantes positivas que dependem da espécie e de seu habitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$.

(a) Mostre que se $\{p_n\}$ é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$.

(b) Mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

(c) Use o item (b) para mostrar que, se $a > b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; em outras palavras, a população se extingue.

(d) Agora suponha que $a < b$. Mostre que, se $p_0 < b - a$, então $\{p_n\}$ é crescente e $0 < p_n < b - a$. Mostre também que, se $p_0 > b - a$, então $\{p_n\}$ é decrescente e $p_n > b - a$. Deduza que se $a < b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROJETO DE LABORATÓRIO SCA SEQUÊNCIAS LOGÍSTICAS

Uma sequência que aparece em ecologia como um modelo para o crescimento populacional é definida pela **equação de diferença logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

onde p_n mede o tamanho da população da n-ésima geração de uma única espécie. Para manter os números manejáveis, p_n é uma fração do tamanho máximo da população, e assim $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que a forma dessa equação é similar à da equação diferencial logística na Seção 9.4. O modelo discreto – com sequências em vez de funções contínuas – é preferível para modelar populações de insetos, nas quais acasalamento e morte ocorrem de maneira periódica.

Um ecologista está interessado em prever o tamanho da população com o passar do tempo e faz as perguntas: ela vai estabilizar em um valor limite? Ela mudará de uma maneira cíclica? Ou ela exibirá comportamento aleatório?

Escreva um programa para calcular os n primeiros termos dessa sequência, começando com uma população inicial p_0, onde $0 < p_0 < 1$. Utilize este programa para fazer o seguinte.

1. Calcule 20 ou 30 termos da sequência para $p_0 = \frac{1}{2}$ e para dois valores de k tal que $1 < k < 3$. Faça um gráfico de casa sequência. As sequências parecem convergir? Repita para um valor diferente de p_0 entre 0 e 1. O limite depende da escolha de p_0? Depende da escolha de k?
2. Calcule termos da sequência para um valor de k entre 3 e 3,4 e faça seu gráfico. O que você nota sobre o comportamento dos termos?
3. Experimente com valores de k entre 3,4 e 3,5. O que acontece com os termos?
4. Para valores de k entre 3,6 e 4, calcule e trace pelo menos 100 termos e comente sobre o comportamento da sequência. O que acontecerá se você mudar p_0 por 0,001? Esse tipo de comportamento é chamado *caótico* e é exibido por populações de insetos sob certas condições.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

11.2 Séries

O recorde atual (2011) de π foi calculado para mais de dez trilhões de casas decimais por Shigeru Kondo e Yee Alexander.

O que queremos dizer quando expressamos um número como um decimal infinito? Por exemplo, o que significa escrever

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

A convenção por trás de nossa notação decimal é que qualquer número pode ser escrito como uma soma infinita. Aqui, isso significa que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

onde os três pontos ($\cdots$) indicam que a soma continua para sempre, e quanto mais termos adicionarmos, mais nos aproximaremos do valor real de π.

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

Faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos?

Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque, se começarmos adicionando os termos, obteremos as somas cumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21,... e depois do n-ésimo termo, obtemos $n(n + 1)/2$, que se torna muito grande à medida que n aumenta.

Contudo, se começarmos a somar os termos da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. A tabela mostra que, quando adicionamos mais e mais termos, essas *somas parciais* se tornam cada vez mais próximas de 1. De fato, somando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas quanto quisermos de 1. Assim, parece razoável dizer que a soma dessa série infinita é 1 e escrever

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Usamos uma ideia parecida para determinar se uma série geral $\boxed{1}$ tem uma soma ou não. Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

e, em geral,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite. Se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita $\Sigma\, a_n$.

$\boxed{2}$ **Definição** Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\Sigma\, a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Compare com a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Para encontrarmos essa integral, integramos de 1 até t e então fazemos $t \to \infty$. Para uma série, somamos de 1 a n e então fazemos $n \to \infty$.

EXEMPLO 1 Suponhamos que se saiba que a soma dos primeiros n termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Em seguida, a soma da série é o limite da sequência $\{s_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

No Exemplo 1 foi nos *dada* uma expressão para a soma dos primeiros termos n, mas geralmente não é fácil *encontrar* tal expressão. No Exemplo 2, no entanto, olhamos para uma famosa série para a qual *podemos* encontrar uma fórmula explícita para s_n.

EXEMPLO 2 Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicando-se pela **razão comum** r. (Já consideramos o caso especial onde $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$).

Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, a série geométrica diverge nesse caso.

Se $r \neq 1$, temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Subtraindo essas equações, obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$\boxed{3} \qquad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Se $-1 < r < 1$, sabemos, a partir de (11.1.9), que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando $|r| < 1$, a série geométrica é convergente, e sua soma é $a/(1 - r)$.

Se $r \leqslant -1$ ou $r > 1$, a sequência $\{r^n\}$ é divergente por (11.1.9); assim, pela Equação 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. Portanto, a série geométrica diverge naqueles casos.

Resumimos os resultados do Exemplo 2 como a seguir.

A Figura 1 fornece uma demonstração geométrica do resultado no Exemplo 2. Se os triângulos forem construídos como mostrado e s for a soma da série, então, por semelhança de triângulos,

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{logo} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

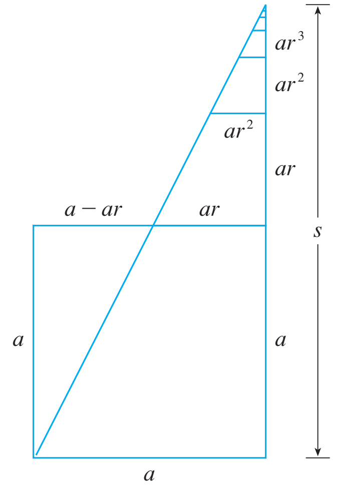


FIGURA 1

Em palavras: a soma de uma série geométrica convergente é

$$\frac{\text{primeiro termo}}{1 - \text{relação comum}}$$

> $\boxed{4}$ A série geométrica
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$
>
> é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$
>
> Se $|r| \geqslant 1$, a série geométrica é divergente.

EXEMPLO 3 Encontre a soma da série geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUÇÃO O primeiro termo é $a = 5$ e a razão comum é $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente por $\boxed{4}$ e sua soma é

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

O que realmente queremos dizer quando afirmamos que a soma da série no Exemplo 3 é 3? Claro, não podemos somar literalmente um número infinito de termos, um a um. Mas, de acordo com a Definição 2, a soma total é o limite da sequência de somas parciais. Então, fazendo a soma de um número suficiente de termos, podemos chegar tão próximo quanto gostaríamos do número. A tabela mostra as primeiras dez somas parciais e o gráfico da Figura 2 mostra como a sequência de somas parciais se aproxima de 3.

n	s_n
1	5,000000
2	1,666667
3	3,888889
4	2,407407
5	3,395062
6	2,736626
7	3,175583
8	2,882945
9	3,078037
10	2,947975

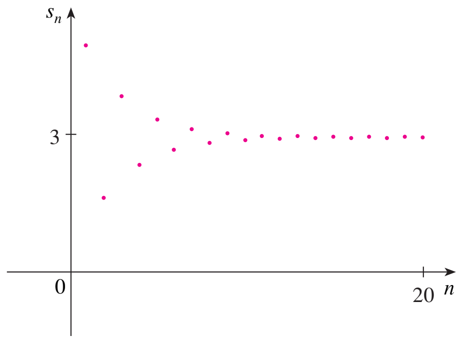


FIGURA 2

EXEMPLO 4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Vamos reescrever o termo n-ésimo termo da série na forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Outra maneira de identificar *a* e *r* é escrever os primeiros termos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

Reconhecemos essa série como uma série geométrica com $a = 4$ e $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, a série diverge por $\boxed{4}$.

EXEMPLO 5 Escreva o número $2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717\ldots$ como uma razão de inteiros.

SOLUÇÃO

$$2{,}3171717\ldots = 2{,}3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Depois do primeiro termo, temos uma série geométrica com $a = 17/10^3$ e $r = 1/10^2$. Portanto,

$$2{,}3\overline{17} = 2{,}3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2{,}3 + \frac{\dfrac{17}{1.000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1.147}{495}$$

EXEMPLO 6 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ onde $|x| < 1$.

SOLUÇÃO Observe que esta série começa com $n = 0$, de modo que o primeiro termo é $x^0 = 1$. (Com a série, adotamos a convenção de que $x^0 = 1$ mesmo quando $x = 0$.) Assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esta é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Uma vez que $|r| = |x| < 1$, que converge e $\boxed{4}$ resulta em

$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

TEC O *Module 11.2* explora uma série que depende de um ângulo θ em um triângulo e permite que você veja quão rapidamente a série converge quando θ varia.

EXEMPLO 7 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e calcule sua soma.

SOLUÇÃO Essa não é uma série geométrica e, assim, voltamos à definição de uma série convergente e calculamos as somas parciais.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar essa expressão se usarmos a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(veja a Seção 7. 4, no Volume I). Então, temos

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Observe que os termos se cancelam em pares. Este é um exemplo de uma **soma telescópica**: por causa de todos os cancelamentos, a soma retrai-se (como um antigo telescópio) em apenas dois termos.

A Figura 3 ilustra o Exemplo 7 mostrando os gráficos da sequência de termos $a_n = 1/[n(n+1)]$ e a sequência $\{s_n\}$ das somas parciais. Observe que $a_n \to 0$ e $s_n \to 1$. Veja os Exercícios 76 e 77 para duas interpretações geométricas do Exemplo 7.

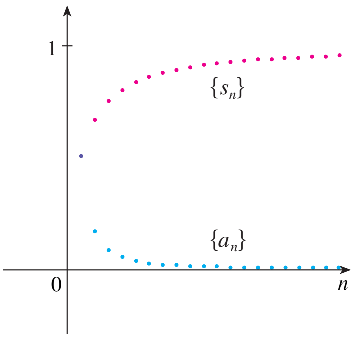


FIGURA 3

e, assim,
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Portanto, a série dada é convergente e
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ ■

EXEMPLO 8 Mostre que a **série harmônica**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$
é divergente.

SOLUÇÃO Para essa série particular é conveniente considerar as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$ e mostrar que elas se tornam grandes.

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$
$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

Analogamente, $s_{32} > 1 + \tfrac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \tfrac{6}{2}$, e, em geral,
$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

O método usado no Exemplo 8 para mostrar que a série harmônica diverge deve-se ao estudioso francês Nicole Oresme (1323-1382).

Isso mostra que $s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{s_n\}$ é divergente. Portanto, a série harmônica diverge. ■

6 **Teorema** Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\Sigma\, a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Portanto
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$ ■

OBSERVAÇÃO 1 Com qualquer *série* $\Sigma\, a_n$ associamos duas *sequências*: a sequência $\{s_n\}$ de suas somas parciais e a sequência $\{a_n\}$ de seus termos. Se $\Sigma\, a_n$ for convergente, o limite da sequência $\{s_n\}$ é s (a soma da série) e, como o Teorema 6 afirma, o limite da sequência $\{a_n\}$ é 0.

⊘ **OBSERVAÇÃO 2** A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira, em geral. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não podemos concluir que $\Sigma\, a_n$ é convergente. Observe que, para a série harmônica $\Sigma\, 1/n$, temos $a_n = 1/n \to 0$ quando $n \to \infty$, mas mostramos no Exemplo 8 que $\Sigma\, 1/n$ é divergente.

7 **Teste de Divergência** Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teste para Divergência vem do Teorema 6, porque, se a série não for divergente, ela é convergente e, assim, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 9 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência.

OBSERVAÇÃO 3 Se descobrirmos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, saberemos que $\Sigma\, a_n$ é divergente. Se acharmos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não saberemos sobre a convergência ou divergência de $\Sigma\, a_n$. Lembre-se o aviso na Observação 2: se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir.

8 **Teorema** Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\Sigma\, ca_n$ (onde c é uma constante), $\Sigma\, (a_n + b_n)$ e $\Sigma\, (a_n - b_n)$ e

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Essas propriedades de séries convergentes vêm das Propriedades do Limite para Sequências Convergentes na Seção 11.1. Por exemplo, aqui está como a parte (ii) do Teorema 8 é demonstrada.

Sejam:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

A n-ésima soma parcial para a série $\Sigma\, (a_n + b_n)$ é

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

e, usando a Equação 5.2.10, no Volume I, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t \end{aligned}$$

Portanto $\Sigma\, (a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

EXEMPLO 10 Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{n(n+1)} + \dfrac{1}{2^n} \right)$.

SOLUÇÃO A série $\Sigma\, 1/2^n$ é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$, assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

No Exemplo 7 encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Assim, pelo Teorema 8, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$=3\cdot 1+1=4$$

OBSERVAÇÃO 4 Um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série. Por exemplo: suponha que possamos mostrar que a série

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

é convergente. Uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

segue que a série inteira $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ é convergente. Analogamente, se soubermos que a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, então a série completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{N} a_n+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

também é convergente.

11.2 Exercícios

1. (a) Qual é a diferença entre uma sequência e uma série?
(b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

2. Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–4 Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuja somas parciais são dadas.

3. $s_n = 2 - 3(0{,}8)^n$

4. $s_n = \dfrac{n^2-1}{4n^2+1}$

5–8 Calcule os oito primeiros termos da sequência de somas parciais corretas para quatro casas decimais. Parece que a série é convergente ou divergente?

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

9–14 Calcule pelo menos dez somas parciais da série. Faça o gráfico de ambas as sequências de termos e de somas parciais na mesma tela. Parece que a série é convergente ou divergente? Se ela for convergente, calcule a soma. Se for divergente, explique por quê.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(-5)^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+1}}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

15. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
(a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.
(b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

16. (a) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad\text{e}\quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad\text{e}\quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

17–26 Determine se a série geométrica é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

17. $3 + 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

18. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

19. $10 - 2 + 0{,}4 - 0{,}08 + \cdots$

20. $1 + 0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}064 + \cdots$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0{,}9)^{n-1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^{n-1}}$

27–42 Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

27. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{15}+\cdots$

28. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{2}{81}+\dfrac{1}{243}+\dfrac{2}{729}+\cdots$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1}$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{2^n}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0{,}8)^{n-1} - (0{,}3)^n]$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1}\right)$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

37. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$

38. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

43–48 Determine se a série é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica (como no Exemplo 7). Se for convergente, calcule sua soma.

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

48. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$

---

49. Seja $x = 0{,}99999\ldots$.

(a) Você pensa que $x < 1$ ou $x = 1$?

(b) Some uma série geométrica para encontrar o valor de x.

(c) Quantas representações decimais o número 1 tem?

(d) Quais os números que têm mais de uma representação decimal?

50. Uma sequência de termos é definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_n = (5 - n)a_{n-1}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51–56 Expresse o número como uma razão de inteiros.

51. $0{,}\overline{8} = 0{,}8888\ldots$

52. $0{,}\overline{46} = 0{,}46464646\ldots$

53. $2{,}\overline{516} = 2{,}516516516\ldots$

54. $10{,}1\overline{35} = 10{,}135353535\ldots$

55. $1{,}53\overline{42}$

56. $7{,}\overline{12345}$

57–63 Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x.

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

59. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$

60. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (x-5)^n$

61. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$

62. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{3^n}$

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

---

64. Vimos que a série harmônica é uma série divergente cujos termos tendem a 0. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

também é uma série com essa propriedade.

SCA **65–66** Use o comando de frações parciais em seu SCA para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então utilize essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o SCA para somar a série diretamente.

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 - 5n^3 + {}^4n}$

---

67. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

68. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é $s_n = 3 - n2^{-n}$, encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

69. Um paciente toma 150 mg de um fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo.

(a) Qual quantidade do fármaco no corpo depois do terceiro comprimido? Após o n-ésimo comprimido?

(b) Qual quantidade da droga permanece no corpo, a longo prazo?

70. Depois da injeção de uma dose D de insulina, a concentração de insulina no sistema do paciente decai exponencialmente e por isso pode ser escrito como De^{-at}, onde t representa o tempo em horas e a é uma constante positiva.

(a) Se uma dose D é injetada a cada T horas, escreva uma expressão para a soma das concentrações residuais pouco antes da $(n + 1)$-ésima injeção.

(b) Determine o limite de concentração pré-injeção.

(c) Se a concentração de insulina deve ser sempre igual ou superior a um valor crítico C, determine uma dose mínima D em termos de C, a e T.

71. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que o recebem também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte, e assim por diante. Os economistas chamam essa reação em cadeia de *efeito multiplicador*. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo com gastando D dólares. Suponha que cada destinatário de dinheiro gasto gaste $100c$% e guarde $100s$% do dinheiro que ele ou ela recebe. Os valores c e s são denominados *propensão marginal a consumir* e *propensão marginal a economizar* e, é claro, $c + s = 1$.

(a) Seja S_n o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para S_n.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, onde $k = 1/s$. O número k é chamado *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Obs. O governo federal usa esse princípio para justificar o gasto deficitário. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que recebem em depósitos.

72. Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja lançada de uma altura inicial de H metros.

(a) Supondo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre.

(b) Calcule o tempo total que a bola pula. (Use o fato de que a bola cai $\frac{1}{2}gt^2$ metros em t segundos.)

(c) Suponha que, cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v, ela rebaterá com velocidade $-kv$, onde $0 < r < 1$. Quanto tempo levará para a bola parar?

73. Encontre o valor de c se

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$$

74. Encontre o valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

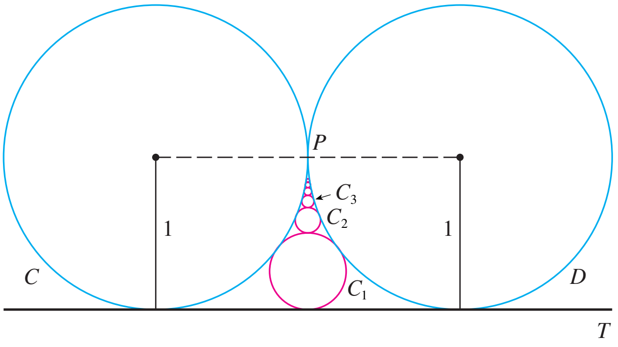
75. No Exemplo 8 mostramos que a série harmônica é divergente. Aqui, esboçamos outro método, que faz uso do fato de que $e^x > 1 + x$ para qualquer $x > 0$. (Veja o Exercício 4.3.78, no Volume I.)

Se s_n for a n-ésima soma parcial da série harmônica, mostre que $e^{s_n} > n + 1$. Por que isto implica que a série harmônica é divergente?

76. Trace as curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na mesma tela. Encontrando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 7, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)} = 1$$

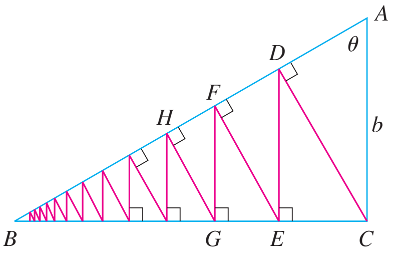
77. A figura mostra dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente comum; C_1 é o círculo que toca C, D e T; C_2 é o círculo que toca C, D e C_1; C_3 é o círculo que toca C, D e C_2. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma sequência infinita de círculos $\{C_n\}$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n e então forneça outra demonstração geométrica do Exemplo 7.



78. Um triângulo retângulo ABC é dado com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC, $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura. Calcule o comprimento total de todas as perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

em termos de b e θ.



79. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada".)

80. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) seja uma série convergente. Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

81. Demonstre a parte (i) do Teorema 8.

82. Se $\sum a_n$ for divergente e $c \neq 0$, mostre que $\sum ca_n$ é divergente.

83. Se $\sum a_n$ for convergente e $\sum b_n$ divergente, mostre que a série $\sum (a_n + b_n)$ é divergente. [*Dica*: Argumente por contradição.]

84. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas divergentes, $\sum (a_n + b_n)$ é necessariamente divergente?

85. Suponha que uma série $\sum a_n$ tenha termos positivos e suas somas parciais s_n satisfaçam a desigualdade $s_n \leqslant 1.000$ para todo n. Explique porque $\sum a_n$ deve ser convergente.

86. A sequência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Mostre que cada uma das afirmações a seguir é verdadeira.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

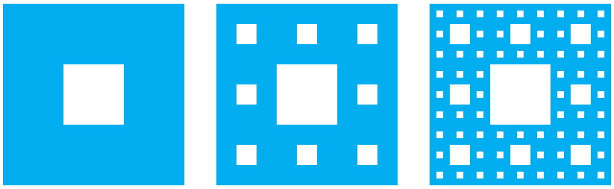
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

87. O **conjunto de Cantor**, cujo nome é uma homenagem ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ e removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Isso nos leva a dois intervalos, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço do meio aberto de cada intervalo que permanece do passo anterior. O conjunto de Cantor consiste nos números em $[0, 1]$ que permanecem depois de todos estes intervalos terem sido removidos.

(a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso, o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.

(b) O **tapete de Sierpinski** é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura mostra os três primeiros passos da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o tapete de Sierpinski tem área 0.



88. (a) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pela equação $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, onde a_1 e a_2 podem ser quaisquer números reais. Experimente com vários valores de a_1 e a_2 e use sua calculadora para descobrir o limite da sequência.

(b) Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$ em termos de a_1 e a_2 expressando $a_{n+1} - a_n$ em termos de $a_2 - a_1$ e somando uma série.

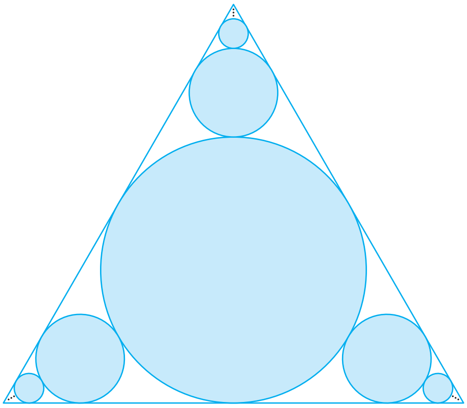
89. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n + 1)!$.

(a) Encontre as somas parciais s_1, s_2, s_3 e s_4. Você reconhece os denominadores? Use o padrão para conjecturar uma fórmula para s_n.

(b) Use indução matemática para demonstrar sua conjectura.

(c) Mostre que a série infinita dada é convergente e calcule sua soma.

90. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série. Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série $\Sigma\, 1/[n(n + 1)]$ porque em cada um desses casos pudemos encontrar uma fórmula simples para a n-ésima soma parcial s_n. Mas geralmente não é fácil descobrir uma fórmula. Portanto, nas próximas seções, desenvolveremos vários testes que nos permitem determinar se uma série é convergente ou divergente sem encontrar sua soma explicitamente. (Em alguns casos, contudo, nossos métodos nos permitirão encontrar boas estimativas da soma.) Nosso primeiro teste envolve integrais impróprias.

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma s_n dos primeiros termos n, mas a tabela de valores aproximados gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando $n \to \infty$ e, assim, parece que a série é convergente.

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1.000	1,6439
5.000	1,6447

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva $y = 1/x^2$ e retângulos colocados abaixo dela. A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função $y = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo.

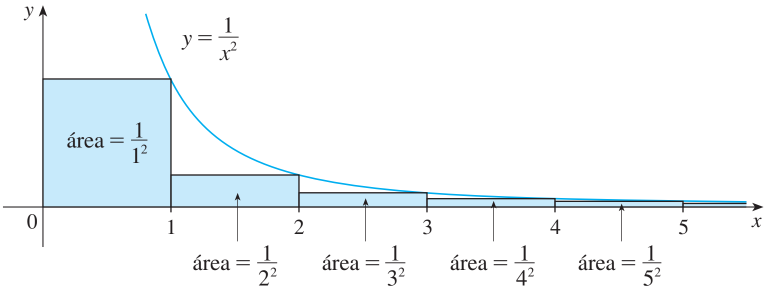


FIGURA 1

Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que é o valor da integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Na Seção 7.8, no Volume I, descobrimos que essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim, a figura mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Então, as somas parciais são limitadas. Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto, as somas parciais convergem (pelo Teorema da Sequência Monótona) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

A soma exata dessa série encontrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) é $\pi^2/6$, mas a demonstração desse fato é muito difícil. (Veja o Problema 6 em Problemas Quentes, no Capítulo 15.)

Agora vamos olhar para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3,2317
10	5,0210
50	12,7524
100	18,5896
500	43,2834
1.000	61,8010
5.000	139,9681

A tabela de valores de s_n sugere que as somas parciais não estão se aproximando de um número; assim, suspeitamos que essa série possa ser divergente. Novamente usamos um desenho para a confirmação. A Figura 2 mostra a curva $y = 1/\sqrt{x}$, porém dessa vez utilizamos retângulos cujos topos estão *acima* da curva.

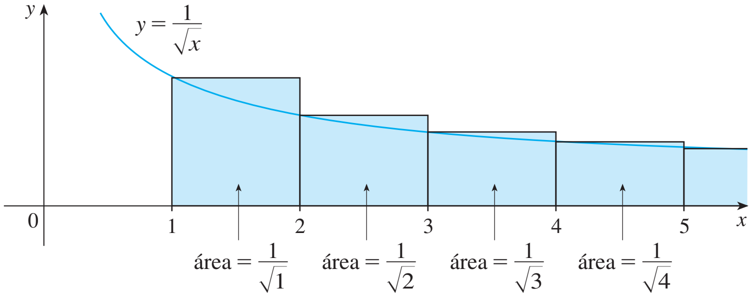


FIGURA 2

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1. A altura é igual ao valor da função $y = 1/\sqrt{x}$ na extremidade *esquerda* do intervalo. Dessa forma, a soma de todas as áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área total é maior que a área sob a curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que é igual à integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Mas sabemos, a partir da Seção 7.8, no Volume I, que essa integral imprópria é divergente. Em outras palavras, a área sob a curva é infinita. Assim a soma da série deve ser infinita; isto é, a série é divergente.

O mesmo tipo de argumentação geométrica que usamos para essas duas séries pode ser usado para demonstrar o seguinte teste. (A demonstração é dada no fim desta seção.)

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

OBSERVAÇÃO Quando você usar o Teste da Integral lembre-se de que não é necessário começar a série ou a integral em $n = 1$. Por exemplo, testando a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{usamos} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Também não é necessário que f seja *sempre* decrescente. O importante é que f seja *decrescente* a partir de certo ponto, isto é, decrescente para x maior que algum número N. Então, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ é convergente, e assim $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente pela Observação 4 da Seção 11.2.

EXEMPLO 1 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A função $f(x) = 1/(x^2+1)$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e assim usamos o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_1^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Então, $\int_1^{\infty} 1/(x^2+1)\,dx$ é uma integral convergente e, dessa forma, pelo Teste da Integral, a série $\Sigma\ 1/(n^2+1)$ é convergente.

EXEMPLO 2 Para que valores de p a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente?

SOLUÇÃO Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. Em qualquer dos dois casos, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, e, assim, a série dada diverge pelo Teste de Divergência (11.2.7).

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é claramente contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Encontramos no Capítulo 7, [veja (7.8.2, no Volume I)] que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \ \text{ é convergente se } p > 1 \text{ e divergente se } p \leqslant 1$$

Segue do Teste da Integral que a série $\Sigma\ 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leqslant 1$. (Para $p = 1$, esta é a série harmônica discutida no Exemplo 8 da Seção 11.2).

Para usarmos o Teste da Integral, precisamos ser capazes de calcular $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ e, portanto, precisamos ser capazes de encontrar uma antiderivada de f. Frequentemente é difícil ou impossível, por isso precisamos de outros testes de convergência também.

A série no Exemplo 2 é chamada **série *p***. É importante para o restante deste capítulo; desse modo, resumimos os resultados do Exemplo 2 para referência futura como a seguir.

1 A série p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

EXEMPLO 3

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série p com $p = 3 > 1$.

(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

é divergente porque ela é uma série p com $p = \frac{1}{3} < 1$.

OBSERVAÇÃO *Não* devemos inferir a partir do Teste da Integral que a soma da série é igual ao valor da integral. De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{enquanto} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Portanto, em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

EXEMPLO 4 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\ln x)/x$ é positiva e contínua para $x > 1$ porque a função logaritmo é contínua. Mas não é óbvio se f é decrescente ou não; assim, calculamos sua derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Então $f'(x) < 0$ quando $\ln x > 1$, isto é, $x > e$. Segue que f é decrescente quando $x > e$ e podemos aplicar o Teste da Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Como essa integral imprópria é divergente, a série $\Sigma\, (\ln n)/n$ também é divergente pelo Teste da Integral.

Estimando a Soma de uma Série

Suponha que possamos usar o Teste da Integral para mostrar que uma série $\Sigma\, a_n$ seja convergente e que queremos encontrar uma aproximação para a soma s da série. Claro, qualquer soma parcial s_n é uma aproximação para s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Mas quão precisa é tal aproximação? Para descobrirmos, precisamos estimar o tamanho do **resto**

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

O resto R_n é o erro resultante de quando s_n, a soma dos n primeiros termos, é utilizada como uma aproximação para a soma total.

Usamos a mesma notação e ideias que no Teste da Integral, supondo que f seja decrescente em $[n, \infty)$. Comparando as áreas dos retângulos com a área sob $y = f(x)$ para $x > n$ na Figura 3, vemos que

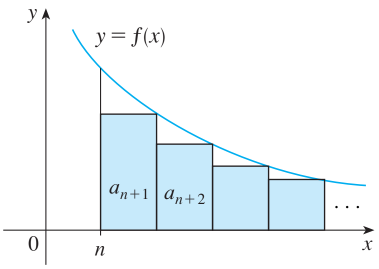


FIGURA 3

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^{\infty} f(x)\, dx$$

De maneira semelhante, vemos, a partir da Figura 4, que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx$$

Assim, demonstramos a seguinte estimativa para o erro:

$\boxed{2}$ **Estimativa do Resto Para o Teste da Integral** Suponha que $f(k) = a_k$, onde f é uma função contínua, positiva, decrescente para $x \geqslant n$ e $\Sigma\, a_n$ é convergente. Se $R_n = s - s_n$, então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

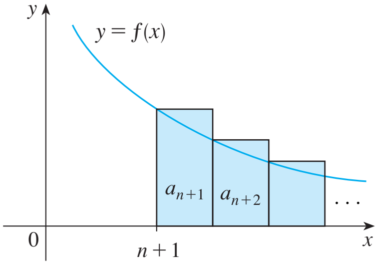


FIGURA 4

EXEMPLO 5

(a) Aproxime a soma da série $\Sigma\, 1/n^3$ usando a soma dos 10 primeiros termos. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

(b) Quantos termos são necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

SOLUÇÃO Em ambas as partes, (a) e (b), precisamos conhecer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Com $f(x) = 1/x^3$, que satisfaz as condições do Teste da Integral, temos

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a) A aproximação da soma da série pela 10ª soma parcial, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

De acordo com a estimativa do resto em $\boxed{2}$, temos

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por conseguinte, o tamanho do erro é no máximo 0,005.

(b) A precisão de 0,0005 significa que temos de encontrar um valor de n tal que $R_n \leqslant 0{,}0005$. Uma vez que

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

queremos
$$\frac{1}{2n^2} < 0{,}0005$$

Resolvendo esta desigualdade, obtemos

$$n^2 > \frac{1}{0{,}001} = 1.000 \qquad \text{ou} \qquad n > \sqrt{1.000} \approx 31{,}6$$

Precisamos de 32 termos para garantir a precisão em 0,0005.

Se acrescentarmos s_n para cada lado das desigualdades em $\boxed{2}$, obtemos

$$\boxed{3} \qquad \boxed{s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx}$$

como $s_n + R_n = s$. As desigualdades em $\boxed{3}$ dão um limite inferior e um limite superior para s. Eles fornecem uma aproximação mais precisa para a soma da série do que a soma parcial s_n.

Embora Euler tenha sido capaz de calcular a soma exata da série p para $p = 2$, ninguém foi capaz de encontrar a soma exata por $p = 3$. No Exemplo 6, no entanto, vamos mostrar como estimativa essa soma.

EXEMPLO 6 Use $\boxed{3}$ com $n = 10$ para estimar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUÇÃO As desigualdades em $\boxed{3}$ tornam-se

$$s_{10} + \int_{11}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

Do Exemplo 5, sabemos que

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

então
$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Usando $s_{10} \approx 1{,}197532$, obtemos

$$1{,}201664 \leqslant s \leqslant 1{,}202532$$

Se aproximarmos s pelo ponto médio desse intervalo, então o erro é no máximo metade do comprimento do intervalo. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1{,}2021 \qquad \text{com erro} < 0{,}0005$$

Se compararmos o Exemplo 6 com o Exemplo 5, veremos que a estimativa melhorada em $\boxed{3}$ pode ser muito melhor que a estimativa $s \approx s_n$. Para fazer um erro menor que 0,0005 tivemos de usar 32 termos no Exemplo 5, mas apenas dez termos no Exemplo 6.

Demonstração do Teste da Integral

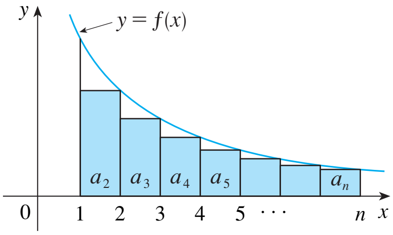


FIGURA 5

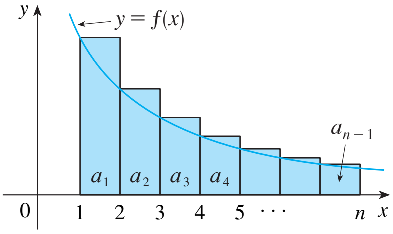


FIGURA 6

Já vimos a ideia básica por trás da demonstração do Teste da Integral nas Figuras 1 e 2 para as séries $\Sigma\, 1/n^2$ e $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$. Para a série geral $\Sigma\, a_n$, olhe as Figuras 5 e 6. A área do primeiro retângulo sombreado na Figura 5 é o valor de f na extremidade direita de $[1, 2]$, isto é, $f(2) = a_2$. Assim, comparando as áreas dos retângulos sombreados com a área sob $y = f(x)$ de 1 até n, vemos que

$$\boxed{4} \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que essa desigualdade depende do fato de f ser decrescente.) Da mesma forma, a Figura 6 mostra que

$$\boxed{5} \qquad \int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então $\boxed{4}$ dá a

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

já que $f(x) \geqslant 0$. Portanto,

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M, \text{ digamos}$$

como $s_n \leqslant M$ para todo n, a sequência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Também

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

já que $a_{n+1} = f(n + 1) \geqslant 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma sequência crescente limitada, e assim, ela é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona (11.1.12). Isso significa que $\Sigma\, a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ quando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Mas $\boxed{5}$ dá a

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e também $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e, assim, $\Sigma\, a_n$ diverge.

11.3 Exercícios

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^{\infty}\frac{1}{x^{1,3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geqslant 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades:

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^3}$

9–26 Determine se a série é convergente ou divergente

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{0,85}}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-1,4}+3n^{-1,2})$

11. $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\cdots$

12. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\cdots$

13. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$

14. $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-4}{n^2-2n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+13}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^3}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$

27–28 Explique por que o Teste da Integral não pode ser usado para determinar se a série é convergente.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\sqrt{n}}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{1+n^2}$

29–32 Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$

33. A função zeta de Riemann ζ é definida por

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

34. Leonhard Euler foi capaz de calcular a soma exata da série p com $p = 2$:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Utilize este fato para encontrar a soma de cada série.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

35. Euler também descobriu a soma da série p com $p = 4$:

$$\zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

Use o resultado de Euler para encontrar a soma da série.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^4$ (b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{(k-2)^4}$

36. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime o erro cometido ao usar s_{10} como uma aproximação para a soma da série.

(b) Utilize $\boxed{3}$ com $n = 10$ para dar uma estimativa melhorada da soma.

(c) Compare sua estimativa da parte (b) com o valor exato dado no Exercício 35.

(d) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00001.

37. (a) Use a soma dos dez primeiros termos para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Quão boa é essa estimativa?

(b) Melhore essa estimativa usando $\boxed{3}$ com $n = 10$.

(c) Compare sua estimativa da parte (b) com o valor exato dado no Exercício 34.

(d) Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação $s \approx s_n$ seja menor que 0,001.

38. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ com precisão de três casas decimais.

39. Estime $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-6}$ com precisão de cinco casas decimais.

40. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria somar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

41. Mostre que, se queremos aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1,001}$ de maneira que o erro seja menor que 5 na nona casa decimal, então precisamos somar mais que $10^{11.301}$ termos!

SCA **42.** (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ é convergente.

(b) Encontre um limitante superior para o erro na aproximação $s \approx s_n$.

(c) Qual é o menor valor de n tal que esse limitante superior seja menor que 0,05?

(d) Encontre s_n para esse valor de n.

43. (a) Use $\boxed{4}$ para mostrar que, se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15 e a soma do primeiro bilhão de termos é menor que 22.

44. Use as seguintes etapas para mostrar que a sequência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.)

(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como uma área [ou use $\boxed{5}$]para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.

(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto, $\{t_n\}$ é uma sequência decrescente.

(c) Use o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

45. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

46. Encontre todos os valores de c para os quais a seguinte série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 Os Testes de Comparação

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos remete à série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente. Como a série $\boxed{1}$ é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Na verdade, é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada $\boxed{1}$ tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Argumentação semelhante pode ser usada para demonstrar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

O Teste de Comparação Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja $$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Como ambas as séries têm termos positivos, as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são crescentes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Também $t_n \to t$, portanto, $t_n \leqslant t$ para todo n. Como $a_i \leqslant b_i$, temos $s_n \leqslant t_n$. Assim, $s_n \leqslant t$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo Teorema da Sequência Monótona. Por conseguinte, $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente, então $t_n \to \infty$ (porque $\{t_n\}$ é crescente). Mas $a_i \geqslant b_i$, assim, $s_n \geqslant t_n$. Então, $s_n \to \infty$. Portanto, $\sum a_n$ diverge.

É importante ter em mente a diferença entre uma sequência e uma série. Uma sequência é uma lista de números, enquanto que uma série é uma soma. Com cada série $\sum a_n$ não estão associadas duas sequências: a sequência $\{a_n\}$ de termos e a sequência $\{s_n\}$ de somas parciais.

Ao usarmos o Teste de Comparação, devemos, é claro, ter algumas séries conhecidas $\sum b_n$ para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma destas séries:

Séries padrão para usar no Teste de Comparação

- Uma série p [$\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$; veja (11.3.1)]
- Uma série geométrica [$\sum ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$; veja (11.2.4)]

EXEMPLO 1 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Para um n grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$, assim, comparamos a série dada com a série $\sum 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação, a_n é o lado esquerdo e b_n é o lado direito.) Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma série p com $p = 2 > 1$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação.

OBSERVAÇÃO 1 Embora a condição $a_n \leqslant b_n$ ou $a_n \geqslant b_n$ no Teste de Comparação seja dada para todo n, precisamos verificar apenas que ela vale para $n \geqslant N$, onde N é algum inteiro fixo, porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos. Isso é ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Teste a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Integral para testar esta série no Exemplo 4 da Seção 11.3, mas também podemos testá-lo comparando-o com a série harmônica. Observe que $k > 1$ para $k \geqslant 3$ e assim

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} \qquad k \geqslant 3$$

Sabemos que $\sum 1/k$ é divergente (série p com $p = 1$). Então, a série dada é divergente pelo Teste de Comparação.

OBSERVAÇÃO 2 Os termos da série sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o Teste de Comparação não se aplica. Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

é inútil para ser usada com o Teste de Comparação, porque $\Sigma\, b_n = \Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente e $a_n > b_n$. Mesmo assim, temos a impressão de que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ deve ser convergente, pois ela é muito parecida com a série geométrica convergente $\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Em tais casos, o seguinte teste pode ser usado.

Os Exercícios 40 e 41 lidam com os casos $c = 0$ e $c = \infty$.

O Teste de Comparação de Limite Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

DEMONSTRAÇÃO Sejam m e M números positivos tais que $m < c < M$. Uma vez que a_n/b_n está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{onde } n > N$$

e, assim,

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{quando } n > N$$

Se $\Sigma\, b_n$ convergir, então $\Sigma\, Mb_n$ também converge. Então, $\Sigma\, a_n$ converge pela parte (i) do Teste de Comparação. Se $\Sigma\, b_n$ divergir, então $\Sigma\, mb_n$ também diverge, e a parte (ii) do Teste de Comparação mostra que $\Sigma\, a_n$ diverge. ■

EXEMPLO 3 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Usamos o Teste de Comparação no Limite com

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

e obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Como esse limite existe e $\Sigma\, 1/2^n$ é uma série geométrica convergente, a série dada converge pelo Teste de Comparação no Limite. ■

EXEMPLO 4 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A parte dominante do numerador é $2n^2$ e a parte dominante do denominador é $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Isso sugere tomar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Como $\Sigma\, b_n = 2\, \Sigma\, 1/n^{1/2}$ é divergente (série p com $p = \frac{1}{2} < 1$), a série dada diverge pelo Teste de Comparação de Limite.

Observe que ao testar muitas séries, encontramos uma série de comparação apropriada $\Sigma\, b_n$ mantendo apenas as potências mais altas no numerador e denominador.

Estimando Somas

Se tivéssemos usado o Teste de Comparação para mostrar que uma série $\Sigma\, a_n$ converge pela comparação com uma série $\Sigma\, b_n$, poderíamos ser capazes de estimar a soma $\Sigma\, a_n$ pela comparação dos restos. Como na Seção 11.3, consideramos o resto

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Para a série de comparação $\Sigma\, b_n$ consideramos o resto correspondente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Como $a_n \leqslant b_n$ para todo n, temos $R_n \leqslant T_n$. Se $\Sigma\, b_n$ é uma série p, podemos estimar seu restante T_n como na Seção 11.3. Se $\Sigma\, b_n$ for uma série geométrica, então T_n é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente (veja os Exercícios 35 e 36). Em qualquer dos dois casos, sabemos que R_n é menor que T_n.

EXEMPLO 5 Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto T_n para a série de comparação $\Sigma\, 1/n^3$ foi estimado no Exemplo 5 da Seção 11.3 usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral. Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto, o resto R_n para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com $n = 100$, temos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005$$

Usando uma calculadora programável ou um computador, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0{,}6864538$$

com erro menor que 0,00005.

11.4 Exercícios

1. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja convergente.

(a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

(b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

2. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja divergente.

(a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

(b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

3–32 Determine se a série converge ou diverge.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\sqrt{n}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{10^n}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3 + 4k + 3}}$ **12.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 1)(k^2 - 1)}{(k + 1)(k^2 + 4)^2}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^{1,2}}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n - 1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n - 2}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^4 + 1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 4^n}{1 + 3^n}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4^n}{n + 6^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 2}}{2n^2 + n + 1}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 2n}{(1 + n^2)^2}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{n^3 + n^2}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$ **34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n}\cos^2 n$ **36.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ (onde o algarismo d_i é um dos números 0, 1, 2, . . . , 9) é que

$$0{,}d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\Sigma_{n=2}^{\infty}\, 1/(n^p \ln n)$ converge?

39. Demonstre que, se $a_n \geqslant 0$ e $\Sigma\, a_n$ converge, então $\Sigma\, a_n^2$ também converge.

40. (a) Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja convergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então $\Sigma\, a_n$ também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja divergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

Então $\Sigma\, a_n$ também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Dê um exemplo de um par de séries $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ com termos positivos para as quais $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\Sigma\, b_n$ diverge, mas $\Sigma\, a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)

43. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\Sigma\, a_n$ é divergente.

44. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\Sigma\, a_n$ for convergente, então $\Sigma \ln(1 + a_n)$ é convergente.

45. Se $\Sigma\, a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ também será convergente?

46. Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\Sigma\, a_nb_n$ também será convergente?

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11.5 Séries Alternadas

Os testes de convergência que estudamos até aqui se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$.)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

Teste da Série Alternada Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Antes de demonstrarmos, vamos olhar a Figura 1, que esboça a ideia por trás da demonstração. Primeiro traçamos $s_1 = b_1$ sobre a reta real. Para encontrarmos s_2, subtraímos b_2; assim s_2 está à esquerda de s_1. Então, para encontrarmos s_3, adicionamos b_3; assim, s_3 está à direita de s_2. Mas, como $b_3 < b_2$, s_3 está à esquerda de s_1. Continuando dessa maneira, vemos que as somas parciais oscilam de um lado para outro. Como $b_n \to 0$, as etapas subsequentes vão se tornando cada vez menores. As somas parciais pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ são crescentes e as somas parciais ímpares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ são decrescentes. Então, parece plausível que ambas estejam convergindo para algum número s, que é a soma da série. Portanto, consideramos as somas parciais pares e ímpares separadamente na demonstração a seguir.

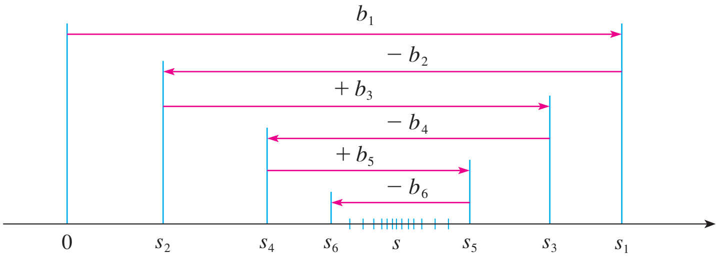


FIGURA 1

DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA SÉRIE ALTERNADA Primeiro consideramos as somas parciais pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{uma vez que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{uma vez que } b_4 \leqslant b_3$$

Em geral
$$s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2} \qquad \text{uma vez que } b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$$

Logo
$$0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$$

Mas podemos escrever também

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Cada termo entre parênteses é positivo, portanto $s_{2n} \leqslant b_1$ para todo n. Dessa forma, a sequência $\{s_{2n}\}$ de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente. É, portanto, convergente pelo Teorema da Sequência Monótona. Vamos chamar esse limite de s, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Agora, calculamos o limite das somas parciais ímpares:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[pela condição (ii)]} \\ &= s \end{aligned}$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ [veja o Exercício 92(a) na Seção 11.1] e, assim, a série é convergente.

A Figura 2 ilustra o Exemplo 1 mostrando os gráficos dos termos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ e as somas parciais s_n. Observe como os valores de s_n. ziguezagueiam em torno de valor limite, o que parece ser cerca de 0,7. Na verdade, pode-se provar que a soma exata da série é $\ln 2 \approx 0{,}693$ (ver Exercício 36).

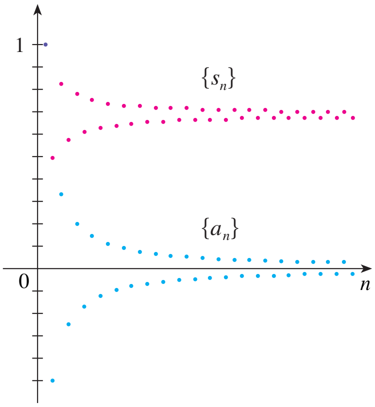


FIGURA 2

EXEMPLO 1 A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

$$\text{(i)}\ \ b_{n+1} < b_n \qquad \text{uma vez que} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)}\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

logo, a série é convergente pelo Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 2 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ é alternada, mas

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

assim, a condição (ii) não é satisfeita. Em vez disto, olhamos para o limite do n-ésimo termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Este limite não existe, logo a série diverge pelo Teste da Divergência.

EXEMPLO 3 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^2}{n^3+1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A série dada é alternada; assim, tentamos verificar as condições (i) e (ii) do Teste da Série Alternada.

Ao contrário da situação no Exemplo 1, não é óbvio que a sequência dada por $b_n = n^2/(n^3+1)$ seja decrescente. Contudo, se considerarmos a função associada $f(x) = x^2/(x^3+1)$, descobriremos que

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Como estamos apenas considerando x positivo, vemos que $f'(x) < 0$ se $2 - x^3 < 0$, isto é, $x > \sqrt[3]{2}$. Então, f é decrescente no intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Isso significa que $f(n+1) < f(n)$ e, portanto, $b_{n+1} < b_n$ quando $n \geqslant 2$. (A desigualdade $b_2 < b_1$ pode ser verificada diretamente, mas o que realmente importa é que a sequência $\{b_n\}$ é eventualmente decrescente.)

Em vez de verificarmos a condição (i) do Teste da Série Alternada calculando uma derivada, poderíamos verificar $b_{n+1} < b_n$ diretamente usando a técnica da Solução 1 do Exemplo 13 da Seção 11.1.

A condição (ii) é prontamente verificada:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Então, a série dada é convergente pelo Teste da Série Alternada.

Estimando Somas

Uma soma parcial s_n de qualquer série convergente pode ser usada como uma aproximação para a soma total s, porém isso não é de muita utilidade, a menos que possamos estimar a precisão da aproximação. O erro envolvido usando $s \approx s_n$ é o resto $R_n = s - s_n$. O próximo teorema diz que, para séries que satisfazem as condições do Teste da Série Alternada, o tamanho do erro é menor que b_{n+1}, que é o valor absoluto do primeiro termo negligenciado.

Teorema da Estimativa de Séries Alternadas Se $s = \Sigma\,(-1)^{n-1} b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz

$$\text{(i)}\ \ b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)}\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

então, $|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$

DEMONSTRAÇÃO Sabemos pela demonstração do Teste da Série Alternada que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer s_n e s_{n+1}. (Mostramos que s é maior que todas as somas até mesmo parciais. Um argumento similar mostra que s é menor que todas as somas ímpares.) Segue-se que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$

Por definição, $0! = 1$.

EXEMPLO 4 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ com precisão de três casas decimais.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que a série é convergente pelo Teste da Série Alternada, porque

$$\text{(i)} \qquad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)} \qquad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{logo} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

Para termos uma ideia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5.040} + \cdots$$

Observe que $\qquad b_7 = \tfrac{1}{5.040} < \tfrac{1}{5.000} = 0{,}0002$

e $\qquad s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0{,}368056$

Na Seção 11.10 demonstraremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para todo x, assim, o que obtivemos no Exemplo 4 é realmente uma aproximação para o número e^{-1}.

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada, sabemos que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0{,}0002$$

Esse erro menor que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal, assim, temos $s \approx 0{,}368$ com precisão de três casas decimais.

OBSERVAÇÃO A regra de que o erro (ao usar s_n para aproximar s) é menor que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.

11.5 Exercícios

1. (a) O que é uma série alternada?
(b) Sob que condições uma série alternada converge?
(c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2–20 Teste a série quanto a convergência ou divergência.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} n$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\pi}{1+\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

21–22 Faça o gráfico de ambas as sequências de termos e de somas parciais na mesma tela. Use o gráfico para fazer uma estimativa aproximada da soma da série. Em seguida, use o Teorema de Estimativa de Séries Alternadas para estimar a soma correta para quatro casas decimais.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0{,}8)^n}{n!}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{8^n}$

23–26 Mostre que a série é convergente. Quantos termos da série precisamos somar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} \quad (|\text{erro}| < 0{,}00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,5^n} \quad (|\text{erro}| < 0{,}0001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!} \quad (|\text{erro}| < 0{,}000005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n} \quad (|\text{erro}| < 0{,}01)$

27–30 Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

31. A 50ª soma parcial s_{50} da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ é uma superestimativa ou uma subestimativa da soma total? Explique.

32–34 Para quais valores de f cada série é convergente?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Mostre que a série $\Sigma\,(-1)^{n-1}b_n$, onde $b_n = 1/n$ se n for ímpar, e $b_n = 1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sejam h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e harmônica alternada.

(a) Mostre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Do Exercício 44 da Seção 11.3 temos

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{quando } n \to \infty$$

e, portanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n} \to \ln 2$ quando $n \to \infty$.

11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Dada qualquer série $\Sigma\, a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

1 Definição Uma série $\Sigma\, a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ for convergente.

Observe que, se $\Sigma\, a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

Temos testes de convergência para séries com termos positivos e para séries alternadas. Mas o que acontece se os sinais dos termos mudarem irregularmente? Veremos no Exemplo 3 que a ideia de convergência absoluta algumas vezes ajuda em tais casos.

EXEMPLO 1 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série p convergente ($p = 2$). ■

EXEMPLO 2 Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente (veja o Exemplo 1 da Seção 11.5), mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica (série p com $p = 1$) e é, portanto, divergente. ■

2 Definição Uma série $\Sigma\, a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

3 **Teorema** Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Observe que a desigualdade

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

é verdadeira porque $|a_n|$ é a_n ou $-a_n$. Se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então $\sum |a_n|$ é convergente, assim $\sum 2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, $\sum (a_n + |a_n|)$ é convergente. Então,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes e é, portanto, convergente.

EXEMPLO 3 Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.) Podemos aplicar o teste de comparação com a série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Uma vez que $|\cos n| \leqslant 1$ para todo n, temos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\sum 1/n^2$ é convergente (série p com $p = 2$) e, assim, $\sum |\cos n|/n^2$ é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada $\sum (\cos n)/n^2$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente pelo Teorema 3.

A Figura 1 mostra os gráficos dos termos a_n e das somas parciais s_n da série no Exemplo 3. Observe que a série não é alternada, mas tem termos positivos e negativos.

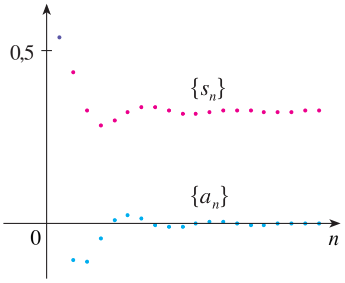


FIGURA 1

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) A ideia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$. Uma vez que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \qquad \text{e} \qquad L < r$$

a razão $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{sempre que} \quad n \geqslant N$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{4} \qquad |a_{n+1}| < |a_n| r \qquad \text{sempre que} \quad n \geqslant N$$

Colocando n sucessivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$, . . . em $\boxed{4}$, obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N| r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}| r < |a_N| r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}| r < |a_N| r^3$$

e, em geral,

$$\boxed{5} \qquad |a_{N+k}| < |a_N| r^k \qquad \text{para todo } k \geqslant 1$$

Agora, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

é convergente porque é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim, a desigualdade $\boxed{5}$, junto com o Teste da Comparação, mostra que a série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

também é convergente. Segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. (Lembre-se de que um número finito de termos não afeta a convergência.) Portanto, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ ou $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, então a razão $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será maior que 1; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{sempre que} \quad n \geqslant N$$

Isso significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geqslant N$, e assim

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Portanto, $\sum a_n$ diverge pelo Teste da Divergência. ■

OBSERVAÇÃO A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\sum 1/n^2$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

enquanto para a série divergente $\sum 1/n$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Portanto, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, a série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. Nesse caso, o Teste da Razão falha e devemos usar outro teste.

O teste da razão é geralmente conclusivo se o n-ésimo termo da série contém um exponencial ou fatorial, como veremos nos Exemplos 4 e 5.

Estimando Somas

Nas últimas três seções, usamos vários métodos para estimar a soma de uma série – o método dependia de qual teste era usado para demonstrar a convergência. O que acontece com a série para a qual o Teste da Razão funciona? Existem duas possibilidades: se a série for alternada, como no Exemplo 4, então é melhor usar os métodos da Seção 11.5. Se os termos são todos positivos, então use os métodos especiais explicados no Exercício 38.

EXEMPLO 4 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^3}{3^n}$ quanto à convergência absoluta.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto, convergente. ▬

EXEMPLO 5 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO Como os termos $a_n = n^n/n!$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{quando } n \to \infty$$

(Veja a Equação 3.6.6, no Volume I). Uma vez que $e > 1$, a série dada é divergente pelo Teste da Razão. ▬

OBSERVAÇÃO Embora o Teste da Razão funcione no Exemplo 5, um método mais simples é usar o Teste para Divergência. Uma vez que

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

segue que a_n não tende a 0 quando $n \to \infty$. Portanto a série dada é divergente pelo Teste para Divergência.

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando n-ésimas potências ocorrem. Sua demonstração é semelhante à demonstração do teste da razão e é deixada como Exercício 41.

O Teste da Raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então a parte (iii) do Teste da Raiz diz que o teste não dá informação. A série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir. (Se $L = 1$ no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1. E se $L = 1$ no Teste da Raiz, não tente o Teste da Razão, pois ele também falhará.)

EXEMPLO 6 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUÇÃO

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz.

Rearranjos

A questão de uma série ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um **rearranjo** de uma série infinita $\Sigma\, a_n$ queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Ocorre que

> se $\Sigma\, a_n$ é uma série absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de $\Sigma\, a_n$ tem a mesma soma s.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrarmos esse fato, vamos considerar a série harmônica alternada

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Veja o Exercício 36 na Seção 11.5.) Se multiplicarmos esta série por $\frac{1}{2}$, obtemos

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série, teremos

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

A soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na sequência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo.

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7 usando o Teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observe que a série em $\boxed{8}$ contém os mesmos termos que em $\boxed{6}$, mas rearranjados de modo que um termo negativo ocorra depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann demonstrou que

> se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma igual a r.

Uma demonstração desse fato é delineada no Exercício 44.

11.6 Exercícios

1. O que você pode dizer sobre a série $\Sigma\, a_n$ em cada um dos seguintes casos?

(a) $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 8$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0{,}8$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

2–30 Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{(1{,}1)^n}{n^4}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

27. $\displaystyle 1-\frac{1\cdot 3}{3!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{5!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!}+\cdots$
$\displaystyle\qquad +(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}+\cdots$

28. $\displaystyle \frac{2}{5}+\frac{2\cdot 6}{5\cdot 8}+\frac{2\cdot 6\cdot 10}{5\cdot 8\cdot 11}+\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}+\cdots$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdot\cdots\cdot(3n+2)}$

31. Os termos de uma série são definidos de forma recursiva pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

32. Uma série $\Sigma\, a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

33–34 Seja $\{b_n\}$ uma sequência de números positivos que converge para $\frac{1}{2}$. Determine se a série dada é absolutamente convergente.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos n\pi}{n}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 b_3 \dots b_n}$

35. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

36. Para quais inteiros positivos k a série é convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

37. (a) Mostre que $\Sigma_{n=0}^{\infty}\, x^n/n!$ converge para todo x.

(b) Deduza que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para todo x.

38. Seja $\Sigma\, a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, assim, $\Sigma\, a_n$ converge pelo Teste da Razão. Como habitualmente, faça R_n ser o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Se $\{r_n\}$ for uma sequência decrescente e $r_{n+1} < 1$, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-r_{n+1}}$$

(b) Se $\{r_n\}$ for uma sequência crescente, mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-L}$$

39. (a) Encontre a soma parcial s_5 da série $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, 1/(n2^n)$. Use o Exercício 38 para estimar o erro ao usar s_5 como uma aproximação da soma da série.

(b) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00005. Use este valor de n para a soma aproximada da série.

40. Utilize a soma dos primeiros dez termos para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Use o Exercício 38 para estimar o erro.

41. Prove o teste de raiz. [*Dica para parte* (*i*): Tome qualquer número r tal que $L < r < 1$ e use o fato de que existe um inteiro N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ sempre que $n \geqslant N$.]

42. Por volta de 1910, o matemático indiano Srinivasa Ramanujan descobriu a fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9.801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1.103+26.390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper usou esta série em 1985 para calcular os primeiros 17 milhões de algarismos de π.

(a) Verifique que a série é convergente.

(b) Quantas casas decimais corretas de π você obtém se usar apenas o primeiro termo da série? E se usar dois termos?

43. Dada uma série qualquer $\Sigma\, a_n$, definimos uma série $\Sigma\, a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\Sigma\, a_n$ e uma série $\Sigma\, a_n^-$ cujos termos são todos termos negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que, se $a_n > 0$, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$, ao passo que, se $a_n < 0$, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$.

(a) Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são convergentes.

(b) Se $\Sigma\, a_n$ for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são divergentes.

44. Demonstre que se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma r. [*Dicas*: Use a notação de Exercício 43. Tome apenas termos positivos suficientes a_n^+ de modo que a sua soma seja maior que r. Em seguida, adicione o menor número de termos negativos a_n^- de modo a que a soma seja menor que r. Continue assim e use o Teorema 11.2.6.]

45. Suponhamos que a série $\Sigma\, a_n$ seja condicionalmente convergente.
(a) Demonstre que a série $\Sigma\, n^2 a_n$ é convergente.
(b) A convergência condicional de $\Sigma\, a_n$ não é suficiente para determinar se $\Sigma\, na_n$ é convergente. Mostre isso dando um exemplo de uma série condicionalmente convergente tal que $\Sigma\, na_n$ converge e um exemplo em que $\Sigma\, na_n$ diverge.

11.7 Estratégia para Testes de Séries

Agora temos diversas maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série; o problema é decidir qual teste usar em qual série. Nesse aspecto, testar séries é similar a integrar funções. Mais uma vez, não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste aplicar em cada série, mas você pode achar os conselhos a seguir proveitosos.

Não é uma boa estratégia aplicar uma lista de testes em uma ordem específica até que um deles finalmente funcione. Isso seria uma perda de tempo e esforço. Em vez disso, como na integração, a principal estratégia é classificar a série de acordo com sua *forma*.

1. Se a série for da forma $\Sigma\, 1/n^p$, ela é uma série p que sabemos ser convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.
2. Se a série tiver a forma $\Sigma\, ar^{n-1}$ ou $\Sigma\, ar^n$, ela é uma série geométrica, que converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$. Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série dessa forma.
3. Se a série tiver uma forma similar a uma série p ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se a_n for uma função racional ou uma função algébrica de n (envolvendo raízes de polinômios), a série deve ser comparada com uma série p. Observe que a maioria das séries nos Exercícios 11.4 tem essa forma. (O valor de p deve ser escolhido como na Seção 11.4, mantendo apenas as potências mais altas de n no numerador e denominador.) Os testes de comparação se aplicam apenas a séries com termos positivos, mas, se $\Sigma\, a_n$ tiver alguns termos negativos, então poderemos aplicar o Teste da Comparação em $\Sigma\, |a_n|$ e testar a convergência absoluta.
4. Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, o Teste para Divergência deve ser usado.
5. Se a série for da forma $\Sigma\, (-1)^{n-1} b_n$ ou $\Sigma\, (-1)^n b_n$, então o Teste da Série Alternada é uma possibilidade óbvia.
6. Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com frequência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ quando $n \to \infty$ para todas as séries p e, portanto, todas as funções racionais ou algébricas de n. Então, o Teste da Razão não deve ser usado para tais séries.
7. Se a_n for da forma $(b_n)^n$, o Teste da Raiz pode ser útil.
8. Se $a_n = f(n)$, onde $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é facilmente calculada, então o Teste da Integral é eficaz (satisfeitas as hipóteses para este teste).

Nos próximos exemplos não faremos todos os cálculos, mas simplesmente indicaremos quais testes devem ser usados.

EXEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Como $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ quando $n \to \infty$, devemos usar o Teste para Divergência.

EXEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n é uma função algébrica de n, comparamos a série dada com uma série p. A série de comparação para o Teste de Comparação de Limite é $\Sigma\, b_n$, onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

EXEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Como a integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é facilmente calculada, usamos o Teste da Integral. O Teste da Razão também funciona.

EXEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como a série envolve $k!$, usamos o Teste da Razão.

EXEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, usamos o Teste da Comparação.

11.7 Exercícios

1–38 Teste a série quanto a convergência ou divergência.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\operatorname{sen} k}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

11.8 Séries de Potências

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixado, a série $\boxed{1}$ é uma série de constantes que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Série trigonométrica
Uma série de potências é uma série em que cada termo é uma função de potência. Uma **série trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

é uma série cujos termos são funções trigonométricas.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geqslant 1$ (veja a Equação 11.2.5).

Em geral, a série da forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

é chamada uma **série de potências em** $(x - a)$ ou uma **série de potências centrada em *a*** ou uma **série de potências em torno de *a***. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$ nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que $(x - a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geqslant 1$ e assim a série de potências $\boxed{2}$ sempre converge quando $x = a$.

EXEMPLO 1 Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão. Se fizermos a_n, como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então $a_n = n!x^n$. Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Observe que

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= (n+1)n!$$

Pelo Teste da Razão, a série diverge quando $x \neq 0$. Então, a série dada converge apenas quando $x = 0$.

EXEMPLO 2 Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

SOLUÇÃO Seja $a_n = (x - 3)^n/n$. Então,

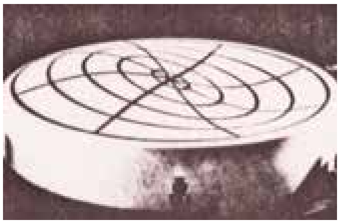
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$
$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} |x-3| \to |x-3| \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto, convergente, quando $|x - 3| < 1$ e é divergente quando $|x - 3| > 1$. Agora

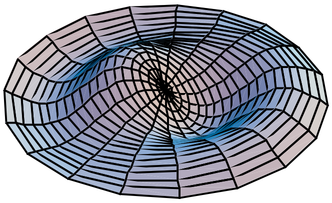
$$|x-3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

de modo que a série converge quando $2 < x < 4$ e diverge quando $x < 2$ ou $x > 4$.

O Teste da Razão não fornece informação quando $|x - 3| = 1$; assim, devemos considerar $x = 2$ e $x = 4$ separadamente. Se colocarmos $x = 4$ na série, ela se tornará $\Sigma\, 1/n$, a série harmônica, que é divergente. Se $x = 2$, a série é $\Sigma\, (-1)^n/n$, que converge pelo Teste da Série Alternada. Então a série dada converge para $2 \leqslant x < 4$.



National Film Board of Canada



Observe quão bem o modelo gerado por computador (que envolve funções de Bessel e funções cosseno) se ajusta à fotografia de uma membrana de borracha vibrando.

Veremos que o principal uso de uma série de potências é que ela fornece uma maneira de representar algumas das mais importantes funções que aparecem na matemática, na física e na química. Em particular, a soma da série de potências no próximo exemplo é chamada **função de Bessel**, em homenagem ao astrônomo alemão Friedrich Bessel (1784-1846), e a função dada no Exercício 35 é outro exemplo de uma função de Bessel. De fato, essas funções surgiram primeiramente quando Bessel resolveu a equação de Kepler da descrição do movimento planetário. Desde aquela época, essas funções têm sido aplicadas em muitas situações físicas diferentes, incluindo a distribuição de temperatura em uma placa circular e a forma de uma membrana vibrante.

EXEMPLO 3 Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUÇÃO Seja $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para todo } x$$

Assim, pelo Teste de Razão, a série dada converge para todos os valores de x. Em outras palavras, o domínio da função Bessel J_0 é $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

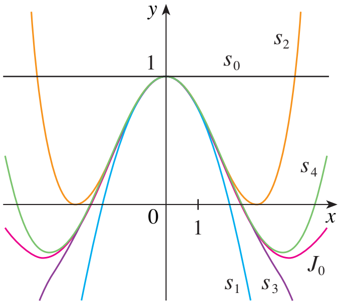


FIGURA 1
Somas parciais da função de Bessel J_0

Lembre-se de que a soma de uma série é igual ao limite da sequência das somas parciais. Assim, quando definimos a função de Bessel no Exemplo 3 como a soma de uma série, queremos dizer que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{onde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

As primeiras somas parciais são

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304} + \frac{x^8}{147.456}$$

A Figura 1 mostra os gráficos dessas somas parciais, que são polinômios. Todas são aproximações para a função J_0, mas observe que as aproximações se tornam melhores quando mais termos são incluídos. A Figura 2 mostra um gráfico mais completo da função de Bessel.

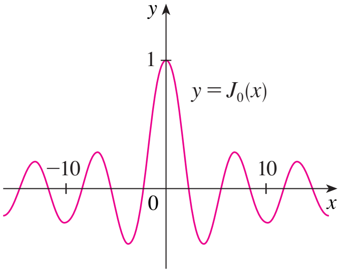


FIGURA 2

Para as séries de potências que vimos até agora, o conjunto de valores de x para os quais a série é convergente tem sempre sido um intervalo [um intervalo finito para a série geométrica e a série no Exemplo 2, o intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ no Exemplo 3 e um intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ no Exemplo 1]. O teorema a seguir, demonstrado no Apêndice F, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

3 Teorema Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.
(ii) A série converge para todo x.
(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii). O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x-a| < R$ pode ser reescrita como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma *extremidade* do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer — a série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R,\, a+R) \qquad (a-R,\, a+R] \qquad [a-R,\, a+R) \qquad [a-R,\, a+R]$$

A situação é ilustrada na Figura 3.

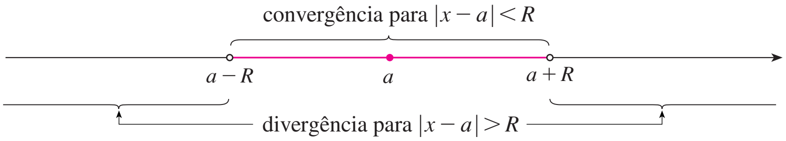


FIGURA 3

Resumimos aqui o raio e o intervalo de convergência para cada um dos exemplos já considerados nesta seção.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

Em geral, o Teste da Razão (ou algumas vezes o Teste da Raiz) deve ser usado para determinar o raio de convergência R. Os Testes da Razão e da Raiz sempre falham quando x é uma extremidade do intervalo de convergência; assim, as extremidades devem ser estudadas com outro teste.

EXEMPLO 4 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUÇÃO Seja $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1 + (1/n)}{1 + (2/n)}}\,|x| \to 3|x| \text{quando } n \to \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série dada converge se $3|x| < 1$ e diverge se $3|x| > 1$. Então, ela converge se $|x| < \frac{1}{3}$ e diverge se $|x| > \frac{1}{3}$. Isso significa que o raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que a série converge no intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, mas devemos agora testar a convergência nas extremidades desse intervalo. Se $x = -\frac{1}{3}$, a série torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que diverge. (Use o Teste da Integral ou simplesmente observe que ela é uma série p com $p = \frac{1}{2} < 1$.) Se $x = \frac{1}{3}$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série de potências dada converge quando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$; assim, o intervalo de convergência é $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

EXEMPLO 5 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUÇÃO Se $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Usando o Teste da Razão vemos que a série converge se $|x+2|/3 < 1$ e diverge se $|x+2|/3 > 1$. Assim ela converge se $|x+2| < 3$ e diverge se $|x+2| > 3$. Então, o raio de convergência é $R = 3$.

A desigualdade $|x+2| < 3$ pode ser escrita como $-5 < x < 1$, assim, testamos a série nas extremidades -5 e 1. Quando $x = -5$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge pelo Teste para Divergência [$(-1)^n n$ não converge para 0]. Quando $x = 1$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

que também diverge pelo Teste para Divergência. Então, a série converge apenas quando $-5 < x < 1$, de modo que o intervalo de convergência é $(-5, 1)$.

11.8 Exercícios

1. O que é uma série de potências?

2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

(b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n} (x-a)^n, \quad b > 0$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

---

29. O fato de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ ser convergente implica que as séries a seguir são convergentes?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convirja quando $x = -4$ e divirja quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sejam p e q números reais com $p < q$. Encontre uma série de potências cujo intervalo de convergência seja

(a) (p, q) (b) $(p, q]$

(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. É possível encontrar uma série de potências cujo intervalo de convergência seja $[0, \infty)$? Explique.

34. Trace na mesma tela as primeiras somas $s_n(x)$ da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto com a função-soma $f(x) = 1/(1-x)$, em uma tela comum. Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para $f(x)$?

35. A função J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

é denominada *função de Bessel de ordem* 1.

(a) Encontre seu domínio.

(b) Trace as primeiras somas parciais na mesma tela.

SCA (c) Se seu SCA tiver funções de Bessel programadas, trace J_1 na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais se aproximam de J_1.

36. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada *função de Airy*, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês sir George Airy (1801-1892).

(a) Encontre o domínio da função de Airy.

(b) Trace as primeiras somas parciais na mesma tela.

SCA (c) Se seu SCA tiver funções de Airy programadas, trace A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

37. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são $c_{2n} = 1$ e $c_{2n+1} = 2$ para todo $n \geqslant 0$. Ache o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para $f(x)$.

38. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $c_{n+4} = c_n$ para todo $n \geqslant 0$, encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para $f(x)$.

39. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, onde $c \neq 0$, então o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ é $R = 1/c$.

40. Suponha que a série de potência $\sum c_n(x-a)^n$ satisfaça $c_n \neq 0$ para todo n. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existir, então ele será igual ao o raio de convergência da série de potências.

41. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n)x^n$?

42. Suponha que o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio da série de potências $\sum c_n x^{2n}$?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11.9 Representações de Funções como Séries de Potências

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela derivação ou integração de tais séries. Você pode estar se perguntando por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, para resolver as equações diferenciais e para aproximar funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1}$$

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 6 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1 - x)$ como uma soma de uma série de potências.

Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

é a n-ésima soma parcial. Observe que à medida que n aumenta, $s_n(x)$ se torna uma aproximação cada vez melhor de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

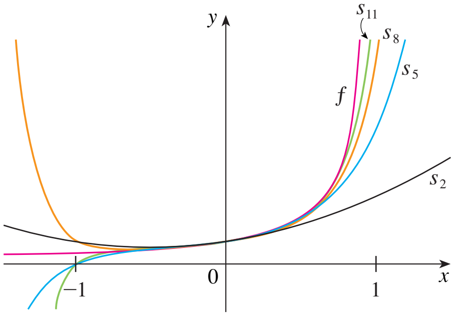


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais

EXEMPLO 1 Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.)

EXEMPLO 2 Encontre uma representação em série de potências para $1/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Para colocarmos essa função na forma do lado esquerdo da Equação 1, primeiro fatoramos um 2 do denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

A série converge quando $|-x/2| < 1$, isto é, $|x| < 2$. Assim, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

EXEMPLO 3 Encontre uma representação em série de potências para $x^3/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Como essa função é apenas x^3 vezes a função no Exemplo 2, tudo o que temos de fazer é multiplicar essa série por x^3:

É válido mover x^3 para dentro do sinal de somatória, porque ele não depende de n. [Use o Teorema 11.2.8(i) com $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Outra maneira de escrever essa série é a seguinte:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n$$

Como no Exemplo 2, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Derivação e Integração de Séries de Potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder derivar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não demonstraremos) diz que podemos fazer isso por derivação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **derivação e integração termo a termo**.

2 Teorema Se a série de potências $\sum c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a - R, a + R)$ e

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Na parte (ii), $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ é escrito como $c_0(x - a) + C$, onde $C = C_1 + ac_0$; assim, todos os termos da série têm a mesma forma.

OBSERVAÇÃO 1 As Equações (i) e (ii) no Teorema 2 podem ser reescritas na forma

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

(iv) $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n\,dx$$

Sabemos que, para somas finitas, a derivada de uma soma é a soma das derivadas, e que a integral de uma soma é a soma das integrais. As Equações (iii) e (iv) afirmam que o mesmo é verdadeiro para somas infinitas, desde que estejamos lidando com *séries de potências*. (Para outros tipos de séries de funções a situação não é tão simples; veja o Exercício 38.)

OBSERVAÇÃO 2 Embora o Teorema 2 diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é derivada ou integrada, isso não significa que o *intervalo* de convergência permaneça o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em uma extremidade enquanto a série derivada diverge nesse ponto (veja o Exercício 39).

OBSERVAÇÃO 3 A ideia de derivação de uma série de potências termo a termo é a base para um método poderoso para resolver as equações diferenciais. Discutiremos esse método no Capítulo 17.

EXEMPLO 4 No Exemplo 3 da Seção 11.8, vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

é definida para todo x. Então, pelo Teorema 2, J_0 é diferenciável para todo x, e sua derivada é encontrada pela derivação termo a termo, como a seguir:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$

EXEMPLO 5 Expresse $1/(1 - x)^2$ como uma série de potências pela derivação da Equação 1. Qual é o raio de convergência?

SOLUÇÃO Derivando cada lado da equação

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtemos

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Podemos trocar n por $n + 1$ e escrever a resposta como

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$$

De acordo com o Teorema 2, o raio de convergência da série derivada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, $R = 1$.

EXEMPLO 6 Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1 + x)$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Observamos que, a derivada desta função é $1/(1 + x)$. Da Equação 1 temos

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\begin{aligned} \ln\,(1 + x) &= \int \frac{1}{1 + x}\,dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots)\,dx \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

Para determinarmos o valor de C colocamos $x = 0$ nessa equação e obtemos $\ln(1 + 0) = C$.

Assim, $C = 0$ e

$$\ln(1 - x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: $R = 1$.

EXEMPLO 7 Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \text{tg}^{-1}x$.

SOLUÇÃO Observamos que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ e encontramos a série pedida pela integração da série de potências para $1/(1 + x^2)$ encontrada no Exemplo 1.

$$\text{tg}^{-1}x = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para encontrarmos C, colocamos $x = 0$ e obtemos $C = \text{tg}^{-1}\,0 = 0$. Portanto

$$\text{tg}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

Como o raio de convergência da série para $1/(1 + x^2)$ é 1, o raio de convergência dessa série para $\text{tg}^{-1}x$ é também 1.

A série de potência para $\text{tg}^{-1}x$ obtida no Exemplo 7 é chamada *série de Gregory* devido ao matemático escocês James Gregory (1638-1675), que antecipou algumas das descobertas de Newton. Mostramos que a série de Gregory é válida quando $-1 < x < 1$, mas verifica-se (embora não seja fácil de provar) que também é válida quando $x = \pm 1$. Observe que quando $x = 1$ a série se torna

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Esse belo resultado é conhecido como a fórmula de Leibniz para π.

EXEMPLO 8

(a) Calcule $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como uma série de potências.

(b) Use a parte (a) para aproximar $\int_0^{0,5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ com precisão de 10^{-7}.

SOLUÇÃO

(a) A primeira etapa é expressar o integrando, $1/(1 + x^7)$, como a soma de uma série de potências.

Como no Exemplo 1, começamos com a Equação 1 e trocamos x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Este exemplo ilustra uma maneira na qual as representações em séries de potência são úteis. Integrar $1/(1 + x^7)$ manualmente é incrivelmente difícil. Sistemas de computação algébrica devolvem formas diferentes da resposta, mas elas são todas extremamente complicadas. (Se você tem um SCA, tente você mesmo.) Na realidade é muito mais fácil lidar com a resposta em série infinita obtida no Exemplo 8(a) do que com a resposta finita dada por um SCA.

Agora integramos termo a termo:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n + 1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Essa série converge para $|-x^7| < 1$, isto é, para $|x| < 1$.

(b) Ao aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, não importa qual antiderivada utilizamos; assim vamos usar a antiderivada da parte (a) com $C = 0$:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n + 1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Essa série infinita é o valor exato da integral definida, mas, como é uma série alternada, podemos aproximar a soma usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. Se pararmos de somar depois do termo com $n = 3$, o erro é menor que o termo com $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6{,}4 \times 10^{-11}$$

Logo, temos

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0{,}49951374$$

11.9 Exercícios

1. Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual será o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$? Por quê?

2. Suponha que você saiba que a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11–12 Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

13. (a) Use derivação para encontrar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Use item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Use a Equação 1 para determinar uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1+x)$. Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x \ln(1-x)$.

(c) Ao colocar $x = \frac{1}{2}$ no seu resultado da parte (a), expresse ln 2 como a soma de uma série infinita.

15–20 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

15. $f(x) = \ln(5-x)$

16. $f(x) = x^2 \operatorname{tg}^{-1}(x^3)$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

21–24 Encontre uma representação em série de potências para f, trace f e várias somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela. O que acontece quando n cresce?

21. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

22. $f(x) = \ln(x^2+4)$

23. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

24. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(2x)$

25–28 Calcule a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

25. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

26. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^3}\,dt$

27. $\displaystyle\int x^2 \ln(1+x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x}\,dx$

29–32 Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

29. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0,4} \ln(1+x^4)\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{0,1} x \operatorname{arctg}(3x)\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{0,3} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

33. Use o resultado do Exemplo 7 para calcular arctg 0,2 com precisão de cinco casas decimais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

34. Demonstre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

35. (a) Mostre que J_0 (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Calcule $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ com precisão de três casas decimais.

36. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

37. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

38. Seja $f_n(x) = (\text{sen}\, nx)/n^2$. Mostre que a série $\Sigma f_n(x)$ converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$, n um inteiro. Para quais valores de x a série $\Sigma f_n''(x)$ converge?

39. Considere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

40. (a) Começando com a série geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1 \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$$

$$\text{(ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

41. Use a série de potências para $\text{tg}^{-1}x$ para demonstrar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

42. (a) Completando o quadrado, mostre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Usando a fatoração de $x^3 + 1$ como uma soma de cubos, reescreva a integral no item (a). Depois expresse $1/(x^3 + 1)$ como a soma de uma série de potências e use-a para demonstrar a seguinte fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 Séries de Taylor e Maclaurin

Na seção anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções. Aqui investigaremos problemas mais gerais: Quais as funções que têm representações de séries de potências? Como podemos achar tais representações?

Começaremos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \quad |x-a| < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer em termos de f. Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos após o primeiro são 0 e obtermos

$$f(a) = c_0$$

Pelo Teorema 11.9.2, podemos derivar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3 fornece

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 4 fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n nessa equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Taylor e Maclaurin

A série de Taylor é assim chamada em homenagem ao matemático Inglês Brook Taylor (1685-1731) e da série de Maclaurin é assim denominada em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), apesar do fato de que a série de Maclaurin é realmente apenas um caso especial da série de Taylor. Mas a ideia de representar funções específicas como somas de séries de potências remonta a Newton, e a série geral de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory, em 1668, e pelo matemático suíço John Bernoulli, na década de 1690. Taylor aparentemente ignorava a obra de Gregory e Bernoulli quando publicou suas descobertas sobre a série em 1715, em seu livro *Methodus incrementorum directa et inversa*. A série de Maclaurin é assim denominada devido a Colin Maclaurin porque ele a popularizou em seu livro de cálculo *Treatise of Fluxions* publicado em 1742.

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da seguinte forma:

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

A série na Equação 6 é chamada **série de Taylor da função f em a** (ou **em torno de a** ou **centrado em a**). Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

OBSERVAÇÃO Mostramos que, *se* f puder ser representada como uma série de potências em torno de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor. Mas existem funções que não são iguais à soma de suas séries de Taylor. Um exemplo de tal função é dado no Exercício 74.

EXEMPLO 1 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para encontrarmos o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

de modo que, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e o raio de convergência é $R = \infty$.

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que *se* e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim, como determinar se e^x *tem* uma representação em série de potências?

Vamos investigar a questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor? Em outras palavras, se f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Como com qualquer série convergente, isso significa que $f(x)$ é o limite da sequência das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observe que T_n é um polinômio de grau n chamado **polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a**. Por exemplo, para a função exponencial $f(x) = e^x$, o resultado do Exemplo 1 mostra que os polinômios de Taylor em 0 (ou polinômios de Maclaurin) com $n = 1$, 2 e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

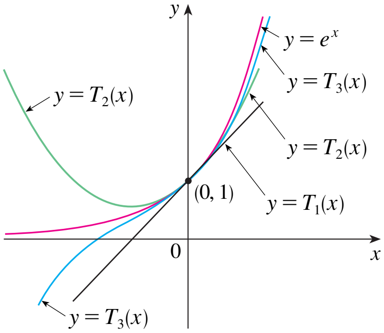


FIGURA 1

Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar e^x na Figura 1. Isso sugere que e^x seja igual à soma de sua série de Taylor.

Os gráficos da função exponencial e desses três polinômios de Taylor estão desenhados na Figura 1.

Em geral, $f(x)$ é a soma da sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Se considerarmos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de modo que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

então, $R_n(x)$ é denominado **resto** da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, teremos mostrado que

$$\lim_{n \to \infty} T_n(x) = \lim_{n \to \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x)$$

Assim, demonstramos o seguinte teorema:

$\boxed{8}$ **Teorema** Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Ao tentarmos mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para uma função específica f, geralmente usamos o teorema a seguir.

$\boxed{9}$ **Desigualdade de Taylor** Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Fórmulas para o Termo Restante de Taylor

Como alternativas para a desigualdade de Taylor, temos as seguintes fórmulas para resto. Se $f^{(n+1)}$ for contínua sobre um intervalo I e $x \in I$, então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Essa é chamada forma integral do resto. Outra fórmula, chamada forma de Lagrange para o resto, afirma que existe um número z entre x e a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Essa versão é uma extensão do Teorema do Valor Médio (que é o caso $n = 0$).

Para vermos por que isso é verdadeiro para $n = 1$, assumimos que $|f''(x)| \leqslant M$. Em particular, temos $f''(x) \leqslant M$, assim, para $a \leqslant x \leqslant a + d$ temos

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt$$

Uma antiderivada de f'' é f', dessa forma, pela parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x - a) \qquad \text{ou} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x - a)$$

Logo,

$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t - a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x - a) + M\frac{(x - a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \leqslant \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Mas $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Portanto

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Um argumento similar, usando $f''(x) \geqslant -M$, mostra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x - a)^2$$

Então

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x - a|^2$$

Embora tenhamos suposto que $x > a$, cálculos similares mostram que essa desigualdade é também verdadeira para $x < a$.

Isso demonstra a Desigualdade de Taylor para o caso onde $n = 1$. O resultado para um n qualquer é demonstrado de maneira similar pela integração $n + 1$ vezes. (Veja o Exercício 73 para o caso $n = 2$.)

OBSERVAÇÃO Na Seção 11.11 exploraremos o uso da Desigualdade de Taylor para aproximar funções. Nosso uso imediato é aplicá-la em conjunto com o Teorema 8.

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

10 $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x}$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série $\Sigma\, x^n/n!$ converge para todo x, e seu n-ésimo termo tende a 0.

EXEMPLO 2 Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d é qualquer número positivo e $|x| \leqslant d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Assim, a Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Mas, pela Equação 10, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Decorre do Teorema do Confronto que $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 8, e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é

11 $$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x}$$ ■

Em particular, se colocarmos $x = 1$ na Equação 11, obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita:

12 $$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

Em 1748 Leonhard Euler usou a Equação 12 para achar o valor correto de e até 23 algarismos. Em 2007 Shigeru Kondo, novamente usaram a série em $\boxed{12}$, e calcularam e com 12 bilhões de casas decimais.

EXEMPLO 3 Encontre a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $a = 2$.

SOLUÇÃO Temos $f^{(n)}(2) = e^2$ e, assim, colocando $a = 2$ na definição de uma série de Taylor $\boxed{6}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Novamente pode ser verificado, como no Exemplo 1, que o raio de convergência é $R = \infty$. Como no Exemplo 2, podemos verificar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, assim

13 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para todo } x$$ ■

Temos duas expansões em série de potência para e^x, a série Maclaurin na Equação 11 e da série de Taylor na Equação 13. A primeira é melhor, se estivermos interessados em valores de x próximos de 0, e a segunda é melhor se x é próximo de 2.

EXEMPLO 4 Encontre a série de Maclaurin de sen x e demonstre que ela representa sen x para todo x.

SOLUÇÃO Arranjamos nossos cálculos em duas colunas como a seguir:

A Figura 2 mostra o gráfico de sen x com seus polinômios de Taylor (ou Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que, quando n aumenta, $T_n(x)$ torna-se uma aproximação melhor para sen x.

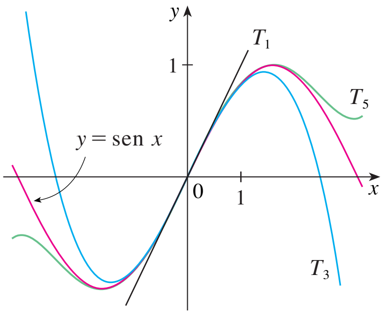


FIGURA 2

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}\, x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\text{sen}\, x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \text{sen}\, x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Como as derivadas se repetem em um ciclo de quatro, podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm$sen x ou $\pm\cos x$, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para todo x. Assim, podemos tomar $M = 1$ na Desigualdade de Taylor:

14

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pela Equação 10, o lado direito dessa desigualdade tende a 0 quando $n \to \infty$, dessa forma, $|R_n(x)| \to 0$ pelo Teorema do Confronto. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, assim, sen x é igual à soma de sua série de Maclaurin pelo Teorema 8.

Destacamos o resultado do Exemplo 4 para referência futura.

15

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para todo } x \end{aligned}}$$

EXEMPLO 5 Encontre a série de Maclaurin para cos x.

SOLUÇÃO Poderíamos proceder diretamente como no Exemplo 4, mas é mais fácil derivar a série de Maclaurin de sen x dada pela Equação 15:

As séries de Maclaurin para e^x, sen x e cos x que encontramos nos Exemplos 2, 4, e 5 foram descobertas, utilizando diferentes métodos, por Newton. Essas equações são notáveis, porque dizem que saberemos tudo sobre cada uma destas funções, se conhecermos todos as suas derivadas no ponto 0.

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Como a série de Maclaurin de sen x converge para todo x, o Teorema 2 da Seção 11.9 nos diz que a série derivada para cos x também converge para todo x. Assim,

16

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para todo } x \end{aligned}}$$

EXEMPLO 6 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = x \cos x$.

SOLUÇÃO Em vez de calcular derivadas e substituir na Equação 7, é mais fácil multiplicar a série para cos x (Equação 16) por x:

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

EXEMPLO 7 Represente $f(x) = \text{sen}\, x$ como a soma de sua série de Taylor centrada em $\pi/3$.

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}\, x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\text{sen}\, x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e esse padrão se repete indefinidamente. Portanto, a série de Taylor em $\pi/3$ é

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

A demonstração de que essa série representa sen x para todo x é muito semelhante à feita no Exemplo 4. (Apenas troque x por $x - \pi/3$ em $\boxed{14}$.) Podemos escrever a série na notação sigma se separarmos os termos que contêm $\sqrt{3}$:

$$\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

Obtivemos duas representações em série diferentes para sen x, isto é, a série de Maclaurin, no Exemplo 4, e a série de Taylor, no Exemplo 7. É melhor usarmos a série de Maclaurin para valores de x próximos de 0 e a série de Taylor para valores de x próximos de $\pi/3$. Observe que o terceiro polinômio de Taylor T_3 na Figura 3 é uma boa aproximação para sen x próximo de $\pi/3$, mas não tão boa para o próximo de 0. Compare-o com o terceiro polinômio de Maclaurin T_3 na Figura 2, na qual o oposto é verdadeiro.

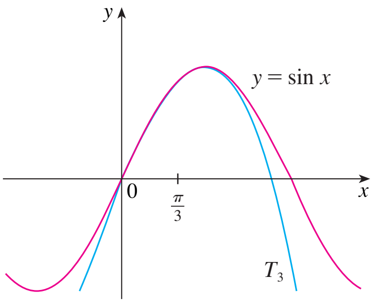


FIGURA 3

A série de potências que obtivemos por métodos indiretos nos Exemplos 5 e 6 e na Seção 11.9 são realmente as séries de Taylor e de Maclaurin das funções dadas, porque o Teorema 5 afirma que, não importa como uma representação de série de potências $f(x) = \Sigma\, c_n(x-a)^n$ é obtida, é sempre verdade que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Em outras palavras, os coeficientes são determinados unicamente.

EXEMPLO 8 Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer.

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k \\ f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1) \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1) \end{aligned}$$

Portanto, a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$$

Essa série é chamada **série binomial**. Observe que, se k é um inteiro não negativo, então os termos são, eventualmente, nulos, de modo que a série é finita. Para outros valores de k, nenhum dos termos é 0 e assim podemos tentar o Teste da Razão. Se o n-ésimo termo é a_n, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \qquad \text{quando } n\to\infty$$

Logo, pelo Teste da Razão, a série binomial converge se $|x|<1$ e diverge se $|x|>1$. ■

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

e esses números são chamados **coeficientes binomiais**.

O teorema a seguir afirma que $(1+x)^k$ é igual à soma de sua série de Maclaurin. É possível demonstrar isso mostrando que o resto $R_n(x)$ tende a 0, mas assim acaba sendo muito difícil. A demonstração delineada no Exercício 75 é muito mais simples.

17 A Série Binomial Se k for um número real qualquer e $|x|<1$, então

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Embora a série binomial sempre convirja quando $|x|<1$, a questão de ser ou não convergente nas extremidades, ± 1, depende do valor de k. Ocorre que a série converge em 1 se $-1<k\leqslant 0$ e em ambas as extremidades se $k\geqslant 0$. Observe que se k for um inteiro positivo e $n>k$, então a expressão para $\binom{k}{n}$ contém um fator $(k-k)$, de modo que $\binom{k}{n}=0$ para $n>k$. Isto significa que a série acaba e se reduz ao Teorema Binomial usual quando k for um inteiro positivo. (Veja a Página de Referência 1.)

EXEMPLO 9 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Escrevemos $f(x)$ em uma forma na qual podemos usar a série binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando a série binomial com $k=-\frac{1}{2}$ e com x substituído por $-x/4$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1 \cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabemos de $\boxed{17}$ que essa série converge quando $|-x/4| < 1$, ou seja, $|x| < 4$, de modo que o raio de convergência é $R = 4$.

Listamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que deduzimos nesta seção e na precedente.

TABELA 1

Séries de Maclaurin importantes e seus raios de convergência

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1 + x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

EXEMPLO 10 Calcule a soma da série $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \ldots$

SOLUÇÃO Com a notação sigma podemos escrever a série dada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n}$$

Em seguida, a partir da Tabela 1 podemos ver que esta série corresponde à entrada para $\ln(1 + x)$ com $x = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln(1 + \tfrac{1}{2}) = \ln \tfrac{3}{2}$$

TEC O *Module 11.10/11.11* permite que você veja como sucessivos polinômios de Taylor se aproximam da função original.

Uma razão pela qual as séries de Taylor são importantes é que elas nos permitem integrar funções com as quais não podíamos lidar anteriormente. De fato, na introdução deste capítulo mencionamos que Newton frequentemente integrava funções expressando-as inicialmente como uma série de potências e então integrando-as termo a termo. A função $f(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada pelas técnicas discutidas até agora porque sua antiderivada não é uma função elementar (veja a Seção 7.5). No exemplo a seguir, usamos a ideia de Newton para integrar esta função.

EXEMPLO 11

(a) Calcule $\int e^{-x^2}\, dx$ como uma série infinita.

(b) Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ com precisão de 0,001.

SOLUÇÃO

(a) Primeiro encontramos a série de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Embora seja possível usar o método direto, vamos encontrá-la simplesmente trocando x por $-x^2$ na série para e^x dada na Tabela 1. Então, para todos os valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Agora integramos termo a termo:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Essa série converge para tudo, porque a série original para e^{-x^2} converge para todo x.

(b) O Teorema Fundamental do Cálculo fornece

Podemos tomar $C = 0$ na antiderivada na parte (a).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0{,}7475$$

O Teorema da Estimativa da Série Alternada mostra que o erro envolvido nessa aproximação é menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1.320} < 0{,}001$$

Outro uso da série de Taylor é ilustrado no próximo exemplo. O limite poderia ser encontrado com a Regra de l'Hôspital, mas, em vez disso, usamos uma série.

EXEMPLO 12 Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Usando a série de Maclaurin para e^x, temos

Alguns sistemas de computação algébrica calculam limites dessa maneira.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque as séries de potências são funções contínuas.

Multiplicação e Divisão de Séries de Potências

Se as séries de potências forem somadas ou subtraídas, elas se comportarão como polinômios (o Teorema 11.2.8 mostra isso). De fato, como o próximo exemplo ilustra, elas também podem ser multiplicadas e divididas como polinômios. Encontramos apenas os primeiros termos, pois os cálculos para os termos posteriores tornam-se tediosos e os termos iniciais são os mais importantes.

EXEMPLO 13 Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de (a) e^x sen x e (b) tg x.

SOLUÇÃO

(a) Usando a série de Maclaurin de e^x e sen x na Tabela 1, temos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Multiplicamos essas expressões, juntando os termos semelhantes como nos polinômios:

$$\begin{array}{rl}
 & 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\times & x \qquad\qquad - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \hline
 & x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 + \cdots \\
+ & \qquad\qquad - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4 - \cdots \\ \hline
 & x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}$$

Logo, $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$

(b) Usando as séries de Maclaurin da Tabela 1, obtemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos um procedimento parecido com a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{rl}
 & x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \cline{2-2}
1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \cdots \big) & x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{24}x^5 - \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \qquad \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}$$

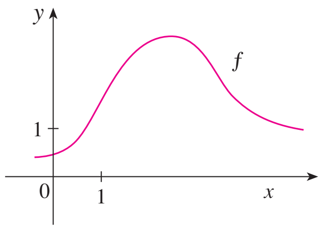
Logo, $\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$

Embora não tenhamos tentado justificar as manipulações formais usadas no Exemplo 13, elas são legítimas. Existe um teorema que afirma que, se $f(x) = \sum c_n x^n$ e $g(x) = \sum b_n x^n$ convergirem para $|x| < R$ e as séries forem multiplicadas como se fossem polinômios, então, a série resultante também convergirá para $|x| < R$ e representará $f(x)g(x)$. Para a divisão, necessitamos de $b_0 \neq 0$; a série resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeno.

11.10 Exercícios

1. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para todo x, escreva uma fórmula para b_8.

2. É dado o gráfico de f.



(a) Explique por que a série

$$1{,}6 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 1.

(b) Explique por que a série

$$2{,}8 + 0{,}5(x-2) + 1{,}5(x-2)^2 - 0{,}1(x-2)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 2.

3. Se $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência.

4. Encontre a série de Maclaurin de f centrada em 4 se

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

Qual é o raio de convergência da série de Taylor?

5–12 Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin. [Suponha que f tenha expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$

6. $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

8. $f(x) = \cos 3x$

9. $f(x) = 2^x$

10. $f(x) = xe^x$

11. $f(x) = \operatorname{senh} x$

12. $f(x) = \cosh x$

13–20 Encontre a série de Taylor de $f(x)$ centrada no valor dado de a. [Suponha que f tenha expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$

14. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$

15. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$

16. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

17. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$

18. $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/2$

19. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$

20. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

---

21. Demonstre que a série obtida no Exercício 7 representa sen πx para todo x.

22. Demonstre que a série obtida no Exercício 18 representa sen x para todo x.

23. Demonstre que a série obtida no Exercício 11 representa senh x para todo x.

24. Demonstre que a série obtida no Exercício 12 representa cosh x para todo x.

25–28 Use a série binomial para expandir a função como uma série de potência. Diga o raio de convergência.

25. $\sqrt[4]{1 - x}$

26. $\sqrt[3]{8 + x}$

27. $\dfrac{1}{(2 + x)^3}$

28. $(1 - x)^{2/3}$

29–38 Use uma série de Maclaurin na Tabela 1 para obter a série de Maclaurin da função dada.

29. $f(x) = \text{sen}\, \pi x$

30. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$

32. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

34. $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2 + x}}$

37. $f(x) = \text{sen}^2 x$ $\quad \left[\textit{Dica:} \text{ Use } \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).\right]$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \text{sen}\, x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

39–42 Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Trace f e seus primeiros polinômios de Taylor na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$

40. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$

42. $f(x) = \text{tg}^{-1}(x^3)$

---

43. Use a série de Maclaurin para cos x para calcular cos 5° com precisão de cinco casas decimais.

44. Use a série de Maclaurin para e^x para calcular $1/\sqrt[10]{e}$ com precisão de cinco casas decimais.

45. (a) Use a série binomial para expandir $1/\sqrt{1 - x^2}$.

(b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin de sen^{-1}x.

46. (a) Expanda $1/\sqrt[4]{1 + x}$ como uma série de potências.

(b) Utilize a parte (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1{,}1}$ com precisão de três casas decimais.

47–50 Calcule a integral indefinida como uma série infinita.

47. $\displaystyle\int x \cos(x^3)\, dx$

48. $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\cos x - 1}{x}\, dx$

50. $\displaystyle\int \text{arctg}(x^2)\, dx$

51–54 Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

51. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^3 \,\text{arctg}\, x\, dx$ (quatro casas decimais)

52. $\displaystyle\int_0^1 \text{sen}(x^4)\, dx$ (quatro casas decimais)

53. $\displaystyle\int_0^{0{,}4} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ $\quad (|\text{erro}| < 5 \times 10^{-6})$

54. $\displaystyle\int_0^{0{,}5} x^2 e^{-x^2}\, dx$ $\quad (|\text{erro}| < 0{,}001)$

55–57 Use séries para calcular o limite.

55. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$

56. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

57. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

---

58. Use a série do Exemplo 13(b) para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x - x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4, no Volume I, usando a Regra de l'Hôspital três vezes. Qual método você prefere?

59–62 Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de cada função.

59. $y = e^{-x^2} \cos x$

60. $y = \sec x$

61. $y = \dfrac{x}{\text{sen}\, x}$

62. $y = e^x \ln(1 - x)$

63–70 Encontre a soma da série.

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

64. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n\, 5^n}$

66. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

67. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n + 1)!}$

68. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

69. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

70. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} + \dfrac{1}{5 \cdot 2^5} + \dfrac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots$

---

71. Mostre que se p é um polinomio de n-ésimo grau, então

$$p(x + 1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x)}{i!}$$

72. Se $f(x) = (1 + x^3)^{30}$, o que é $f^{(58)}(0)$?

73. Demonstre a Desigualdade de Taylor para $n = 2$, isto é, demonstre que, se $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

74. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é igual à sua série de Maclaurin.

(b) Trace a função na parte (a) e comente seu comportamento próximo da origem.

75. Use os seguintes passos para demonstrar $\boxed{17}$.

(a) Seja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta série para mostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1 + x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Seja $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$ e mostre que $h'(x) = 0$.

(c) Deduza que $g(x) = (1 + x)^k$.

76. No Exercício 53, na Seção 10.2, foi mostrado que o comprimento da elipse $x = a \text{ sen } \theta$, $y = b \cos \theta$, onde $a > b > 0$, é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \text{ sen}^2\theta}\, d\theta$$

onde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ é a excentricidade da elipse.

Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 50, na Seção 7.1, para expressar L como uma série de potências da excentricidade até os termos em e^6.

PROJETO DE LABORATÓRIO SCA UM LIMITE ELUSIVO

Este projeto envolve a função

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\text{tg } x) - \text{tg}(\text{sen } x)}{\text{arcsen}(\text{arctg } x) - \text{arctg}(\text{arcsen } x)}$$

1. Use o seu sistema de álgebra computacional para avaliar $f(x)$ para $x = 1$, 0,1, 0,01, 0,001 e 0,0001. Parece que f tem um limite quando $x \to 0$?

2. Use o SCA para traçar f próximo de $x = 0$. Parece que f tem um limite quando $x \to 0$?

3. Tente calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ pela Regra de l'Hôspital, usando seu SCA para encontrar as derivadas do numerador e do denominador. O que você descobriu? Quantas aplicações da Regra de l'Hôspital são necessárias?

4. Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ usando seu SCA para encontrar quantos termos foram necessários da série de Taylor do numerador e do denominador. (Use o comando `taylor` no Maple ou `Series` no Mathematica.)

5. Use o comando de limite em seu SCA para encontrar o $\lim_{x \to 0} f(x)$ diretamente (A maioria dos sistemas de computação algébrica usa o método do Problema 4 para calcular limites.)

6. Tendo em vista as respostas aos Problemas 4 e 5, como você explica os resultados dos Problemas 1 e 2?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

PROJETO ESCRITO COMO NEWTON DESCOBRIU A SÉRIE BINOMIAL

O Teorema Binomial, que dá a expansão de $(a + b)^k$, era conhecido pelos matemáticos chineses muitos séculos antes da época de Newton para o caso em que o expoente k é um inteiro positivo. Em 1665, quando tinha 22 anos, Newton foi o primeiro a descobrir a expansão em série infinita de $(a + b)^k$ quando k é um expoente fracionário (positivo ou negativo). Ele não publicou sua descoberta, mas enunciou-a e deu exemplos de como usá-la em uma carta (chamada hoje *epistola prior*) datada de 13 de junho de 1676, que ele enviou a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society of London, para transmiti-la a Leibniz. Quando Leibniz respondeu, ele perguntou como Newton tinha descoberto a série binomial. Newton escreveu uma segunda carta, a *epistola posterior*, em 24 de outubro de 1676, na qual explicou detalhadamente como chegou à sua descoberta por uma rota muito indireta. Ele estava investigando as áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Essas são fáceis de calcular se n for par. Ao observar padrões e interpolação, Newton foi capaz de adivinhar as respostas para valores ímpares de n. Então, ele percebeu que poderia obter as mesmas respostas expressando $(1 - x^2)^{n/2}$ como uma série infinita.

Escreva um relatório sobre a descoberta de Newton da série binomial. Comece dando um enunciado da série binomial na notação de Newton. Explique por que a versão de Newton é equivalente ao Teorema 17. Então leia a *epistola posterior* de Newton e explique os padrões que Newton descobriu nas áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Mostre como ele pôde conjecturar as áreas conjecturar as áreas sob as curvas restantes e como verificou suas respostas. Finalmente, explique como essas descobertas levaram à série binomial. Os livros de Edwards [1] e Katz [3] contêm comentários sobre as cartas de Newton.

1. Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 178–187.
2. Fauvel J.; Gray J. *The History of Mathematics*: *A Reader*. Londres: MacMillan Press, 1987.
3. Victor Katz. *A History of Mathematics*: *An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 463–466.
4. Struik, D. J. *A Sourcebook in Mathematics*, 1200–1800. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969.

11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor

Nesta seção exploraremos dois tipos de aplicações de polinômios de Taylor. Primeiro, veremos como eles são usados para aproximar funções — os cientistas de computação gostam deles porque os polinômios são as mais simples das funções. Depois, investigaremos como físicos e engenheiros utilizam esses polinômios em campos como relatividade, óptica, radiações de corpos negros, dipolos elétricos, velocidade das ondas de água, e na construção de rodovias no deserto.

Aproximando Funções por Polinômios

Suponha que $f(x)$ seja igual à soma de sua série de Taylor em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Na Seção 11.10 introduzimos a notação $T_n(x)$ para a n-ésima soma parcial dessa série, a que chamamos polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a. Assim,

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

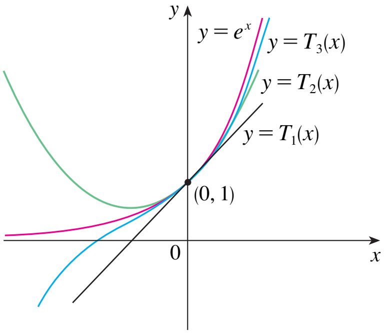


FIGURA 1

	$x = 0{,}2$	$x = 3{,}0$
$T_2(x)$	1,220000	8,500000
$T_4(x)$	1,221400	16,375000
$T_6(x)$	1,221403	19,412500
$T_8(x)$	1,221403	20,009152
$T_{10}(x)$	1,221403	20,079665
e^x	1,221403	20,085537

Como f é a soma de sua série de Taylor, sabemos que $T_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ e, assim, T_n pode ser usado como uma aproximação para f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que o polinômio de Taylor de primeiro grau

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

é o mesmo que a linearização de f até a que nós discutimos na Seção 3.10, no Volume I. Observe também que T_1 e seus derivados têm os mesmos valores em a que f e f' têm. Em geral, pode ser mostrado que as derivadas de T_n em a coincidem com as de f, incluindo até as derivadas de ordem n.

Para ilustrarmos essas ideias, vamos olhar novamente para os gráficos de $y = e^x$ e seus primeiros polinômios de Taylor, como mostrado na Figura 1. O gráfico de T_1 é a reta tangente a $y = e^x$ em (0, 1); essa reta tangente é a melhor aproximação linear para e^x próximo de (0, 1). O gráfico de T_2 é a parábola $y = 1 + x + x^2/2$, e o gráfico de T_3 é a curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que é uma aproximação melhor para a curva exponencial $y = e^x$ do que T_2. O próximo polinômio de Taylor T_4 seria uma aproximação ainda melhor, e assim por diante.

Os valores na tabela dão uma ilustração numérica da convergência dos polinômios de Taylor $T_n(x)$ para a função $y = e^x$. Vemos que, quando $x = 0{,}2$, a convergência é muito rápida, mas, quando $x = 3$, ela é um tanto mais lenta. De fato, quanto mais longe x está de 0, mais lentamente $T_n(x)$ converge para e^x.

Quando usamos um polinômio de Taylor T_n para aproximar uma função f, temos de fazer as seguintes pergunta: Quão boa é uma aproximação? Quão grande devemos deixar n para obter a precisão desejada? Para respondermos a tais questões, precisamos olhar os valores absolutos do resto:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Existem três métodos possíveis para estimar o tamanho do erro:

1. Se uma ferramenta gráfica estiver disponível, podemos usá-la para traçar $|R_n(x)|$ e assim estimar o erro.

2. Se a série for alternada, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.

3. Em todos os casos podemos usar a Desigualdade de Taylor (Teorema 11.10.9), que diz que, se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, então

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1}$$

EXEMPLO 1

(a) Aproxime a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em $a = 8$.
(b) Qual é a precisão dessa aproximação quando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} & f'(8) &= \tfrac{1}{12} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} & f''(8) &= -\tfrac{1}{144} \\ f'''(x) &= \tfrac{10}{27}x^{-8/3} \end{aligned}$$

Então, o polinômio Taylor de segundo grau é

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2 \end{aligned}$$

A aproximação desejada é

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) A série de Taylor não é alternada quando $x < 8$, assim, não podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas nesse exemplo. Mas podemos usar a Desigualdade de Taylor com $n = 2$ e $a = 8$

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x - 8|^3$$

onde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, temos $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ e, dessa forma,

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0{,}0021$$

Portanto, podemos tomar $M = 0{,}0021$. Além disso, $7 \leqslant x \leqslant 9$, assim, $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ e $|x - 8| \leqslant 1$. Então, a Desigualdade de Taylor dá

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0{,}0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0{,}0021}{6} < 0{,}0004$$

Logo, se $7 \leqslant x \leqslant 9$, a aproximação na parte (a) tem precisão de 0,0004.

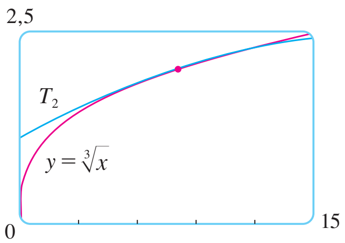


FIGURA 2

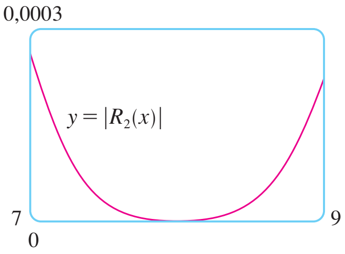


FIGURA 3

Vamos usar uma ferramenta gráfica para verificar os cálculos no Exemplo 1. A Figura 2 mostra que os gráficos de $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = T_2(x)$ estão muito próximos um do outro quando x está próximo de 8. A Figura 3 mostra o gráfico de $|R_2(x)|$ calculado a partir da expressão

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Vemos a partir do gráfico que

$$|R_2(x)| < 0{,}0003$$

quando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Então, a estimativa do erro a partir de métodos gráficos é ligeiramente melhor que a estimativa do erro a partir da Desigualdade de Taylor, nesse caso.

EXEMPLO 2

(a) Qual é o máximo erro possível ao usar a aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

quando $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$? Use essa aproximação para encontrar sen 12º com precisão de seis casas decimais.

(b) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?

SOLUÇÃO

(a) Observe que a série de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

é alternada para todos os valores de x diferentes de zero e os termos sucessivos são decrescentes, pois $|x| < 1$; dessa maneira, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. O erro na aproximação de sen x pelos três primeiros termos de sua série de Maclaurin é de no máximo

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5.040}$$

Se $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$, então $|x| \leqslant 0{,}3$; assim, o erro é menor que

$$\frac{(0{,}3)^7}{5.040} \approx 4{,}3 \times 10^{-8}$$

Para encontrarmos sen 12º, primeiro convertemos para radianos:

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$
$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0{,}20791169$$

TEC O *Module 11.10/11.11* mostra graficamente os restos em aproximações polinomiais de Taylor.

Então, com precisão de seis casas decimais, sen 12° ≈ 0,207912.

(b) O erro será menor que 0,00005 se

$$\frac{|x|^7}{5.040} < 0{,}00005$$

Resolvendo essa inequação para x, temos

$$|x|^7 < 0{,}252 \qquad \text{ou} \qquad |x| < (0{,}252)^{1/7} \approx 0{,}821$$

Assim a aproximação dada tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0{,}82$. ■

O que acontecerá se usarmos a Desigualdade de Taylor para resolver o Exemplo 2? Como $f^{(7)}(x) = -\cos x$, obtemos $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$, logo

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7$$

Assim obtemos as mesmas estimativas que usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.

E com métodos gráficos? A Figura 4 mostra o gráfico de

$$|R_6(x)| = |\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)|$$

e vemos a partir dele que $|R_6(x)| < 4{,}3 \times 10^{-8}$ quando $|x| \leqslant 0{,}3$. Esta é a mesma estimativa que obtivemos no Exemplo 2. Para a parte (b) queremos $|R_6(x)| < 0{,}00005$, assim traçamos $y = |R_6(x)|$ e $y = 0{,}00005$ na Figura 5. Colocando o cursor no ponto de interseção à direita, descobrimos que a desigualdade é satisfeita quando $|x| < 0{,}82$. De novo, esta é a mesma estimativa que obtivemos na solução do Exemplo 2.

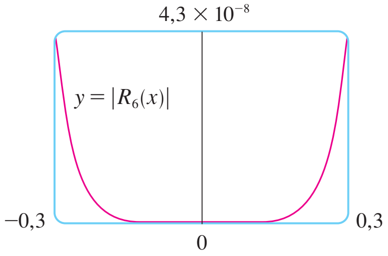


FIGURA 4

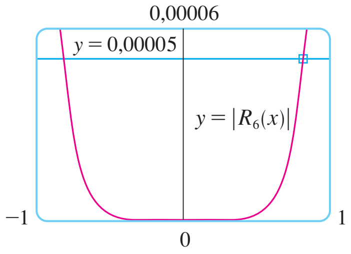


FIGURA 5

Se nos fosse pedido para aproximar sen 72° em vez de sen 12° no Exemplo 2, teria sido mais eficiente usar o polinômio de Taylor em $a = \pi/3$ (em vez de $a = 0$) porque ele é uma aproximação melhor para sen x para valores de x próximos de $\pi/3$. Observe que 72° está mais próximo de 60° (ou $\pi/3$ radianos) e as derivadas de sen x são fáceis de calcular em $\pi/3$.

A Figura 6 mostra os gráficos das aproximações por polinômios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

da curva seno. Você pode ver que, quando n aumenta, $T_n(x)$ é uma boa aproximação para sen x em um intervalo cada vez maior.

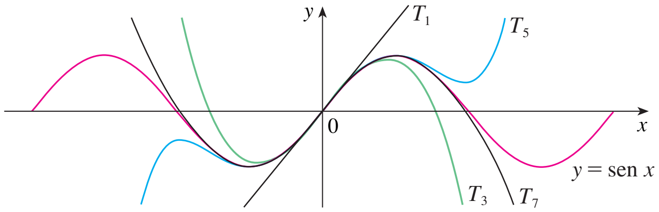


FIGURA 6

Um uso desse tipo de cálculo feito nos Exemplos 1 e 2 ocorre em calculadoras e computadores. Por exemplo, quando você pressiona as teclas sen ou e^x em sua calculadora, ou quando um programador de computador usa uma sub-rotina para uma função trigonométrica ou exponencial ou de Bessel, em muitas máquinas é calculada uma aproximação polinomial. O polinômio é com frequência um polinômio de Taylor que foi modificado de modo que o erro seja espalhado mais uniformemente por um intervalo.

Aplicações à Física

Os polinômios de Taylor são usados frequentemente na física. Para obter informações sobre uma equação, um físico muitas vezes simplifica uma função considerando apenas os primeiros dois ou três termos em sua série de Taylor. Em outras palavras, o físico usa um polinômio de Taylor como uma aproximação para a função. A Desigualdade de Taylor pode, então, ser usada para medir a precisão da aproximação. O exemplo a seguir mostra uma maneira na qual essa ideia é usada em relatividade especial.

EXEMPLO 3 Na teoria da relatividade especial de Einstein a massa de um objeto se movendo a uma velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A energia cinética do objeto é a diferença entre sua energia total e sua energia em repouso:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Mostre que, quando v for muito pequeno comparado a c, essa expressão para K coincide com a física clássica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a diferença entre essas expressões para K quando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUÇÃO
(a) Usando as expressões dadas para K e m, obtemos

$$\begin{aligned} K = mc^2 - m_0c^2 &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 \\ &= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] \end{aligned}$$

Com $x = -v^2/c^2$, a série de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ é calculada mais facilmente como uma série binomial com $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por isso, temos

$$\begin{aligned} (1 + x)^{-1/2} &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

A curva superior na Figura 7 é o gráfico da expressão para a energia cinética K de um objeto com velocidade v na relatividade especial. A curva inferior mostra a função usada para K na física newtoniana clássica. Quando v é muito menor que a velocidade da luz, as curvas são praticamente idênticas.

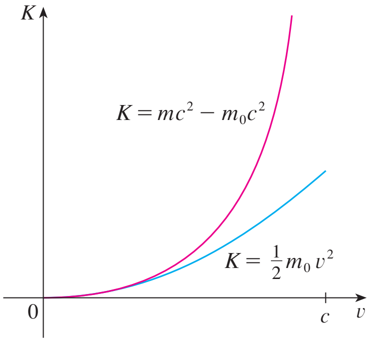


FIGURA 7

e

$$\begin{aligned} K &= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right] \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Se v for muito menor que c, todos os termos depois do primeiro são muito menores quando comparados com o primeiro termo. Se os omitirmos, obteremos

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Se $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$, e M for um número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, então podemos usar a Desigualdade de Taylor para escrever

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Temos $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ e nos foi dado que $|v| \leqslant 100$ m/s, portanto

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Logo, com $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4{,}17 \times 10^{-10})m_0$$

Assim, quando $|v| \leqslant 100$ m/s, o módulo do erro ao usar a expressão newtoniana para a energia cinética é no máximo $(4{,}2 \times 10^{-10})m_0$.

Outra aplicação à física ocorre em óptica. A Figura 8 é adaptada a partir de *Optics*, 4. ed., de Eugene Hecht (São Francisco, 2002). Ela mostra uma onda de uma fonte pontual S encontrando uma interface esférica de raio R centrada em C. O raio SA é refratado em direção a P.

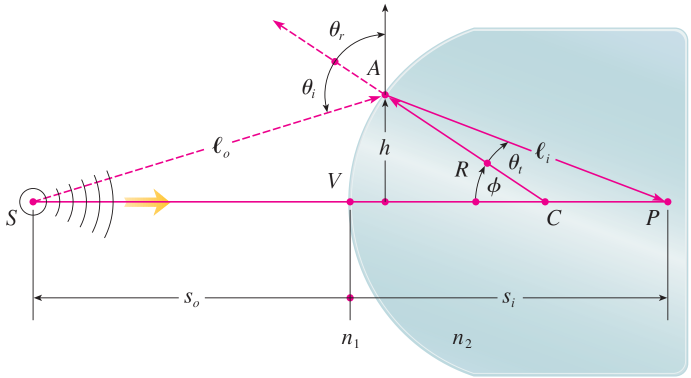


FIGURA 8

Refração em uma interface esférica

Hecht, Eugene, *Optics*, 4. ed., © 2002. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ

Usando o princípio de Fermat de que a luz viaja de modo a minimizar o tempo de percurso, Hecht deduz a equação

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right) \tag{1}$$

onde n_1 e n_2 são índices de refração e ℓ_o, ℓ_i, s_o e s_i são as distâncias indicadas na Figura 8. Pela Lei dos Cossenos, aplicada aos triângulos *ACS* e *ACP*, temos

Aqui usamos a identidade

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

$$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi} \tag{2}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Como a Equação 1 é difícil para se trabalhar, Gauss, em 1841, a simplificou usando a aproximação linear $\cos\phi \approx 1$ para valores pequenos de ϕ. (Isso equivale a usar os polinômios de Taylor de grau 1.) Então, a Equação 1 se torna a equação mais simples a seguir [como lhe será solicitado demonstrar no Exercício 34(a)]:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{3}$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica gaussiana*, ou *óptica de primeira ordem*, e tornou-se a ferramenta teórica básica usada no projeto de lentes.

Uma teoria mais precisa é obtida aproximando $\cos\phi$ por seu polinômio de Taylor de grau 3 (que é o mesmo que o polinômio de Taylor de grau 2). Ela leva em consideração raios para os quais ϕ não é tão pequeno, isto é, raios que atingem a superfície a distâncias h maiores acima do eixo. No Exercício 34(b) lhe será pedido para que use essa aproximação para deduzir a equação mais precisa

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right] \tag{4}$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica de terceira ordem*.

Outras aplicações dos polinômios de Taylor à física são exploradas nos Exercícios 32, 33, 35, 36, 37 e 38, e no Projeto Aplicado *Radiação Proveniente das Estrelas*, neste capítulo.

11.11 Exercícios

1. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 6 de $f(x) = \cos x$ centrados em $a = 0$. Trace f e esses polinômios na mesma tela.
(b) Calcule f e esses polinômios em $x = \pi/4$, $\pi/2$ e π.
(c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

2. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 3 de $f(x) = 1/x$ centrados em $a = 1$. Trace f e esses polinômios na mesma tela.
(b) Calcule f e esses polinômios em $x = 0{,}9$ e $1{,}3$.
(c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

3–10 Encontre o polinômio de Taylor $T_3(x)$ da função f centradas no número a. Faça o gráfico de f e T_3 na mesma tela.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$

4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$

5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

6. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad a = 0$

7. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

8. $f(x) = x \cos x, \quad a = 0$

9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$

10. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x, \quad a = 1$

SCA **11–12** Use um sistema de álgebra computacional para encontrar os polinômios de Taylor T_n centrados em a para $n = 2, 3, 4, 5$. Então trace os gráfico estes polinômios e f na mesma tela.

11. $f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}, \quad a = 0$

13–22

(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com grau n no número a.

(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.

(c) Verifique seu resultado na parte (b) traçando $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4{,}2$

14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0{,}9 \leqslant x \leqslant 1{,}1$

15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}8 \leqslant x \leqslant 1{,}2$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}2$

18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$

21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

23. Use a informação do Exercício 5 para estimar cos 80º com precisão de cinco casas decimais.

24. Use a informação do Exercício 16 para estimar sen 38º com precisão de cinco casas decimais.

25. Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin de e^x que devem ser usados para estimar $e^{0,1}$ com precisão de 0,00001.

26. Quantos termos da série de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ você precisa usar para estimar ln 1,4 com precisão de 0,001?

27–29 Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de x para os quais a aproximação dada tem precisão dentro do erro estabelecido. Verifique sua resposta graficamente.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{erro}| < 0{,}01)$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{erro}| < 0{,}005)$

29. $\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{erro}| < 0{,}05)$

30. Suponha que você saiba que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n + 1)}$$

e que a série de Taylor de f centrada em 4 converge para $f(x)$ para todo x no intervalo de convergência. Mostre que o polinômio de Taylor de grau 5 aproxima $f(5)$ com erro menor que 0,0002.

31. Um carro está se movendo com velocidade de 20 m/s e aceleração de 2 m/s² em um dado instante. Usando um polinômio de Taylor de grau 2, estime a distância que o carro percorre no próximo segundo. Seria razoável utilizar esse polinômio para estimar a distância percorrida durante o próximo minuto?

32. A resistividade ρ de um fio condutor é o recíproco da condutividade e é medida em unidades de ohm-metros (Ω-m). A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

onde t é a temperatura em ºC. Existem tabelas que listam os valores de α (o coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade a 20 ºC) para vários metais. Exceto a temperaturas muito baixas, a resistividade varia quase linearmente com a temperatura, e assim é comum aproximar a expressão para $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de grau 1 ou 2 em $t = 20$.

(a) Encontre expressões para estas aproximações linear e quadrática.

(b) Para o cobre, a tabela fornece $\alpha = 0{,}0039/°\text{C}$ e $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Trace a resistividade do cobre e as aproximações linear e quadrática para $-250°\text{C} \leqslant t \leqslant 1000°\text{C}$.

(c) Para quais valores de t a aproximação linear coincide com a expressão exponencial com precisão de 1%?

33. Um dipolo elétrico consiste em duas cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. Se as cargas forem q e $-q$ e estiverem localizadas a uma distância d, então o campo elétrico E no ponto P na figura é

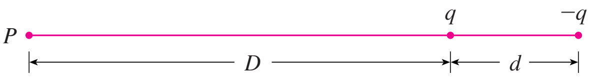
$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Expandindo essa expressão para E como uma série de potências de d/D, mostre que E é aproximadamente proporcional a $1/D^3$ quando P está muito distante do dipolo.



34. (a) Deduza a Equação 3 para a óptica gaussiana a partir da Equação 1 aproximando $\cos\phi$ na Equação 2 por seu polinômio de Taylor de grau 1.

(b) Mostre que se $\cos\phi$ for substituído por seu polinômio de Taylor de terceiro grau na Equação 2, então a Equação 1 se torna Equação 4 para terceira ordem óptica. [*Dica*: Use os dois primeiros termos da série binomial para ℓ_o^{-1} e ℓ_i^{-1}. Use, também, $\phi \approx \operatorname{sen}\phi$.]

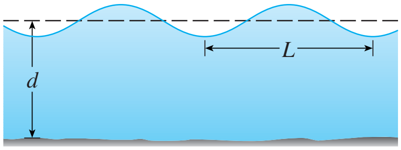
35. Se uma onda de água com comprimento L se mover com velocidade v ao longo de um corpo de água com profundidade d, como na figura, então

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\operatorname{tgh}\frac{2\pi d}{L}$$

(a) Se a água for profunda, mostre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

(b) Se a água for rasa, use a série de Maclaurin para tgh para mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Então, em água rasa a velocidade de uma onda tende a ser independente do comprimento da onda.)

(c) Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para mostrar que, se $L > 10d$, então a estimativa $v^2 \approx gd$ tem precisão de $0{,}014gL$.

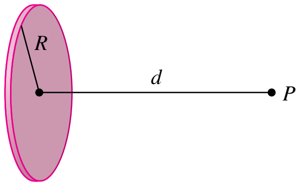


36. Um disco uniformemente carregado tem raio R e densidade de carga superficial σ como na figura. O potencial eléctrico V no ponto P a uma distância d ao longo do eixo perpendicular central do disco é

$$V = 2\pi k_e\sigma(\sqrt{d^2 + R^2} - d)$$

onde k_e é uma constante (chamada constante de Coulomb). Mostre que

$$V \approx \frac{\pi k_e R^2\sigma}{d} \quad \text{para } d \text{ grande}$$



37. Se um topógrafo mede as diferenças nas elevações dos terrenos em um deserto, com a finalidade de construir uma rodovia, ele tem de fazer correções por causa da curvatura da Terra.

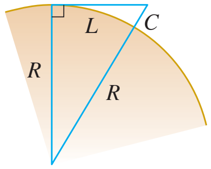
(a) Se R é o raio da Terra e L é o comprimento da rodovia, mostre que a correção a ser feita será

$$C = R\sec(L/R) - R$$

(b) Use um polinômio de Taylor para mostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare as correções dadas pelas fórmulas em (a) e (b) para uma rodovia que tenha 100 km de percurso. (Tome o raio da Terra como 6.370 km.)



38. O período de um pêndulo com comprimento L que faz um ângulo máximo θ_0 com a vertical é

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2 x}}$$

onde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ e g é a aceleração da gravidade. (No Exercício 42 da Seção 7.7, no Volume I, essa integral foi aproximada pela regra de Simpson.)

(a) Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 50 da Seção 7.1, no Volume I, para mostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Se θ_0 não for muito grande, a aproximação $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtida ao se usar o primeiro termo da série, é frequentemente utilizada. Uma aproximação melhor seria obtida pelos dois primeiros termos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos os termos da série, com exceção do primeiro, têm coeficientes que são, no máximo, $\frac{1}{4}$. Use esse fato para comparar esta série com a série geométrica e mostre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use as desigualdades em (b) para estimar o período de um pêndulo com $L = 1$ metro e $\theta_0 = 10°$. Como isso se compara com a estimativa $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? E se $\theta_0 = 42°$?

39. Na Seção 4.8 no Volume I, consideramos o método de Newton para aproximar uma raiz r da equação $f(x) = 0$, e a partir de uma aproximação inicial x_1 obtivemos aproximações sucessivas $x_2, x_3, \ldots$, onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Use a desigualdade de Taylor com $n = 1$, $a = x_n$ e $x = r$ para mostrar que, se $f''(x)$ existir em um intervalo I contendo r, x_n e x_{n+1}, e $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para todo $x \in I$, então

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Isso significa que, se x_n tem precisão de d casas decimais, então x_{n+1} terá precisão de cerca de $2d$ casas decimais. Mais precisamente, se o erro no estágio n for no máximo 10^{-m}, então o erro na etapa $n + 1$ será no máximo $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROJETO APLICADO

RADIAÇÃO PROVENIENTE DAS ESTRELAS

Luke Dodd/Photo Researchers, Inc.

Qualquer objeto emite radiação quando aquecido. Um *corpo negro* é um sistema que absorve toda a radiação que incide nele. Por exemplo, uma superfície preta não brilhante ou uma grande cavidade com um pequeno furo em sua parede (como uma fornalha siderúrgica) é um corpo negro e emite radiação de corpo negro. Até a radiação do Sol está próxima de ser a radiação de um corpo negro.

Proposta no fim do século XIX, a Lei de Rayleigh-Jeans expressa a densidade de energia da radiação do corpo negro de comprimento de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em kelvins (K) e k é a constante de Boltzmann. A Lei de Rayleigh-Jeans coincide com as medidas experimentais para comprimentos de onda longos, mas diverge drasticamente para comprimentos de onda curtos. [A lei prediz que $f(\lambda) \to \infty$ quando $\lambda \to 0^+$, mas experiências mostraram que $f(\lambda) \to 0$.] Este fato é conhecido como a *catástrofe ultravioleta*.

Em 1900, Max Planck encontrou um modelo melhor (conhecido agora como a Lei de Planck) para a radiação do corpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura (em kelvins) e

h = constante de Planck's $= 6{,}6262 \times 10^{-34}$ J·s

c = velocidade da luz $= 2{,}997925 \times 10^{8}$ m/s

k = constante de Boltzmann's $= 1{,}3807 \times 10^{-23}$ J/K

1. Use a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para a Lei de Planck. Assim, essa lei pode modelar melhor a radiação do corpo negro que a Lei de Rayleigh-Jeans para comprimentos de onda mais curtos.

2. Use um polinômio de Taylor para mostrar que, para comprimentos de onda longos, a Lei de Planck fornece aproximadamente os mesmos valores que a Lei de Rayleigh-Jeans.

▦ **3.** Trace f dada por ambas as leis na mesma tela e comente as similaridades e diferenças. Use $T = 5.700$ K (a temperatura do Sol). (Você pode querer mudar de metros para unidade mais conveniente de micrômetros: 1 μm $= 10^{-6}$ m.)

4. Use seu gráfico no Problema 3 para estimar o valor de λ para o qual $f(\lambda)$ é um máximo na Lei de Planck.

▦ **5.** Investigue como o gráfico de f muda quando T varia. (Use a Lei de Planck.) Em particular, trace f para as estrelas Betelgeuse (T = 3 400 K), Procyon (T = 6 400) e Sirius (T = 9 200 K), e também o Sol. Como a radiação total emitida (a área sob a curva) varia com T? Use o gráfico para comentar por que Sirius é conhecida como uma estrela azul e Betelgeuse, como uma estrela vermelha.

▦ É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

11 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma sequência convergente?
   (b) O que é uma série convergente?
   (c) O que significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
   (d) O que significa $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?
2. (a) O que é uma sequência limitada?
   (b) O que é uma sequência monótona?
   (c) O que você pode dizer sobre uma sequência monótona limitada?
3. (a) O que é uma série geométrica? Sob quais circunstâncias ela é convergente? Qual é sua soma?
   (b) O que é uma série p? Sob quais circunstâncias ela é convergente?
4. Suponha que $\Sigma\, a_n = 3$ e s_n seja a n-ésima soma parcial da série. O que é $\lim_{n\to\infty} a_n$? O que é $\lim_{n\to\infty} s_n$?
5. Enuncie o seguinte:
   (a) O Teste para Divergência.
   (b) O Teste da Integral.
   (c) O Teste da Comparação.
   (d) O Teste da Comparação no Limite.
   (e) O Teste da Série Alternada.
   (f) O Teste da Razão.
   (g) O Teste da Raiz.
6. (a) O que é uma série absolutamente convergente?
   (b) O que você pode dizer sobre estas séries?
   (c) O que é uma série condicionalmente convergente?
7. (a) Se uma série for convergente pelo Teste da Integral, como você estima sua soma?
   (b) Se uma série for convergente pelo Teste da Comparação, como você estima sua soma?
   (c) Se uma série for convergente pelo Teste da Série Alternada, como você estima sua soma?
8. (a) Escreva a forma geral de uma série de potências.
   (b) O que é o raio de convergência de uma série de potências?
   (c) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências?
9. Suponha que $f(x)$ seja a soma de uma série de potências com raio de convergência R.
   (a) Como você deriva f? Qual é o raio de convergência da série para f'?
   (b) Como você integra f? Qual é o raio de convergência da série para $\int f(x)\,dx$?
10. (a) Escreva uma expressão para a série de Taylor de n-ésimo grau de f centrada em a.
    (b) Escreva uma expressão para a série de Taylor de f centrada em a.
    (c) Escreva uma expressão para a série de Maclaurin de f.
    (d) Como você mostra que $f(x)$ é igual à soma de sua série de Taylor?
    (e) Enuncie a Desigualdade de Taylor.
11. Escreva a série de Maclaurin e o intervalo de convergência para cada uma das seguintes funções:
    (a) $1/(1-x)$ (b) e^x (c) $\operatorname{sen} x$
    (d) $\cos x$ (e) $\operatorname{tg}^{-1} x$ (f) $\ln(1+x)$
12. Escreva a expansão da série binomial de $(1+x)^k$. Qual é o raio de convergência desta série?

Quiz Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\Sigma\, a_n$ é convergente.
2. A série $\Sigma_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ é convergente.
3. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.
4. Se $\Sigma\, c_n 6^n$ for convergente, então $\Sigma\, c_n(-2)^n$ é convergente.
5. Se $\Sigma\, c_n 6^n$ for convergente, então $\Sigma\, c_n(-6)^n$ é convergente.
6. Se $\Sigma\, c_n x^n$ diverge quando $x = 6$, então ela diverge quando $x = 10$.
7. O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\Sigma\, 1/n^3$ converge.
8. O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\Sigma\, 1/n!$ converge.
9. Se $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ e $\Sigma\, b_n$ divergir, então $\Sigma\, a_n$ diverge.
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
11. Se $-1 < \alpha < 1$, então $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.
12. Se $\Sigma\, a_n$ é divergente, então $\Sigma\, |a_n|$ é divergente.
13. Se $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge para todo x, então $f'''(0) = 2$.
14. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas divergentes, então $\{a_n + b_n\}$ é divergente.
15. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas divergentes, então $\{a_n b_n\}$ é divergente.
16. Se $\{a_n\}$ é decrescente e $a_n > 0$ para todo n, então $\{a_n\}$ será convergente.
17. Se $a_n > 0$ e $\Sigma\, a_n$ converge, então $\Sigma\, (-1)^n a_n$ também converge.
18. Se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
19. $0{,}99999\ldots = 1$
20. Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_{n+3} - a_n) = 0$.
21. Se um número finito de termos forem adicionados a uma série convergente, a nova série também é convergente.
22. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

Exercícios

1–8 Determine se a sequência é convergente ou divergente. Se ela for convergente, encontre seu limite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$

2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$

3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$

5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Uma sequência é definida recursivamente pelas equações $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Mostre que $\{a_n\}$ é crescente e $a_n < 2$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

10. Mostre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ e use um gráfico para encontrar o menor valor de N que corresponde a $\varepsilon = 0{,}1$ na definição de limite.

11–22 Determine se a série é convergente ou divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1{,}2)^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{n}$

23–26 Determine se a série é condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27–31 Encontre a soma da série.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{tg}^{-1}(n + 1) - \operatorname{tg}^{-1} n]$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Expresse a dízima periódica 4,17326326326... como uma fração.

33. Mostre que $\cosh x \geqslant 1 + \frac{1}{2}x^2$ para todo x.

34. Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ converge?

35. Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ com precisão de quatro casas decimais.

36. (a) Encontre a soma parcial s_5 da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ e estime o erro ao usá-la como uma aproximação para a soma da série.

(b) Encontre a soma da série com precisão de cinco casas decimais.

37. Use a soma dos oito primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

38. (a) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ é convergente.

(b) Deduza que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

39. Demonstre que, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for absolutamente convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 1}{n}\right) a_n$$

é absolutamente convergente também.

40–43 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{n\, 4^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x - 2)^n}{(n + 2)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - 3)^n}{\sqrt{n + 3}}$

44. Encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Encontre a série de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \pi/6$.

46. Encontre a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ em $a = \pi/3$.

47–54 Encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência. Você pode usar o método direto (a definição de série de Maclaurin) ou séries conhecidas, como a série geométrica, a série binomial ou a série de Maclaurin de e^x, sen x, $\operatorname{tg}^{-1} x$ e $\ln(1 + x)$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

48. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(4 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

55. Calcule $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ como uma série infinita.

56. Use séries para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$ com precisão de duas casas decimais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

57–58

(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com n-ésimo grau no número a.

(b) Trace f e T_n na mesma tela.

(c) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.

(d) Verifique seu resultado na parte (c) traçando $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}9 \leqslant x \leqslant 1{,}1$

58. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

---

59. Use séries para calcular o limite a seguir.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. A força da gravidade em um objeto de massa m a uma altura h acima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(R + h)^2}$$

onde R é o raio da Terra e g é a aceleração da gravidade para um objeto sobre a superfície da terra.

(a) Expresse F como uma série de potências em h/R.

(b) Observe que se nós aproximamos F pelo primeiro termo da série, temos a expressão $F \approx mg$, que é normalmente utilizada quando h é muito menor que R. Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de h para os quais a aproximação $F \approx mg$ tem precisão dentro de um por cento. (Use $R = 6.400$ km.)

61. Suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para todo x.

(a) Se f é uma função ímpar, mostre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Se f for uma função par, mostre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Se $f(x) = e^{x^2}$, mostre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Problemas Quentes

Antes de olhar a solução do exemplo, cubra-a e tente resolvê-lo você mesmo.

EXEMPLO 1 Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$.

SOLUÇÃO O princípio de resolução de problemas que é relevante aqui é *reconhecer algo familiar*. As séries dadas se parecem em alguma coisa com uma série que já conhecemos? Bem, ela tem alguns ingredientes em comum com a série de Maclaurin para a função exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Podemos fazer esta série parecer mais com a nossa série dada pela substituição de x por $x + 2$:

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$$

Mas aqui o expoente no numerador corresponde ao número no denominador cujo fatorial é tirado. Para que isso aconteça na série dada, vamos multiplicar e dividir por $(x + 2)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = \frac{1}{(x+2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$= (x+2)^{-3}\left[\frac{(x+2)^3}{3!} + \frac{(x+2)^4}{4!} + \cdots\right]$$

Vemos que a série entre parênteses é apenas a série para e^{x+2} com os três primeiros termos faltando. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = (x+2)^{-3}\left[e^{x+2} - 1 - (x+2) - \frac{(x+2)^2}{2!}\right]$$ ▬

Problemas

1. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encontre $f^{(15)}(0)$.

2. Uma função f é definida por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

Onde f é contínua?

3. (a) Mostre que $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}x - 2 \operatorname{cotg} x$.

(b) Encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

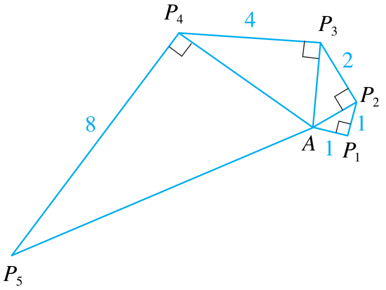


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

4. Seja $\{P_n\}$ uma sequência de pontos determinados como na figura. Então $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$, e o ângulo AP_nP_{n+1} é um ângulo reto. Encontre $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.

5. Para construir a **curva floco de neve**, comece com um triângulo equilátero com lados 1 de comprimento. A Etapa 1 na construção é dividir cada lado em três partes iguais, construir um triângulo equilátero na parte do meio e então apagar a parte do meio (veja a figura). A Etapa 2 consiste em repetir a Etapa 1 para cada lado do polígono resultante. Esse processo é repetido a cada etapa seguinte. A curva floco de neve é aquela que resulta da repetição desse processo indefinidamente.

(a) Sejam s_n, l_n e p_n as representações do número de lados, do comprimento de um lado e do comprimento total da n-ésima curva de aproximação (a curva obtida depois da Etapa n de construção), respectivamente. Encontre fórmulas para s_n, l_n e p_n.

(b) Mostre que $p_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

(c) Some uma série infinita para encontrar a área dentro da curva floco de neve.

Observação: As partes (b) e (c) mostram que a curva floco de neve é infinitamente longa, mas delimita apenas uma área finita.

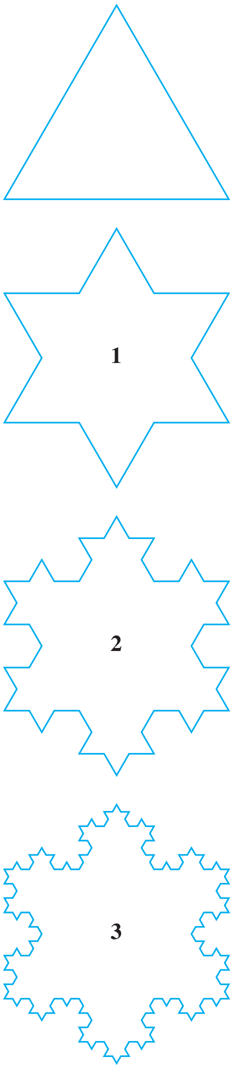


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

6. Encontre a soma da série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

onde os termos são os recíprocos dos inteiros positivos cujos únicos fatores primos são 2 e 3.

7. (a) Mostre que, para $xy \neq -1$,

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$$

se o lado esquerdo estiver entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

(b) Mostre que $\operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \pi/4$.

(c) Deduza a seguinte fórmula de John Machin (1680–1751):

$$4 \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} - \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Use a série de Maclaurin para arctg para mostrar que

$$0{,}1973955597 < \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5} < 0{,}1973955616$$

(e) Mostre que

$$0{,}004184075 < \operatorname{arctg} \tfrac{1}{239} < 0{,}004184077$$

(f) Deduza que, com precisão de sete casas decimais, $\pi \approx 3{,}1415927$.

Machin usou esse método em 1706 para encontrar π com precisão de 100 casas decimais. Recentemente, com a ajuda de computadores, o valor de π tem sido calculado com uma precisão cada vez maior. Em 2009, T. Daisuke e sua equipe calcularam o valor de π para mais de dois trilhões de casas decimais!

8. (a) Demonstre uma fórmula similar àquela no Problema 7(a), mas envolvendo arccotg em vez de arctg.

(b) Encontre a soma da série $\Sigma_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccotg}(n^2 + n + 1)$.

9. Encontre o intervalo de convergência de $\Sigma_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ e sua soma.

10. Se $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$$

Se você não vê como demonstrar isso, tente a estratégia de resolução de problemas com *uso de analogias* (Capítulo 1 – Volume I). Tente os casos especiais $k = 1$ e $k = 2$ primeiro. Se você vir como demonstrar a asserção para esses casos, provavelmente verá como demonstrá--la no caso geral.

11. Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

12. Suponha que você tenha um grande suprimento de livros, todos do mesmo tamanho, e os empilhe na borda de uma mesa, com cada livro se estendendo mais longe da borda da mesa do que o livro embaixo dele. Mostre que é possível fazer isso de maneira que o livro no topo da pilha fique inteiramente além da mesa. De fato, mostre que o livro do topo pode se estender a qualquer distância além da borda da mesa se a pilha for alta o suficiente. Utilize o seguinte método de empilhamento: o livro do topo se estende por metade de seu comprimento além do segundo livro. O segundo livro se estende por um quarto de seu comprimento além do terceiro. O terceiro se estende por um sexto de seu comprimento além do quarto, e assim por diante. (Tente você mesmo com um baralho.) Considere centros de massa.

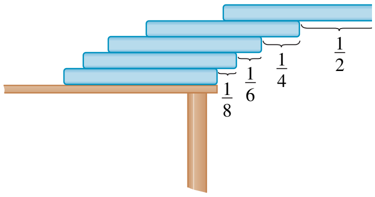


FIGURA PARA O PROBLEMA 12

13. Se a curva $y = e^{-x/10}$ sen x, $x \geqslant 0$, for girada em torno do eixo x, o sólido resultante se parece com uma sequência infinita de bolinhas decrescentes.

(a) Encontre o volume exato da n-ésima bolinha. (Use uma tabela de integrais ou um sistema de computação algébrica.)

(b) Encontre o volume total das bolinhas.

14. Se $p > 1$, calcule a expressão.

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

15. Suponha que círculos de diâmetros iguais sejam agrupados o mais junto possível em n fileiras dentro de um triângulo equilátero. (A figura ilustra o caso $n = 4$.) Se A for a área do triângulo e A_n for a área total ocupada pelas n fileiras de círculos, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

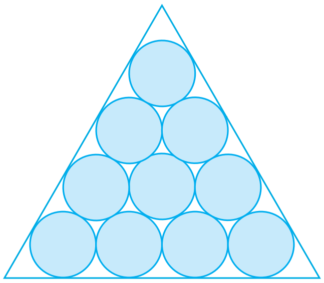


FIGURA PARA O PROBLEMA 15

16. Uma sequência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pelas equações

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Encontre a soma da série $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Tomando o valor de x^x em 0 igual a 1 e integrando uma série termo a termo, mostre que

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

18. Começando com os vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de um quadrado, construímos pontos adicionais conforme mostrado na figura: P_5 é o ponto médio de P_1P_2, P_6 é o ponto médio de P_2P_3, P_7 é o ponto médio de P_3P_4, e assim por diante. O caminho espiral poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ tende a um ponto P dentro do quadrado.

(a) Se as coordenadas de P_n forem (x_n, y_n), mostre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ e encontre uma equação similar para as coordenadas y.

(b) Encontre as coordenadas de P.

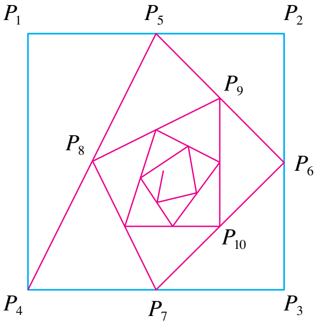


FIGURA PARA O PROBLEMA 18

19. Encontre a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

20. Efetue as seguintes etapas para mostrar que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \cdots = \ln 2$$

(a) Use a fórmula para a soma de uma série geométrica finita (11.2.3) para obter uma expressão para

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}$$

(b) Integre o resultado da parte (a) de 0 a 1 para obter uma expressão para

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

como uma integral.

(c) Deduza a partir da parte (b), que

$$\left| \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right| < \int_0^1 x^{2n}\, dx$$

(d) Use a parte (c) para mostrar que a soma da série dada é ln 2.

21. Encontre todas as soluções da equação

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$$

Dica: Considere os casos $x \geqslant 0$ e $x < 0$ separadamente.

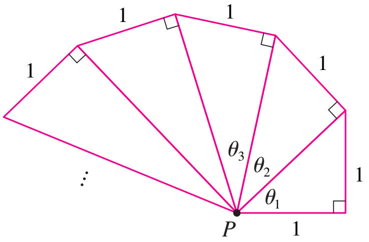


FIGURA PARA O PROBLEMA 22

22. Triângulos retângulos são construídos conforme a figura. Cada triângulo tem altura igual a 1 e sua base é a hipotenusa do triângulo anterior. Mostre que essa sequência faz um número ilimitado de voltas ao redor de *P*, demonstrando que $\Sigma\, \theta_n$ é uma série divergente.

23. Considere a série cujos termos são os recíprocos de inteiros positivos que podem ser escritos na base 10 sem usar o dígito 0. Mostre que essa série é convergente e a soma é menor que 90.

24. (a) Mostre que a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{é} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

onde f_n é o *n*-ésimo número de Fibonacci, isto é, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Dica*: Escreva $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ e multiplique ambos os lados desta equação por $1 - x - x^2$.]

(b) Ao escrever $f(x)$ como uma soma de frações parciais, portanto, obtendo a série de Maclaurin de uma maneira diferente, encontre uma fórmula explícita para o *n*-ésimo número de Fibonacci.

25. Considere

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Mostre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

26. Demonstre que se $n > 1$, a *n*-ésima soma parcial da série harmônica não é um inteiro. *Dica*: Seja 2^k a maior potência de 2 que é menor ou igual a *n* e seja *M* o produto de todos os inteiros ímpares que são menores ou iguais a *n*. Suponha que $s_n = m$, um inteiro. Então, $M2^k s_n = M2^k m$. O lado direito dessa equação é par. Demonstre que o lado esquerdo é ímpar, mostrando que cada um de seus termos é um inteiro par, com exceção do último.

12

Vetores e a Geometria do Espaço

Mark C. Burnett/Photo Researchers, Inc

David Frazler/Corbis

Exemplos de superfícies e sólidos que estudamos neste capítulo são paraboloides (usados para antenas parabólicas) e hiperboloides (usados para torres de resfriamento de reatores nucleares).

Neste capítulo apresentamos vetores e sistemas de coordenadas para um espaço tridimensional. Esta será a definição para o nosso estudo do cálculo de funções de duas variáveis no Capítulo 14 porque o gráfico de tal função é uma superfície no espaço. Neste capítulo, veremos que vetores fornecem uma descrição particularmente simples descrições de retas e planos no espaço.

12.1 Sistemas de Coordenadas Tridimensionais

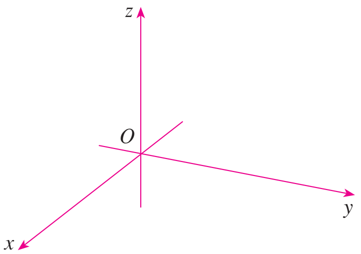


FIGURA 1
Eixos coordenados

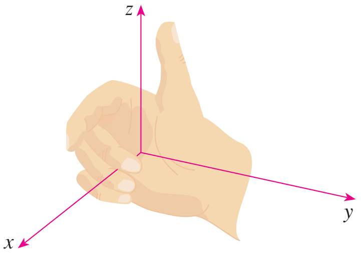


FIGURA 2
Regra da mão direita

Para localizar um ponto no plano são necessários dois números. Sabemos que qualquer ponto no plano pode ser representado como um par ordenado (a, b) de números reais, onde a é a coordenada x e b é a coordenada y. Por essa razão, um plano é chamado bidimensional. Para localizar um ponto no espaço, necessitamos de três números. Representaremos qualquer ponto no espaço pela tripla ordenada (a, b, c) de números reais.

Para representarmos os pontos no espaço, primeiro escolhemos um ponto fixo O (a origem) e três retas orientadas O que sejam perpendiculares entre si, denominadas **eixos coordenados** e denotados eixo x, eixo y e eixo z. Geralmente, colocamos os eixos x e y, denotados por como retas horizontais e a reta vertical como o eixo z, e indicamos a orientação dos eixos com setas, como mostrado na Figura 1. O sentido do eixo z é determinado pela **regra da mão direita**, como ilustrado na Figura 2. Se você arredondar os dedos de sua mão direita ao redor do eixo z de forma a rodar 90º no sentido anti-horário do eixo x positivo para o eixo y positivo, o polegar apontará para o sentido positivo do eixo z.

Os três eixos coordenados determinam três **planos coordenados** ilustrados na Figura 3(a). O plano xy é o plano que contém os eixos x e y; o plano yz contém os eixos y e z; o plano xz contém os eixos x e z. Estes três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, chamadas **octantes**. O **primeiro octante** é determinado pelos eixos positivos.

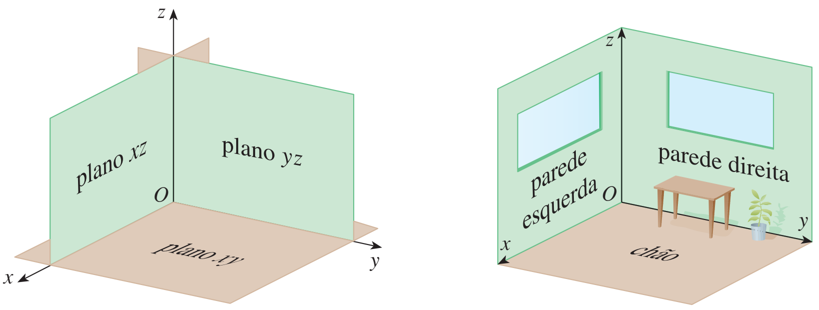


FIGURA 3

(a) Planos coordenados

(b)

Como muitas pessoas têm dificuldade em visualizar diagramas de figuras em três dimensões, pode ser útil fazer o que sugerimos a seguir [veja a Figura 3(b)]. Olhe para algum canto inferior de um cômodo e defina-o como origem. A parede que se encontra à sua esquerda está no plano xz, a parede à sua direita está no plano yz e o chão está no plano xy. O eixo x está ao longo da intersecção do chão com a parede esquerda. O eixo y fica ao longo da intersecção do chão com a parede direita. O eixo z fica ao longo da intersecção das duas paredes, orientado no sentido do teto. Se você está no primeiro octante e imagina outras sete salas situadas nos outros sete octantes (três no mesmo andar e quatro no andar abaixo), todas têm o canto O em comum.

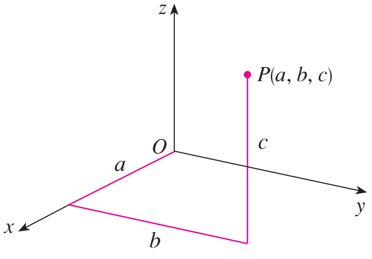


FIGURA 4

Se P é qualquer ponto no espaço, seja a a distância (orientada) a partir do plano yz ao ponto P; seja b, a distância a partir do plano xz até o ponto P, e seja c, a distância do plano xy ao ponto P. Representamos o ponto de P pela tripla ordenada (a, b, c) de números reais e chamamos a, b e c de **coordenadas** de P; a é a coordenada x, b é a coordenada y e c é a coordenada z. Assim, para localizarmos o ponto (a, b, c), começamos da origem O e movemos a unidades ao longo do eixo x; em seguida, b unidades paralelamente ao eixo y *e*, por fim, c unidades paralelamente ao eixo z, como na Figura 4.

O ponto $P(a, b, c)$ determina uma caixa retangular como mostrada na Figura 5. Se traçarmos uma perpendicular de P ao plano xy, encontraremos um ponto Q com coordenadas $(a, b, 0)$, denominado **projeção** de P no plano xy. Analogamente, $R(0, b, c)$ e $S(a,0, c)$ são as projeções de P nos planos yz e xz, respectivamente.

Como ilustrações numéricas, os pontos $(-4, 3, -5)$ e $(3, -2, -6)$ estão estão mostrados na Figura 6.

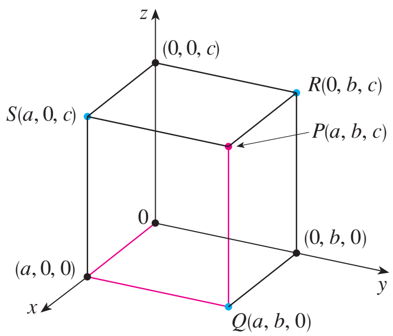


FIGURA 5

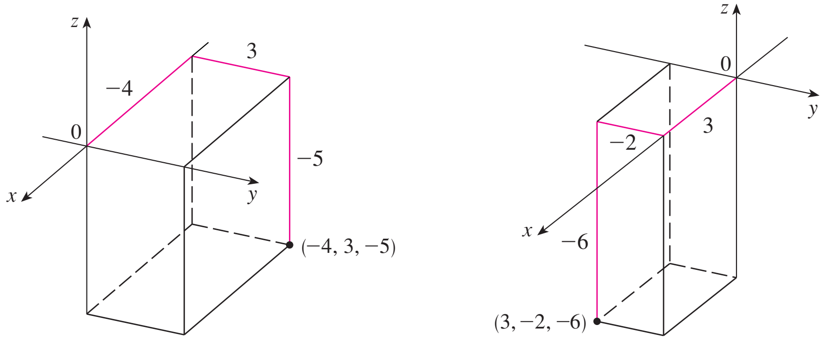


FIGURA 6

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais e é denotado por $\mathbb{R}^3$. Demos uma correspondência biunívoca entre os pontos P no espaço e triplas ordenadas (a, b, c) no $\mathbb{R}^3$. Isso é denominado um **sistema de coordenadas retangular tridimensional**. Observe que, em termos de coordenadas, o primeiro octante pode ser descrito como o conjunto de pontos cujas coordenadas são todas positivas. Na geometria analítica bidimensional, o gráfico de uma equação envolvendo x e y é uma curva em $\mathbb{R}^2$. Na geometria analítica tridimensional, uma equação em x, y e z representa uma *superfície* em $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLO 1 Que superfícies em $\mathbb{R}^3$ estão representadas pelas seguintes equações?

(a) $z = 3$ (b) $y = 5$

SOLUÇÃO

(a) A equação $z = 3$ representa o conjunto $\{(x, y, z) \mid z = 3\}$, que é conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^3$ com coordenada z igual a 3. Este é o plano horizontal paralelo ao plano xy e três unidades acima deste, como na Figura 7(a).

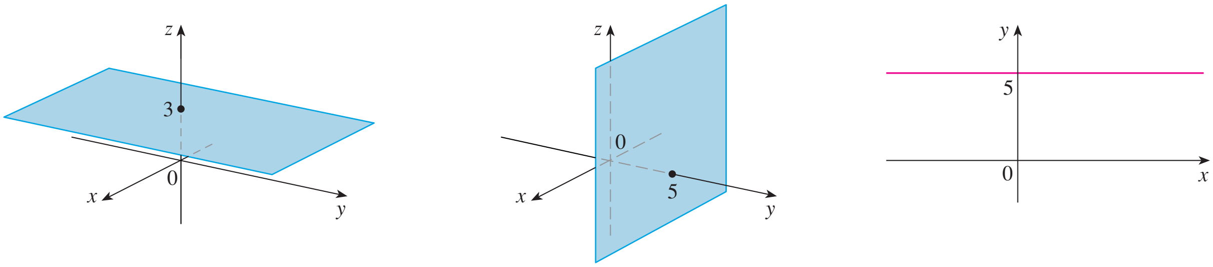


FIGURA 7 (a) $z = 3$, um plano em $\mathbb{R}^3$ (b) $y = 5$, um plano em $\mathbb{R}^3$ (c) $y = 5$, uma reta em $\mathbb{R}^2$

(b) A equação $y = 5$ representa o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^3$ cuja coordenada y é 5. Esse é o plano vertical paralelo ao plano xz e cinco unidades à direita deste, como na Figura 7(b).

OBSERVAÇÃO Quando é dada uma equação, precisamos descobrir a partir do contexto se ela representa uma curva em $\mathbb{R}^2$ ou uma superfície em $\mathbb{R}^3$. No Exemplo 1, $y = 5$ representa um plano em $\mathbb{R}^3$, mas é claro que $y = 5$ também pode representar uma reta em $\mathbb{R}^2$ se estivermos trabalhando com geometria analítica bidimensional. Veja as Figuras 7(b) e (c).

Em geral, se k é uma constante, então $x = k$ representa um plano paralelo ao plano yz, $y = k$ é um plano paralelo ao plano xz e $z = k$ é um plano paralelo ao plano xy. Na Figura 5, as faces da caixa retangular são formadas pelos três planos coordenados $x = 0$ (o plano yz), $y = 0$ (o plano xz) e $z = 0$ (o plano xy), e os planos $x = a$, $y = b$ e $z = c$.

EXEMPLO 2

(a) Quais os pontos (x, y, z) satisfazem as equações

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad z = 3$$

(b) O que a equação $x^2 + y^2 = 1$ representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?

SOLUÇÃO

(a) Como $z = 3$, os pontos estão no plano horizontal $z = 3$ a partir do Exemplo 1(a). Uma vez que $x^2 + y^2 = 1$, os pontos estão sobre o círculo com raio 1 e centro no eixo z. Veja a Figura 8.

(b) Dado que $x^2 + y^2 = 1$, sem restrições em z, vemos que o ponto de (x, y, z) poderia estar sobre um círculo em qualquer plano horizontal $z = k$. Assim, a superfície de $x^2 + y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$ é constituída por todos os possíveis círculos horizontais $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$, e, consequentemente, o cilindro circular com raio 1 cujo eixo é o eixo z. Veja a Figura 9.

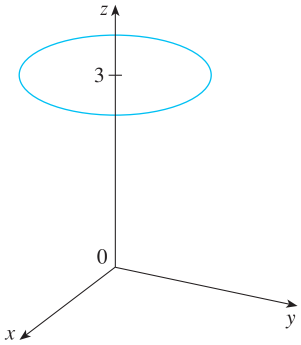


FIGURA 8
O círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$

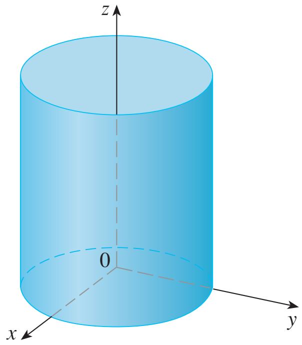


FIGURA 9
O cilindro $x^2 + y^2 = 1$

EXEMPLO 3 Descreva e esboce a superfície em $\mathbb{R}^3$ representada pela equação $y = x$.

SOLUÇÃO A equação representa o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^3$ com coordenadas x e y iguais, isto é, $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Trata-se de um plano vertical que intersecta o plano xy na reta $y = x$, $z = 0$. A porção deste plano que se encontra no primeiro octante está esboçada na Figura 10.

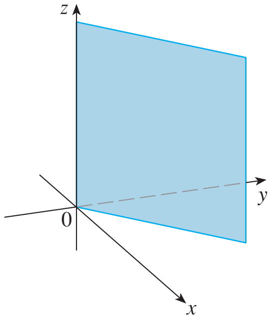


FIGURA 10
O plano $y = x$

A fórmula familiar para a distância entre dois pontos em um plano é estendida facilmente para a seguinte fórmula tridimensional.

Fórmula da Distância em Três Dimensões A distância $|P_1P_2|$ entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Para vermos por que essa fórmula é verdadeira, vamos construir uma caixa retangular (como na Figura 11), onde P_1 e P_2 são vértices opostos e as faces dessa caixa são paralelas aos planos coordenados. Se $A(x_2, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_1)$ são os vértices da caixa indicados na figura, então,

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \qquad |AB| = |y_2 - y_1| \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

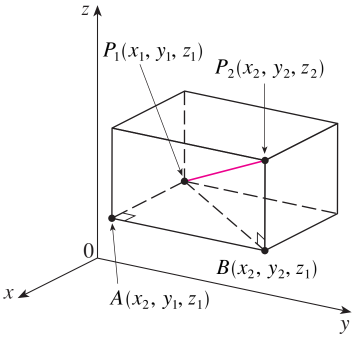


FIGURA 11

Como os triângulos P_1BP_2 e P_1AB são ambos triângulos retângulos, duas aplicações do Teorema de Pitágoras fornecem

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

e

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EXEMPLO 4 A distância do ponto $P(2, -1, 7)$ ao ponto $Q(1, -3, 5)$ é

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

EXEMPLO 5 Encontre a equação da esfera com raio r e centro $C(h, k, l)$.

SOLUÇÃO Por definição, a esfera é o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ cuja distância ao ponto C é r. (Veja a Figura 12.) Logo, P está sobre a esfera se e somente se $|PC| = r$. Elevando ao quadrado ambos os lados, temos $|PC|^2 = r^2$ ou

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

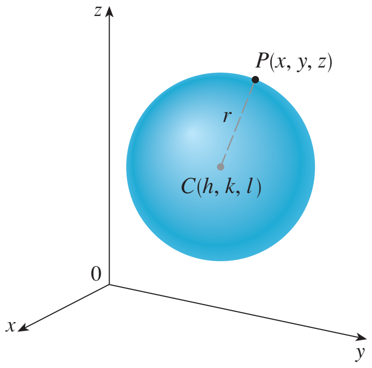


FIGURA 12

O resultado do Exemplo 5 vale a pena ser lembrado:

Equação da Esfera A equação de uma esfera com centro $C(h, k, l)$ e raio r é

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro é a origem O, então a equação da esfera é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

EXEMPLO 6 Mostre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ é a equação de uma esfera e encontre seu centro e raio.

SOLUÇÃO Podemos reescrever a equação dada na forma da equação de uma esfera se completarmos os quadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 8$$

Comparando essa equação com a forma padrão, vemos que esta é a equação de uma esfera com centro $(-2, 3, -1)$ e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

EXEMPLO 7 Que região de $\mathbb{R}^3$ é representada pelas seguintes inequações?

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \qquad z \leqslant 0$$

SOLUÇÃO As inequações

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

podem ser reescritas como

$$1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2$$

portanto, representam os pontos (x, y, z) cuja distância à origem é pelo menos 1 e, no máximo, 2. Mas nos foi dado também que $z \leqslant 0$, estando os pontos, portanto, abaixo do plano xy. Assim, as inequações dadas representam a região que está entre as (ou nas) esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e sob (ou sobre) o plano xy. O esboço da região está apresentado na Figura 13.

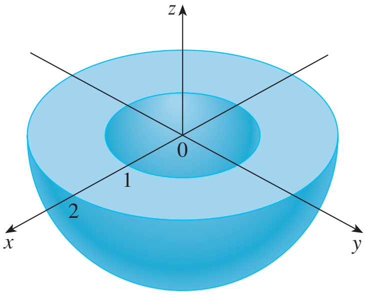


FIGURA 13

12.1 Exercícios

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de 4 unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de 3 unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ e $(1, -1, 2)$ em um único conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos $A(-4, 0, -1)$, $B(3, 1, -5)$ e $C(2, 4, 6)$ está mais próximo do plano yz? Qual ponto pertence ao plano xz?

4. Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos xy, yz e xz? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em $(2, 3, 5)$ e suas faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. Descreva e esboce a superfície em $\mathbb{R}^3$ representada pela equação $x + y = 2$.

6. (a) O que a equação $x = 4$ representa em $\mathbb{R}^2$? O que ela representa em $\mathbb{R}^3$? Ilustre com esboços.
(b) O que a equação $y = 3$ representa em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? O que o par de equações $y = 3$ e $z = 5$ representa? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que $y = 3$ e $z = 5$. Faça um esboço ilustrativo.

7–8 Encontre os comprimentos dos lados do triângulo PQR. Ele é um triângulo retângulo? É isósceles?

7. $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$

8. $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

9. Determine se os pontos estão em uma mesma reta.
(a) $A(2, 4, 2)$, $B(3, 7, -2)$, $C(1, 3, 3)$
(b) $D(0, -5, 5)$, $E(1, -2, 4)$, $F(3, 4, 2)$

10. Determine a distância entre $(3, 7, -5)$ e cada um dos seguintes.
(a) Plano xy
(b) Plano yz
(c) Plano xz
(d) Eixo x
(e) Eixo y
(f) Eixo z

11. Determine uma equação da esfera com centro em $(1, -4, 3)$ e raio 5. Qual é a intersecção dessa esfera com o plano xz?

12. Determine uma equação da esfera com centro em $(2, -6, 4)$ e raio 5. Descreva sua intersecção com cada um dos planos coordenados.

13. Encontre uma equação da esfera que passa pelo ponto $(4, 3, -1)$ e tem centro em $(3, 8, 1)$.

14. Determine uma equação da esfera que passa pela origem e tem centro em $(1, 2, 3)$.

15–18 Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$

16. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$

17. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8x - 24z + 1$

18. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10 + 6y + 12z$

19. (a) Prove que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

(b) Determine os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ e $C(4, 1, 5)$.

20. Encontre uma equação de uma esfera que tenha um diâmetro com extremidades dadas por $(2, 1, 4)$ e $(4, 3, 10)$.

21. Encontre as equações das esferas com centro $(2, -3, 6)$ que toquem (a) o plano xy, (b) o plano yz e (c) o plano xz.

22. Determine uma equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

23–34 Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

23. $x = 5$

24. $y = -2$

25. $y < 8$

26. $x \geqslant -3$

27. $0 \leqslant z \leqslant 6$

28. $z^2 = 1$

29. $x^2 + y^2 = 4,\ z = -1$

30. $y^2 + z^2 = 16$

31. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$

32. $x = z$

33. $x^2 + z^2 \leqslant 9$

34. $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

35–38 Escreva inequações para descrever a região dada.

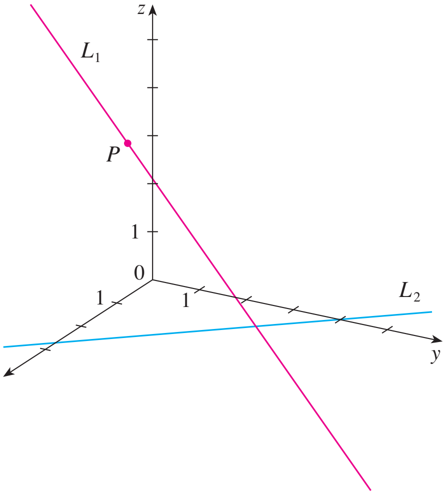
35. A região entre o plano yz e o plano vertical $x = 5$.

36. O cilindro sólido que está sobre ou abaixo do plano $z = 8$ e sobre ou acima do disco no plano xy com centro na origem e raio 2.

37. A região constituída em todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio r e R centradas na origem, onde $r < R$.

38. O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

39. A figura mostra uma reta L_1 no espaço e uma segunda reta L_2, que é a projeção de L_1 no plano xy. (Isto é, os pontos de L_2 estão diretamente abaixo ou acima dos pontos de L_1.)
(a) Determine as coordenadas do ponto P da reta L_1.
(b) Localize no diagrama os pontos A, B e C, onde a reta L_1 intercepta os planos xy, o plano yz e o plano xz, respectivamente.



40. Considere os pontos P tais que a distância de P para $A(-1, 5, 3)$ seja o dobro da distância de P para $B(6, 2, -2)$. Mostre que o conjunto desses pontos é uma esfera e determine seu raio e centro.

41. Determine uma equação para o conjunto de pontos equidistantes dos pontos $A(-1, 5, 3)$ e $B(6, 2, -2)$. Descreva o conjunto.

42. Determine o volume do sólido que está contido em ambas as esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

43. Encontre a distância entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 11$.

44. Descreva e esboce um sólido com as seguintes propriedades. Quando iluminado por raios paralelos ao eixo z, a sua sombra é um disco circular. Quando iluminado por raios paralelos ao eixo y, sua sombra é um quadrado. Quando iluminado por raios paralelos ao eixo x, sua sombra é um triângulo isósceles.

12.2 Vetores

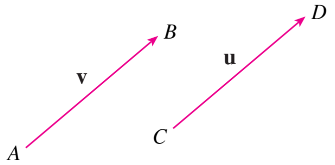


FIGURA 1 Vetores equivalentes

O termo **vetor** é usado por cientistas para indicar quantidades (tais como deslocamento ou velocidade ou força) que têm ao mesmo tempo módulo, direção e sentido. Um vetor é frequentemente representado por uma seta ou segmento de reta orientado. O comprimento da seta representa o módulo do vetor e a seta aponta na direção e sentido do vetor. Denotamos um vetor por uma letra em negrito (**v**) ou colocando uma seta sobre a letra ($\vec{v}$).

Por exemplo, suponha que uma partícula se mova ao longo de um segmento de reta do ponto A para o ponto B. O **vetor deslocamento correspondente v**, mostrado na Figura 1, possui **ponto inicial** A (o início) e **ponto terminal** B (o fim) e indicamos isso por $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Observe que o vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{CD}$ tem o mesmo tamanho, a mesma direção e sentido que **v**, embora esteja em uma posição diferente. Dizemos que **u** e **v** são **equivalentes** (ou **iguais**) e escrevemos **u** = **v**. O **vetor zero**, denotado por **0**, tem comprimento 0. Ele é o único vetor sem nenhuma direção específica.

Combinando Vetores

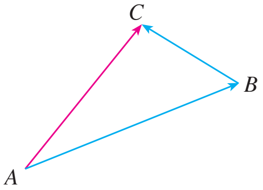


FIGURA 2

Suponha que uma partícula se mova de A para B, assim, seu deslocamento é $\overrightarrow{AB}$. Em seguida, a partícula muda de direção e move-se a partir de B para C, com vetor de deslocamento $\overrightarrow{BC}$, como na Figura 2. O efeito combinado desses deslocamentos é que a partícula se moveu de A para C. O vetor deslocamento resultante $\overrightarrow{AC}$ é chamado de *soma* de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ e escrevemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Em geral, se começamos com os vetores **u** e **v**, primeiro movemos **v** de forma que seu início coincida com o fim de **u** e definimos a soma de **u** e **v** como segue.

Definição da Adição de Vetores Se **u** e **v** são vetores posicionados de maneira que o ponto inicial de **v** é o ponto terminal de **u**, então a **soma u** + **v** é o vetor do ponto inicial de **u** ao ponto final de **v**.

A definição de adição de vetores é ilustrada na Figura 3. Você pode ver por que essa definição é algumas vezes chamada **Lei do Triângulo**.

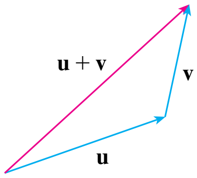


FIGURA 3 Lei do Triângulo

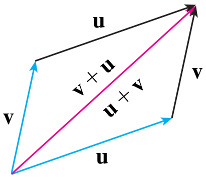


FIGURA 4 Lei do Paralelogramo

Na Figura 4 começamos com os mesmos vetores **u** e **v** como na Figura 3 e desenhamos uma cópia de **v** com o mesmo ponto inicial **u**. Completando o paralelogramo, vemos que **u** + **v** = **v** + **u**. Isso também fornece uma outra maneira de construir a soma: se posicionarmos **u** e **v** de maneira que eles comecem no mesmo ponto, então **u** + **v** estará ao longo da diagonal do paralelogramo com **u** e **v** como lados. (Esta é a chamada **Lei do Paralelogramo**.)

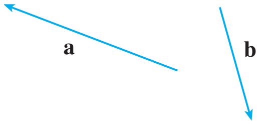


FIGURA 5

TEC *Visual 12.2* mostra como o Triângulo e Leis de Paralelogramo trabalham para vários vetores **a** e **b**.

EXEMPLO 1 Desenhe a soma dos vetores **a** e **b** mostrados na Figura 5.

SOLUÇÃO Primeiro transladamos **b** e posicionamos seu ponto inicial no ponto final de **a**, tomando cuidado para desenhar uma cópia de **b** que tenha o mesmo comprimento e direção. A seguir, desenhamos o vetor **a** + **b** [veja a Figura 6(a)] começando no ponto inicial de **a** e terminando no ponto final da cópia de **b**.

Alternativamente, podemos posicionar **b** tal que ele comece onde **a** começa e construir **a** + **b** pela Lei do Paralelogramo, como na Figura 6(b).

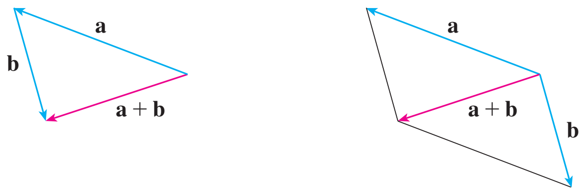


FIGURA 6 (a) (b)

É possível multiplicar um vetor por um número real c. (Neste contexto, chamaremos o número real c um **escalar**, a fim de distingui-lo de um vetor.) Por exemplo, queremos que 2**v** seja o mesmo vetor que **v** + **v**, o qual possui a mesma direção e sentido de **v** mas tem o dobro do comprimento. Em geral, multiplicamos um vetor por um escalar da seguinte maneira.

Definição de Multiplicação Escalar Se c é um escalar e **v** é um vetor, então a **multiplicação escalar** $c\mathbf{v}$ é o vetor cujo comprimento é $|c|$ vezes o comprimento de **v** e cuja direção e sentido são os mesmos de **v** se $c > 0$ e sentido oposto a **v** se $c < 0$. Se $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

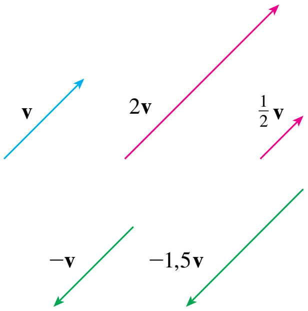


FIGURA 7
Múltiplos escalares de **v**

Essa definição está ilustrada na Figura 7. Vemos que os números reais agem como fatores de escala aqui; é por isso que são denominados escalares. Observe que os dois vetores não nulos são **paralelos** se são múltiplos escalares um do outro. Em particular, o vetor $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ tem o mesmo comprimento de **v**, mas aponta em sentido oposto. É denominado **oposto** de **v**.

Pela **diferença u − v** de dois vetores, queremos dizer

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

Logo, podemos construir **u** − **v** desenhando primeiro o opo dsto de **v**, −**v**, e então adicionando a ele o vetor **u** usando a Lei do Paralelogramo, como na Figura 8(a). Como alternativa, uma vez que $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$, o vetor **u** − **v**, quando adicionado a **v**, fornece **u**. Assim, podemos construir **u** − **v** tal como na Figura 8(b), por meio da lei do triângulo.

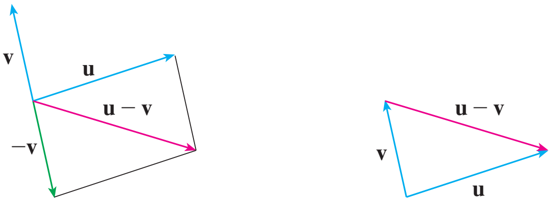


FIGURA 8
Desenhando **u** − **v**

(a) (b)

EXEMPLO 2 Se **a** e **b** são os vetores mostrados na Figura 9, desenhe **a** − 2**b**.

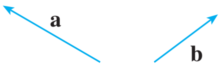


FIGURA 9

SOLUÇÃO Primeiro, desenhamos o vetor −2**b** apontando no sentido oposto a **b** e com o dobro de seu tamanho. Nós o posicionamos com seu ponto inicial no ponto terminal de **a** e então usamos a Lei do Triângulo para desenhar **a** + (−2**b**), como na Figura 10.

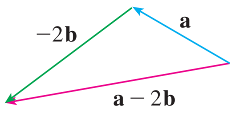


FIGURA 10

Componentes

Para alguns propósitos é melhor introduzir um sistema de coordenadas e tratar os vetores algebricamente. Se posicionarmos o ponto inicial de um vetor **a** na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o ponto final de **a** tem coordenadas da forma (a_1, a_2) ou (a_1, a_2, a_3), dependendo se nosso sistema de coordenadas for em duas ou três dimensões (veja a Figura 11).

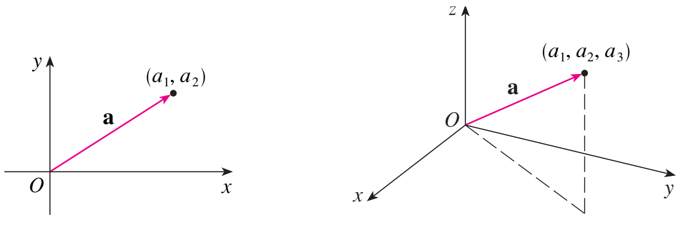


FIGURA 11

$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

Essas coordenadas são denominadas **componentes** de **a** e escrevemos

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Usamos a notação $\langle a_1, a_2 \rangle$ para o par ordenado que se refere a um vetor para não confundir com o par ordenado (a_1, a_2) que corresponde a um ponto no plano.

Por exemplo, os vetores apresentados na Figura 12 são todos equivalentes ao vetor $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$ cujo ponto terminal é $P(3, 2)$. O que eles têm em comum é que o ponto terminal é alcançado a partir do ponto inicial por um deslocamento de três unidades para a direita e duas para cima. Podemos pensar em todos esses vetores geométricos como **representações** do vetor algébrico $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$. A representação particular $\overrightarrow{OP}$ da origem ao ponto $P(3, 2)$ é chamado **vetor posição** do ponto P.

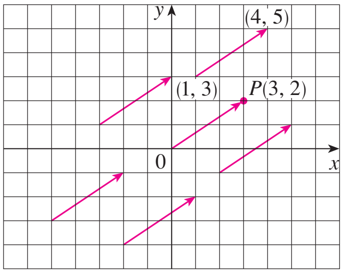


FIGURA 12

Representações do vetor $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$

Em três dimensões, o vetor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ é o **vetor posição** do ponto $P(a_1, a_2, a_3)$. (Veja a Figura 13.) Vamos considerar qualquer outra representação $\overrightarrow{AB}$ de **a**, onde o ponto inicial é $A(x_1, y_1, z_1)$ e o ponto final é $B(x_2, y_2, z_2)$. Então, temos que ter $x_1 + a_1 = x_2$, $y_1 + a_2 = y_2$ e $z_1 + a_3 = z_2$ e, então, $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ e $a_3 = z_2 - z_1$. Portanto, temos o seguinte resultado.

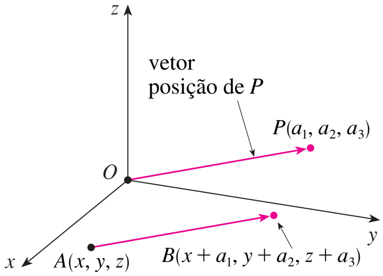


FIGURA 13

Representações de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$\boxed{1}$ Dados os pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, o vetor **a** com representação $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

V **EXEMPLO 3** Encontre o vetor representado pelo segmento de reta orientado com ponto inicial $A(2, -3, 4)$ e ponto final $B(-2, 1, 1)$.

SOLUÇÃO Por $\boxed{1}$, o vetor correspondente a $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle$$

A **magnitude** ou **comprimento** do vetor **v** é o comprimento de qualquer uma de suas representações e é denotado pelo símbolo $|\mathbf{v}|$ ou $\|\mathbf{v}\|$. Usando a fórmula de distância para calcular o comprimento de um segmento OP, obtemos as seguintes fórmulas.

O comprimento de um vetor bidimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

O comprimento de um vetor tridimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

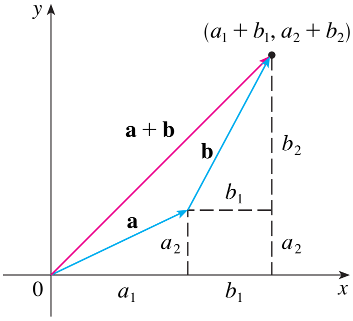


FIGURA 14

Como somamos os vetores algebricamente? A Figura 14 mostra que, se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então a soma é $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, pelo menos para o caso em que as componentes são positivas. Em outras palavras, para *somarmos algebricamente vetores, somamos suas componentes*. Analogamente, *para subtrairmos vetores, subtraímos suas componentes*. A partir dos triângulos semelhantes, na Figura 15, vemos que as componentes de $c\mathbf{a}$ são ca_1 e ca_2. Assim *para multiplicarmos um vetor por um escalar multiplicamos cada componente por aquele escalar*.

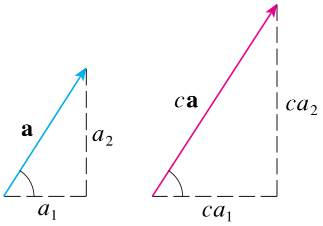


FIGURA 15

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

Analogamente, para os vetores tridimensionais,

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encontre $|\mathbf{a}|$ e os vetores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$ e $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\
\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle \\
&= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle \\
\mathbf{a} - \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle \\
&= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle \\
3\mathbf{b} &= 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle \\
2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} &= 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle \\
&= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle
\end{aligned}$$

Denotaremos por V_2 o conjunto de todos os vetores bidimensionais e por V_3 o conjunto de todos os vetores tridimensionais. De forma mais geral, precisaremos, adiante, considerar o conjunto V_n dos n vetores de dimensão. Um vetor de dimensão n é uma n-upla ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais chamados componentes de **a**. Adição e multiplicação escalar são definidas em termos das componentes, como para os casos $n = 2$ e $n = 3$.

Vetores em n dimensões são usados para listar várias quantidades em um modo organizado. Por exemplo, as componentes do vetor de dimensão 6

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$$

podem representar os preços de seis itens diferentes necessários na fabricação de um artigo particular. Vetores de dimensão quatro $\langle x, y, z, t \rangle$ são usados em teoria da relatividade, onde as primeiras três componentes especificam a posição no espaço e a quarta representa o tempo.

Propriedades dos Vetores Se **a**, **b** e **c** são vetores em V_n e c e d são escalares, então

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
6. $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Essas oito propriedades dos vetores podem ser facilmente verificadas, tanto geométrica quanto algebricamente. Por exemplo, a Propriedade 1 pode ser vista na Figura 4 (equivale à Lei do Paralelogramo) ou como a seguir no caso $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\
&= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\
&= \mathbf{b} + \mathbf{a}
\end{aligned}$$

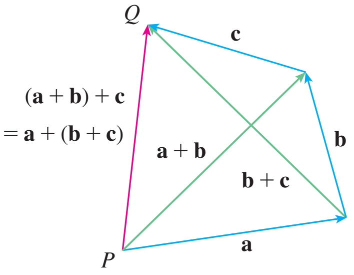


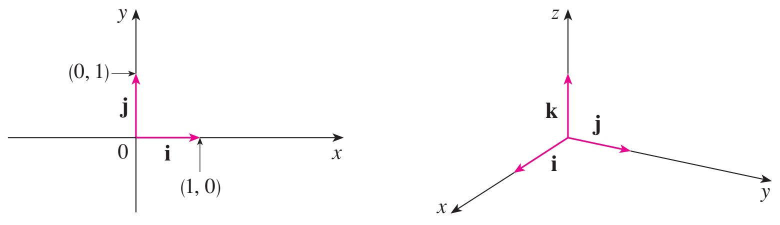
FIGURA 16

Podemos ver por que a Propriedade 2 (a propriedade associativa) é verdadeira olhando para a Figura 16 e aplicando a Lei de Triângulo várias vezes: o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é obtido pela primeira construção $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e, em seguida, adicionando **c** ou por adição de **a** ao vetor $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Três vetores em V_3 têm papel especial. Considere

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Esses vetores **i**, **j** e **k** são chamados **vetores da base canônica**. Eles têm comprimento 1 e direção e sentido dos eixos x, y e z positivos. Da mesma forma, em duas dimensões, definimos $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. (Veja a Figura 17).



(a) (b)

FIGURA 17
Vetores da base canônica em V_2 e V_3

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, então podemos escrever

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$

$$= a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\,\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\,\langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\boxed{2} \qquad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

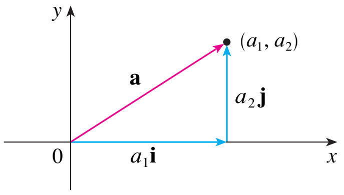
Assim, qualquer vetor em V_3 pode ser expresso em termos de **i**, **j** e **k**. Por exemplo,

$$\langle 1, -2, 6 \rangle = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

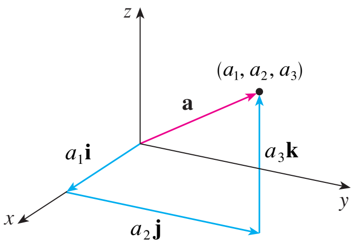
Da mesma forma, em duas dimensões, podemos escrever

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

Veja a Figura 18 para a interpretação geométrica das Equações 3 e 2 e compare com a Figura 17.



(a) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

FIGURA 18

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, expresse o vetor $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ nos termos de **i**, **j** e **k**.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 1, 2, 5, 6 e 7 dos vetores, temos

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

Um **versor** ou **vetor unitário** é um vetor cujo módulo é 1. Os vetores, **i**, **j** e **k** são exemplos de vetores unitários ou versores. Em geral, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então o vetor unitário que tem mesma direção e mesmo sentido de **a**, chamado versor de **a,** é

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Para verificar isso, seja $c = 1/|\mathbf{a}|$. Então, $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ e c é um escalar positivo, de modo que **u** tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor **a**. Além disso,

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,|\mathbf{a}| = 1$$

Gibbs

Josiah Willard Gibbs (1839–1903), um professor de física matemática na Universidade de Yale, publicou o primeiro livro em vetores, *Vector Analysis*, em 1881. Objetos mais complicados, chamado quatérnions, já haviam sido inventados por Hamilton como ferramentas matemáticas para descrever o espaço, mas eles não eram fáceis para os cientistas usarem. Quatérnions têm uma parte escalar e uma parte vetor. A ideia de Gibb era usar a parte vetor separadamente. Maxwell e Heaviside tinham ideias semelhantes, mas a abordagem de Gibb provou ser a maneira mais conveniente para estudar o espaço.

EXEMPLO 6 Determine o versor do vetor $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O vetor dado tem módulo

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

portanto, pela Equação 4, o versor é

$$\tfrac{1}{3}\,(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \tfrac{2}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\,\mathbf{k}$$

Aplicações

Vetores são úteis em muitos aspectos da física e da engenharia. No Capítulo 13 veremos como eles descrevem a velocidade e a aceleração de objetos movendo-se no espaço. Aqui olharemos para as forças.

Uma força é representada por um vetor porque tem módulo (medido em libras ou newtons), direção e sentido. Se várias forças estão agindo em um objeto, a **força resultante** experimentada pelo objeto é o vetor soma dessas forças.

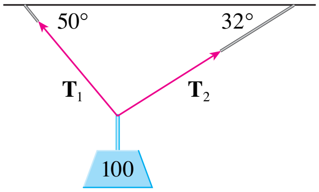


FIGURA 19

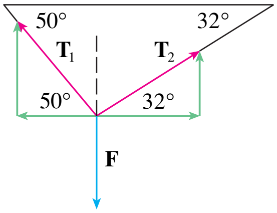


FIGURA 20

EXEMPLO 7 Uma carga de 100 kg de massa pende a partir de dois fios como é mostrado na Figura 19. Encontre as tensões (forças) $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em ambos os fios e suas magnitudes.

SOLUÇÃO Primeiro vamos exprimir $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em função de suas componentes horizontal e vertical. Da Figura 20 vemos que

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{T}_1 = -|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ\,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ\,\mathbf{j}$$

$$\boxed{6} \qquad \mathbf{T}_2 = |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ\,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ\,\mathbf{j}.$$

A força de gravidade que age sobre a carga é $\mathbf{F} = -100(9,8)\,\mathbf{j} = -980\,\mathbf{j}$. A resultante $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ contrabalança $\mathbf{F}$ de modo que

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = -\mathbf{F} = 980\mathbf{j}$$

Logo,

$$(-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ)\,\mathbf{i} + (|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ)\mathbf{j} = 980\mathbf{j}$$

Igualando as componentes, obtemos

$$-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ = 0$$

$$|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ = 980$$

Resolvendo a primeira destas equações para $|\mathbf{T}_2|$ e substituindo na segunda, temos

$$|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ}\operatorname{sen} 32^\circ = 980$$

Ou seja, os módulos das tensões são

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{980}{\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{tg} 32^\circ \cos 50^\circ} \approx 839\ \text{N}$$

e

$$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ} \approx 636\ \text{N}$$

Substituindo esses valores em $\boxed{5}$ e $\boxed{6}$, obtemos os vetores tensão

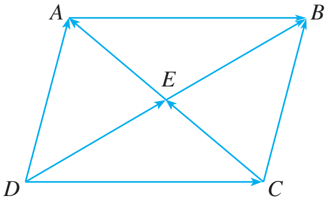
$$\mathbf{T}_1 \approx -539\,\mathbf{i} + 643\,\mathbf{j} \qquad\qquad \mathbf{T}_2 \approx 539\,\mathbf{i} + 337\,\mathbf{j}$$

12.2 Exercícios

1. Quais das seguintes grandezas são vetoriais ou escalares? Explique.
(a) O custo de um bilhete de cinema
(b) A correnteza em um rio
(c) A trajetória inicial do voo entre Houston e Dallas
(d) A população mundial

2. Qual a relação existente entre o ponto (4, 7) e o vetor $\langle 4, 7\rangle$? Faça um esboço ilustrativo.

3. Indique os vetores iguais no paralelogramo mostrado.

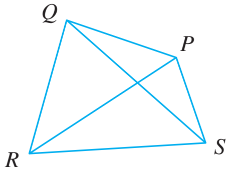


1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

4. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$

(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$

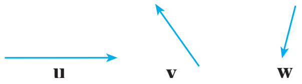


5. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$

(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

(e) $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{u} - \mathbf{w} - \mathbf{v}$

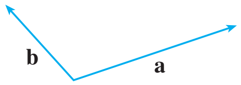


6. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

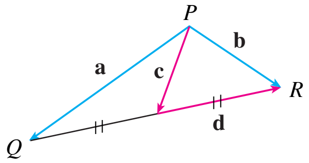
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(c) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $-3\mathbf{b}$

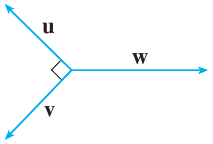
(e) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ (f) $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$



7. Na figura, a ponta de **c** e a cauda de **d** são ambas o ponto médio de QR. Expresse **c** e **d** em termos de **a** e **b**.



8. Se os vetores da figura satisfizerem $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$, o que é $|\mathbf{w}|$?



9–14 Determine o vetor **a** com representação dada pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Desenhe $\overrightarrow{AB}$ e o equivalente com início na origem.

9. $A(-1, 1)$, $B(3, 2)$ **10.** $A(-4, -1)$, $B(1, 2)$

11. $A(-1, 3)$, $B(2, 2)$ **12.** $A(2, 1)$, $B(0, 6)$

13. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **14.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

15–18 Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

15. $\langle -1, 4\rangle$, $\langle 6, -2\rangle$ **16.** $\langle 3, -1\rangle$, $\langle -1, 5\rangle$

17. $\langle 3, 0, 1\rangle$, $\langle 0, 8, 0\rangle$ **18.** $\langle 1, 3, -2\rangle$, $\langle 0, 0, 6\rangle$

19–22 Determine $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

19. $\mathbf{a} = \langle 5, -12\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -6\rangle$

20. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

21. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

22. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

23–25 Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.

23. $-3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ **24.** $\langle -4, 2, 4\rangle$

25. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

26. Ache um vetor que possui a mesma direção e o mesmo sentido que $\langle -2, 4, 2\rangle$ mas tem comprimento 6.

27–28 O que é o ângulo entre o vetor dado e o sentido positivo do eixo x?

27. $\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$ **28.** $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

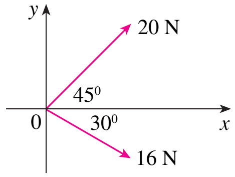
29. Se **v** está no primeiro quadrante e faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x positivo e $|\mathbf{v}| = 4$, encontre **v** em forma de componente.

30. Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38º com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.

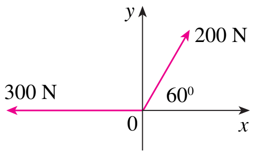
31. Um quarterback lança uma bola de futebol com ângulo de elevação 40º e velocidade de 60 pés/s. Encontre os componentes horizontal e vertical do vetor velocidade.

32–33 Encontre o módulo da força resultante e o ângulo que ela faz com o eixo x positivo.

32.



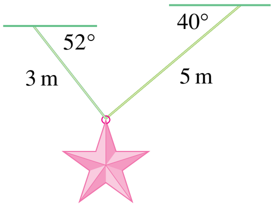
33.



34. O módulo de uma velocidade é chamado *velocidade escalar*. Suponha que um vento esteja soprando na direção N45º W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção de onde sopra o vento é de 45º oeste da direção norte.) Um piloto está pilotando um avião na direção N60ºE em uma velocidade (velocidade no ar parado) de 250 km/h. O *verdadeiro curso*, ou *caminho*, do avião é o sentido da resultante dos vetores velocidade do avião e do vento. A *velocidade escalar* em relação ao solo do avião é o módulo da resultante. Determine o curso real e a velocidade escalar em relação ao solo do avião.

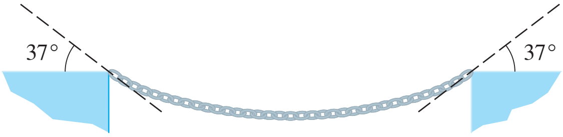
35. Uma mulher caminha para oeste no convés de um navio, a 5 km/h. O navio está se movendo para o norte a uma velocidade de 35 km/h. Encontre a velocidade e direção da mulher em relação à superfície da água.

36. Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas à decoração natalina suspensa sobre uma praça. A decoração tem uma massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52º e 40º com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e o módulo de cada tensão.



37. Um varal de roupas é estendido entre dois postes, 8 m distantes um do outro. O fio do varal está bastante esticado, de forma a ser considerado horizontal. Quando uma camisa molhada com massa de 0,8 kg é pendurada no meio do varal, esse ponto central é deslocado para baixo 8 cm. Determine a tensão em cada metade do varal.

38. A tensão **T** em cada extremidade da corrente tem magnitude 25 N (veja a figura). Qual o peso da corrente?



39. Um barqueiro quer atravessar um canal que fica a 3 km de largura e quer atracar em um ponto 2 km rio acima do seu ponto de partida. A corrente flui no canal a 3,5 km/h e a velocidade do seu barco é 13 km/h.

(a) Em que direção ele deve dirigir?

(b) Quanto tempo a viagem vai demorar?

40. Três forças atuam sobre um objeto. Duas das forças estão a um ângulo de 100º entre si e têm magnitudes de 25 N e 12 N. O terceiro é perpendicular ao plano das duas forças e tem magnitude 4 N. Calcule o valor da força que exatamente iria contrabalançar essas três forças.

41. Encontre os vetores unitários que são paralelos à reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto (2, 4).

42. (a) Encontre os vetores unitários que são paralelos à reta tangente à curva $y = 2 \text{ sen } x$ no ponto $(\pi/6, 1)$.

(b) Encontre os vetores unitários que são perpendiculares à reta tangente.

(c) Esboce a curva $y = 2 \text{ sen } x$ e os vetores nas partes (a) e (b), todos começando em $(\pi/6, 1)$.

43. Se A, B e C são vértices de um triângulo, determine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

44. Seja C o ponto no segmento de reta AB que está duas vezes mais distante de B que de A. Se $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, mostre que $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

45. (a) Desenhe os vetores $\mathbf{a} = \langle 3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1\rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 7, 1\rangle$.

(b) Mostre, por um esboço, que existem escalares s e t tais que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.

(c) Use o esboço para estimar os valores de s e t.

(d) Determine os valores exatos de s e t.

46. Suponha que **a** e **b** sejam vetores não nulos, que não sejam paralelos e **c** seja qualquer vetor no plano determinado por **a** e **b**. Dê um argumento geométrico para mostrar que **c** pode ser escrito como $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para escalares adequados s e t. Em seguida, dê um argumento usando componentes.

47. Se $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) de tal forma que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 1$.

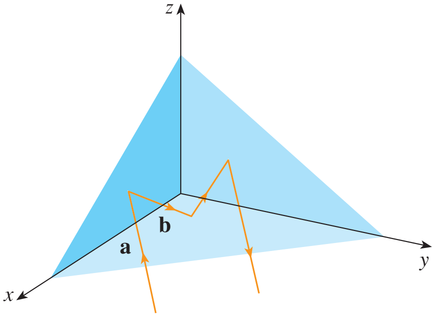
48. Se $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, descreva o conjunto de todos os pontos (x, y) de tal forma que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = k$, onde $k > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

49. A Figura 16 fornece uma demonstração geométrica da Propriedade 2 dos vetores. Use as componentes para dar uma demonstração algébrica desse fato no caso $n = 2$.

50. Demonstre a Propriedade 5 de vetores algebricamente para o caso de $n = 3$. Em seguida, use semelhança de triângulos para dar uma prova geométrica.

51. Utilize vetores para demonstrar que uma reta unindo os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

52. Suponha que os três planos coordenados sejam todos espelhados e que um raio de luz dado pelo vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ atinja primeiro o plano xz, como mostrado na figura. Use o fato de os ângulos de incidência e de reflexão serem iguais para mostrar que a direção do raio refletido é dada por $\mathbf{b} = \langle a_1, -a_2, a_3\rangle$. Deduza que, após ser refletido em todos os três espelhos perpendiculares, o raio resultante é paralelo ao raio inicial. (Cientistas norte-americanos usaram esse princípio, juntamente com um feixe de laser e um conjunto de espelhos em cantoneira na Lua, para calcular de modo preciso a distância da Terra à Lua.x)



12.3 O Produto Escalar

Até aqui aprendemos a somar os vetores e multiplicá-los por um escalar. A questão surge: é possível multiplicar dois vetores de modo que o valor resultante seja de alguma utilidade? Um desses produtos é o produto escalar, cuja definição vem a seguir. O outro é o produto vetorial, que será discutido na próxima seção.

1 **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto escalar** de **a** e **b** é o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Assim, para achar o produto escalar de **a** e **b**, multiplicamos as componentes correspondentes e somamos. O resultado não é um vetor. É um número real, isto é, um escalar, por isso o nome **produto escalar**. O produto escalar é também conhecido como **produto interno**. Apesar de a definição ter sido dada para os vetores tridimensionais, o produto escalar para os vetores bidimensionais é definido de forma análoga:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

EXEMPLO 1

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \left\langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \right\rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

O produto escalar obedece a muitas das regras que valem para o produto de números reais. Esse fato é apresentado no seguinte teorema.

2 **Propriedades do Produto Escalar** Se **a**, **b** e **c** são vetores em V_3 e c é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Essas propriedades são facilmente demonstradas usando a Definição 1. Por exemplo, vamos fazer a demonstração das Propriedades 1 e 3:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$

3.
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

As demonstrações restantes ficam como exercício.

O produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ tem uma interpretação geométrica em termos do **ângulo** θ **entre a e b**, definido como o ângulo entre os representantes de **a** e **b**, ambos com ponto inicial na origem, onde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Em outras palavras, θ é o ângulo entre os segmentos de reta $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ da Figura 1. Observe que, se **a** e **b** são vetores paralelos, então $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

No teorema a seguir, a fórmula dada é utilizada por físicos como *definição* do produto escalar.

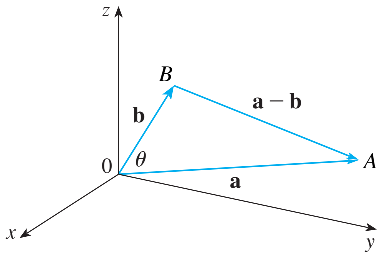


FIGURA 1

3 **Teorema** Se θ é o ângulo entre os vetores **a** e **b**, então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

DEMONSTRAÇÃO Se aplicarmos a Lei dos Cossenos ao triângulo *OAB* da Figura 1, obteremos

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\,|OB| \cos \theta \tag{4}$$

(Observe que a Lei dos Cossenos ainda se aplica nos casos limites quando $\theta = 0$ ou π, ou $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.) Mas $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ e $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, assim, a Equação 4 torna-se

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta \tag{5}$$

Usando as Propriedades 1, 2 e 3 do produto escalar, podemos reescrever o lado esquerdo dessa equação como:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

Portanto, a Equação 5 fornece

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

Logo,

$$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

ou

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

EXEMPLO 2 Se os vetores **a** e **b** têm módulos 4 e 6 e o ângulo entre eles é $\pi/3$, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUÇÃO Usando o Teorema 3, temos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\pi/3) = 4 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 12$$

A fórmula do Teorema 3 nos permite ainda determinar o ângulo entre dois vetores.

6 **Corolário** Se θ é o ângulo entre dois vetores não nulos **a** e **b**, então

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

EXEMPLO 3 Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

e uma vez que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

temos, do Corolário 6,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Assim, o ângulo entre **a** e **b** é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1.46 \quad \text{(ou } 84^\circ\text{)}$$

Dois vetores não nulos **a** e **b** são **perpendiculares** ou **ortogonais** se o ângulo entre eles é $\theta = \pi/2$. O Teorema 3 nos fornece

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\pi/2) = 0$$

e reciprocamente se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, então $\cos\theta = 0$, portanto, $\theta = \pi/2$. O vetor nulo $\mathbf{0}$ é considerado perpendicular a todos os vetores. Temos, portanto, um método para determinar se dois vetores são ortogonais.

7 Dois vetores **a** e **b** são ortogonais se e somente se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

EXEMPLO 4 Mostre que $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

esses vetores são perpendiculares por $\boxed{7}$.

Como $\cos\theta > 0$ se $0 \leqslant \theta < \pi/2$ e $\cos\theta < 0$ se $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, vemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é positivo para $\theta < \pi/2$ e negativo para $\theta > \pi/2$. Podemos pensar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ mede o quão próxima está a direção de **a** da de **b**. O produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é positivo se **a** e **b** apontam para direções próximas, 0 se eles são perpendiculares, e negativo se apontam em direções próximas, mas com sentidos opostos (veja a Figura 2). No caso extremo, onde **a** e **b** têm mesma direção e sentido, temos $\theta = 0$, portanto, $\cos\theta = 1$ e

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

Se **a** e **b** têm a mesma direção, mas sentidos opostos, então $\theta = \pi$ e, assim, $\cos\theta = -1$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.

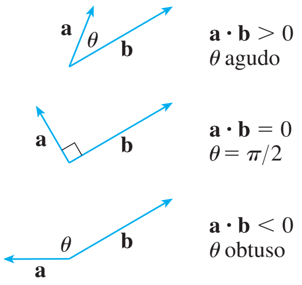


FIGURA 2

TEC *Visual 12.3A* mostra uma animação da Figura 2.

Ângulos Diretores e Cossenos Diretores

Os **ângulos diretores** de um vetor não nulo **a** são os ângulos α, β e γ (no intervalo $[0, \pi]$) que **a** faz com os eixos coordenados positivos x, y e z. (Veja a Figura 3.)

Os cossenos desses ângulos diretores, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$, são chamados **cossenos diretores** do vetor **a**. Usando o Corolário 6 com **b** substituído por **i**, obtemos

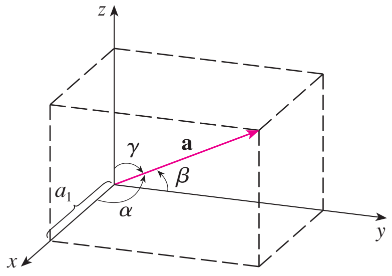


FIGURA 3

8
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

(Isso pode ser visto diretamente na Figura 3.)

Da mesma forma, temos

9
$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Elevando as expressões nas Equações 8 e 9 ao quadrado e somando, obtemos

10
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Podemos ainda usar as Equações 8 e 9 para escrever

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle |\mathbf{a}| \cos\alpha, |\mathbf{a}| \cos\beta, |\mathbf{a}| \cos\gamma \rangle$$
$$= |\mathbf{a}| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Portanto

11
$$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

que diz que os cossenos diretores de **a** são as componentes do vetor unitário de **a**.

EXEMPLO 5 Determine os ângulos diretores do vetor $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$.

SOLUÇÃO Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, as Equações 8 e 9 fornecem

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

e também

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74^\circ \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58^\circ \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ$$

Projeções

A Figura 4 mostra as representações $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ de dois vetores **a** e **b** com a mesma origem P. Se S é o pé do perpendicular a partir de R à reta contendo $\overrightarrow{PQ}$, então o vetor com representação $\overrightarrow{PS}$ é chamado **vetor projeção** de **b** sobre **a** e é denotado por $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. (Você pode pensar nele como uma sombra de **b**.)

TEC *Visual 12.3B* mostra como a Figura 4 muda quando variamos **a** e **b**.

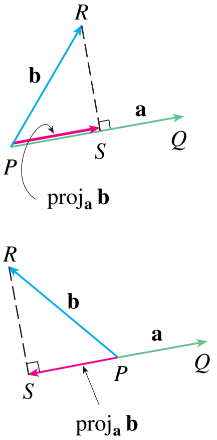

R
b
a
Q
S
P
$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$
R
b
a
Q
P
S
$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$

FIGURA 4
Projeção de vetores

A **projeção escalar** de **b** sobre **a** (também chamada **componente de b ao longo de a**) é definida como o módulo com sinal do vetor projeção, cujo valor é dado pelo número $|\mathbf{b}|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre **a** e **b**. (Veja a Figura 5.) Isso é indicado por $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. Observe que esse número é negativo se $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. A equação

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\cos\theta)$$

mostra que o produto escalar de **a** por **b** pode ser interpretado como o módulo de **a** multiplicado pela projeção escalar de **b** sobre **a**. Uma vez que

$$|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b}$$

a componente de **b** ao longo de **a** pode ser calculada tomando-se o produto escalar de **b** pelo versor de **a**. Resumindo, temos:

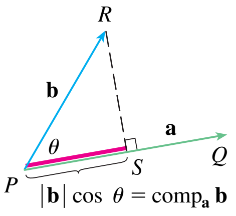

R
b
a
θ
S
Q
P
$|\mathbf{b}|\cos\theta = \text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$

FIGURA 5
Projeção escalar

Projeção escalar de **b** sobre **a**: $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

Vetor projeção de **b** sobre **a**: $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$

Observe que o vetor projeção é a projeção escalar vezes o versor de **a**.

EXEMPLO 6 Determine a projeção escalar de $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2\rangle$ sobre $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$.

SOLUÇÃO Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, a projeção escalar de **b** sobre **a** é

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

O vetor de projeção é esse escalar multiplicado pelo versor de **a**:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\,\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\,\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right\rangle$$

Um uso de projeções ocorre em física, no cálculo do trabalho. Na Seção 6.4, no Volume I, definimos o trabalho exercido por uma força constante F movendo um objeto por uma distância d como $W = Fd$, mas isso só se aplicava quando a força era exercida ao longo da reta de deslocamento do objeto. Suponha agora que a força constante seja um vetor $\mathbf{F} = \overrightarrow{PR}$ com direção diferente da reta de deslocamento do objeto, como indicado na Figura 6. Se a força move o objeto de P a Q, então o **vetor de deslocamento** é $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$. O **trabalho** realizado é definido como o produto da componente da força ao longo de **D** pela distância percorrida:

$$W = (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}|$$

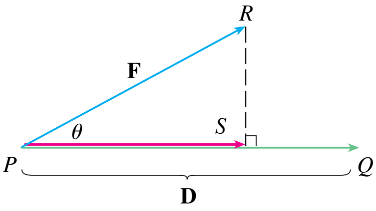


FIGURA 6

Do Teorema 3, temos

$$W = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} \tag{12}$$

Assim, o trabalho realizado por uma força constante **F** é o produto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde **D** é o vetor deslocamento.

EXEMPLO 7 Um carrinho é puxado uma distância de 100 m ao longo de um caminho horizontal por uma força constante de 70 N. A alça do carrinho é mantida a um ângulo de 35° acima da horizontal. Encontre o trabalho feito pela força.

SOLUÇÃO Se **F** e **D** são os vetores força e deslocamento, respectivamente, como mostrado na Figura 7, então o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}| \cos 35^\circ$$

$$= (70)(100) \cos 35^\circ \approx 5\,734 \text{ N·m} = 5\,734 \text{ J}$$

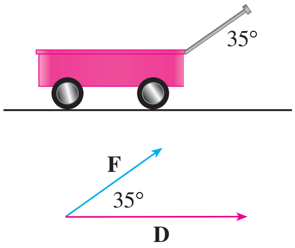


FIGURA 7

EXEMPLO 8 Uma força é dada pelo vetor $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ move uma partícula do ponto $P(2, 1, 0)$ para o ponto $Q(4, 6, 2)$. Determine o trabalho realizado.

SOLUÇÃO O vetor deslocamento é $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2 \rangle$, portanto, utilizando a Equação 12, o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 3, 4, 5 \rangle \cdot \langle 2, 5, 2 \rangle$$

$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

Se a unidade de comprimento é o metro e a força é medida em newtons, o trabalho realizado é de 36 J.

12.3 Exercícios

1. Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explique.
(a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2–10 Defina $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

2. $\mathbf{a} = \langle -2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0{,}7;\ 1{,}2 \rangle$

3. $\mathbf{a} = \langle -2, \frac{1}{3} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 12 \rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 5, -1 \rangle$

5. $\mathbf{a} = \langle 4, 1, \frac{1}{4} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -3, -8 \rangle$

6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$

7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

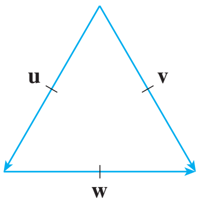
8. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 5$, e o ângulo entre **a** e **b** é $2\pi/3$.

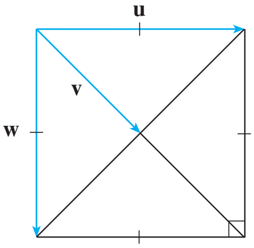
10. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, o ângulo entre **a** e **b** é 45°.

11–12 Se **u** for um vetor unitário, defina $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
(b) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

14. Um vendedor vende *a* hambúrgueres, *b* cachorros-quentes e *c* refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 pelo hambúrguer, \$ 1,50 pelo cachorro-quente e \$ 1 pelo refrigerante. Se $\mathbf{A} = \langle a, b, c \rangle$ e $\mathbf{P} = \langle 2;\ 1{,}5;\ 1 \rangle$, qual o significado do produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

15–20 Determine o ângulo entre os vetores. (Encontre inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até a precisão de um grau.)

15. $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$

16. $\mathbf{a} = \langle -2, 5 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 12 \rangle$

17. $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4, 3 \rangle$

18. $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 0 \rangle$

19. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

21–22 Determine, aproximando o valor até a precisão de um grau, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.

21. $P(2, 0)$, $Q(0, 3)$, $R(3, 4)$

22. $A(1, 0, -1)$, $B(3, -2, 0)$, $C(1, 3, 3)$

23–24 Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$
(c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$
(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

---

25. Use vetores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.

26. Determine os valores de x tais que o ângulo entre os vetores $\langle 2, 1, -1 \rangle$ e $\langle 1, x, 0 \rangle$ seja 45°.

27. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Ache dois vetores unitários que façam um ângulo de 60° com $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29–30 Encontre o ângulo agudo entre as retas.

29. $2x - y = 3$, $3x + y = 7$

30. $x + 2y = 7$, $5x - y = 2$

31–32 Encontre os ângulos agudos entre as curvas nos seus pontos de interseção. (O ângulo entre as duas curvas é o ângulo entre as suas retas tangentes no ponto de intersecção.)

31. $y = x^2$, $y = x^3$

32. $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

33–37 Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor com precisão de um grau.)

33. $\langle 2, 1, 2 \rangle$

34. $\langle 6, 3, -2 \rangle$

35. $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

36. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $\langle c, c, c \rangle$, onde $c > 0$

---

38. Se um vetor tem ângulos diretores $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/3$, determine o terceiro ângulo diretor γ.

39–44 Determine o vetor projeção e a projeção escalar de **b** sobre **a**.

39. $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6 \rangle$

40. $\mathbf{a} = \langle 1, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$

41. $\mathbf{a} = \langle 3, 6, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

42. $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -1, 4 \rangle$

43. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

44. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

---

45. Mostre que o vetor $\text{ort}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ é ortogonal a **a**. (Este vetor é chamado **projeção ortogonal** de **b** sobre **a**.)

46. Para os vetores do Exercício 40, determine $\text{ort}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ e ilustre esboçando os vetores **a**, **b**, $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ e $\text{ort}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$.

47. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine um vetor **b** tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = 2$.

48. Suponha que **a** e **b** sejam vetores não nulos.
(a) Sob quais circunstâncias $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$?
(b) Sob quais circunstâncias $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \text{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$?

49. Encontre o trabalho feito por uma força $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ que move um objeto do ponto (0, 10, 8) para o ponto (6, 12, 20) ao longo de uma reta. A distância é medida em metros e a força em newtons.

50. Um caminhão-guincho puxa um carro quebrado por uma estrada. A corrente faz um ângulo de 30° com a estrada e a tensão na corrente é 1.500 N. Quanto trabalho é feito pelo caminhão ao puxar o carro por 1 km?

51. Uma mulher exerce uma força horizontal de 140 N em um engradado quando ela o empurra para subir uma rampa de 4 m de comprimento e com um ângulo de inclinação de 20° acima da horizontal. Calcule o trabalho realizado sobre a caixa.

52. Encontre o trabalho feito por uma força de 100 N agindo na direção N50° W ao mover um objeto 5 metros para oeste.

53. Use projeção escalar para mostrar que a distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ à reta $ax + by + c = 0$ é

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

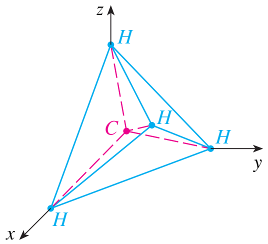
Use essa fórmula para determinar a distância do ponto $(-2, 3)$ à reta $3x - 4y + 5 = 0$.

54. Se $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, mostre que a equação $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa uma esfera e determine seu centro e raio.

55. Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

56. Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces.

57. Uma molécula de metano, CH_4, é estruturada com os quatro átomos de hidrogênio nos vértices de um tetraedro regular e o carbono no centro. O *ângulo de vínculo* é o ângulo formado pela ligação H–C–H; é o ângulo entre as retas que ligam o carbono a dois átomos de hidrogênio. Mostre que esse ângulo de vínculo é de aproximadamente 109,5°. *Dica*: Tome os vértices do tetraedro nos pontos (1, 0, 0), (0, 1,0) , (0, 0,1) e (1, 1, 1), como mostra a figura. Mostre então que o centro é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



58. Se $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$, onde **a**, **b** e **c** são vetores não nulos, mostre que **c** é a bissetriz do ângulo entre **a** e **b**.

59. Demonstre as Propriedades 2, 4 e 5 do produto escalar (Teorema 2).

60. Suponha que todos os lados de um quadrilátero tenham o mesmo comprimento e que os lados opostos sejam paralelos. Use vetores para demonstrar que as diagonais são perpendiculares.

61. Utilize o Teorema 3 para demonstrar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

62. A Desigualdade Triangular para vetores é

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(a) Dê uma interpretação geométrica para a Desigualdade Triangular.

(b) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz do Exercício 61 para provar a Desigualdade Triangular. [*Dica*: Use o fato de que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e use a Propriedade 3 do produto escalar.]

63. A Lei do Paralelogramo afirma que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\,|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(a) Dê uma interpretação geométrica da Lei do Paralelogramo.

(b) Demonstre a Lei do Paralelogramo. (Veja a sugestão do Exercício 62.)

64. Mostre que se $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ forem ortogonais, então os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devem ter o mesmo comprimento.

12.4 O Produto Vetorial

Dados dois vetores diferentes de zero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, é muito útil encontrar um vetor não nulo $\mathbf{c}$ que é perpendicular a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, como veremos na seção seguinte e nos capítulos 13 e 14. Se $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ for tal vetor, então $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ e $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, e assim

$$\boxed{1} \qquad a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$

$$\boxed{2} \qquad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$$

Para eliminarmos c_3, multiplicamos $\boxed{1}$ por b_3 e $\boxed{2}$ por a_3 e subtraímos:

$$\boxed{3} \qquad (a_1b_3 - a_3b_1)c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 = 0$$

A Equação 3 tem a forma $pc_1 + qc_2 = 0$, para a qual uma solução óbvia é $c_1 = q$ e $c_2 = -p$. Então, uma solução de $\boxed{3}$ é

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2 \qquad c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$

Substituindo estes valores em $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$, obtemos então

$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Isso significa que um vetor perpendicular a ambos **a** e **b** é

$$\langle c_1, c_2, c_3\rangle = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

O vetor resultante é chamado produto vetorial de **a** e **b** e é denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$\boxed{4}$ **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, então o **produto vetorial** de **a** e **b** é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

Observe que o **produto vetorial** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e dois vetores **a** e **b**, ao contrário do produto escalar, é um vetor, também chamado de **produto cruzado**. Observe que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ só é definido se **a** e **b** são vetores *tridimensionais*.

A fim de tornarmos a Definição 4 mais fácil de lembrar, usamos a notação de determinantes. Um **determinante de ordem 2** é definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por exemplo,
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

Um **determinante de ordem 3** pode ser definido em termos dos determinantes de segunda ordem como:

Hamilton

O produto vetorial foi inventado pelo matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que tinha criado um precursor de vetores, chamado quatérnions. Aos 5 anos de idade, Hamilton podia ler em latim, grego e hebraico. Aos 8, acrescentou o francês e o italiano, e aos 10 podia ler em árabe e sânscrito. Na idade de 21 anos, quando ainda era aluno de graduação no Trinity College, em Dublin, Hamilton foi nomeado professor de Astronomia na Universidade e Astrônomo Real da Irlanda!

5

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que cada termo do lado direito da Equação 5 envolve um número a_i da primeira linha do determinante, e a_i é multiplicado por um determinante de segunda ordem obtido do determinante do lado esquerdo pela remoção da linha e da coluna em que aparece o elemento a_i. Observe também que o sinal de menos aparece no segundo termo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1(0-4) - 2(6+5) + (-1)(12-0) = -38 \end{aligned}$$

Se reescrevermos a Definição 4 utilizando determinantes de segunda ordem e a base canônica de vetores **i**, **j** e **k**, veremos que o produto vetorial do vetor $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ por $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ é

6

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Em vista da semelhança entre as Equações 5 e 6, geralmente escrevemos

7

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Apesar de a primeira reta do determinante simbólico da Equação 7 ser constituída de vetores, se fizermos a expansão como se fosse um determinante comum usando a regra dada pela Equação 5, obteremos a Equação 6. A fórmula simbólica dada pela Equação 7 é provavelmente o modo mais fácil de lembrarmos e calcularmos o produto vetorial.

EXEMPLO 1 Se $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-15 - 28)\,\mathbf{i} - (-5 - 8)\,\mathbf{j} + (7 - 6)\,\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Mostre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para qualquer vetor **a** em V_3.

SOLUÇÃO Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2a_3 - a_3a_2)\,\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\,\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\,\mathbf{k} \\ &= 0\,\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nós construímos o produto cruzado $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de modo que ele seria perpendicular a ambos **a** e **b**. Esta é uma das propriedades mais importantes de um produto cruzado, então vamos enfatizá-la e confirmá-la no seguinte teorema.

8 Teorema O vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ quanto a $\mathbf{b}$.

DEMONSTRAÇÃO Para mostrarmos que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$, vamos efetuar seu produto escalar com segue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Um cálculo semelhante mostra que a $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Portanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ quanto a $\mathbf{b}$. ■

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são representados por segmentos de retas orientados com mesma origem (como na Figura 1), então o Teorema 8 diz que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um vetor perpendicular ao plano que passa por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. O sentido da direção de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é dado pela *regra da mão direita*: Se os dedos de sua mão direita se curvarem na direção (através de um ângulo inferior a 180º) de $\mathbf{a}$ para $\mathbf{b}$, então seu polegar está apontando na direção e sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Conhecendo o sentido e a direção do vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, resta a descrição geométrica de seu módulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Isso é dado pelo teorema seguinte.

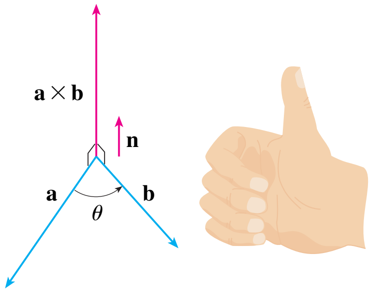


FIGURA 1
A regra da mão direita fornece a direção de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

TEC *Visual 12.4* mostra como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muda quando $\mathbf{b}$ muda.

9 Teorema Se θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (portanto $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), então

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

DEMONSTRAÇÃO Das definições de produto vetorial e norma de um vetor, temos

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta \qquad \text{(pelo Teorema 12.3.3)} \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |\mathrm{a}|^2|\mathrm{b}|^2\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Extraindo a raiz e observando que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen} \theta$ porque $\operatorname{sen} \theta \geqslant 0$ quando $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, temos

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$ ■

Caracterização geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Como um vetor fica completamente determinado se conhecermos seu módulo, direção e sentido, podemos dizer que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é o vetor perpendicular aos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, cuja orientação é determinada pela regra da mão direita, e cujo comprimento é $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$. De fato, é exatamente assim que os físicos *definem* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

10 Corolário Dois vetores diferentes de zero $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos se e somente se

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO Dois vetores não nulos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos se e somente se $\theta = 0$ ou π. Em ambos os casos sen $\theta = 0$, de modo que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ e, por conseguinte, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. ■

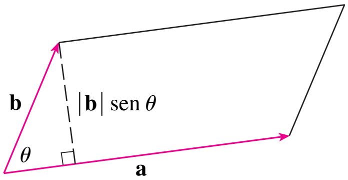


FIGURA 2

A interpretação geométrica do Teorema 9 pode ser vista examinando-se a Figura 2. Se **a** e **b** são tomados como segmentos de reta orientados com o mesmo ponto inicial, determinam um paralelogramo com base é $|\mathbf{a}|$, altura $|\mathbf{b}|\text{sen}\,\theta$ e com área

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\text{sen}\,\theta) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Então temos a seguinte forma de interpretar o módulo do produto escalar.

> O módulo do produto cruzado $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é igual à área do paralelogramo determinado por **a** e **b**.

EXEMPLO 3 Encontre um vetor perpendicular ao plano que passa através dos pontos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ e $R(1, -1, 1)$.

SOLUÇÃO O vetor $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ é perpendicular a ambos $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ e, portanto, perpendicular ao plano que passa por P, Q e R. Sabemos de (12.2.1) que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 4)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Calculando o produto cruzado desses vetores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= (-5 - 35)\,\mathbf{i} - (15 - 0)\,\mathbf{j} + (15 - 0)\,\mathbf{k} = -40\,\mathbf{i} - 15\,\mathbf{j} + 15\,\mathbf{k}$$

Logo, o vetor $\langle -40, -15, 15 \rangle$ é perpendicular ao plano dado. Qualquer múltiplo por escalar não nulo desse vetor, tal como $\langle -8, -3, 3 \rangle$, é também perpendicular ao plano.

EXEMPLO 4 Encontre a área do triângulo com vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ e $R(1, -1, 1)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 3 calculamos que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$. A área do paralelogramo com lados adjacentes PQ e PR é o comprimento do produto vetorial:

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

A área A do triângulo PQR é metade da área desse paralelogramo, ou seja, $\frac{5}{2}\sqrt{82}$.

Se aplicarmos os Teoremas 8 e 9 aos vetores da base canônica **i**, **j** e **k** usando $\theta = \pi/2$, obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Portanto, o produto vetorial não é comutativo. Também

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Enquanto

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Logo, a propriedade associativa da multiplicação também não vale obrigatoriamente aqui; ou seja, em geral, temos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Entretanto, algumas das propriedades usuais da álgebra ainda *valem* para o produto vetorial. O teorema a seguir resume as propriedades dos produtos vetoriais.

11 **Teorema** Se **a**, **b** e **c** são vetores e c é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Podemos demonstrar essas propriedades escrevendo os vetores em termos de suas componentes e usar a definição de produto vetorial. Faremos, a seguir, a demonstração da Propriedade 5 e deixaremos as outras como exercício.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 5 Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, então

12

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\
&= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}
\end{aligned}$$

Produtos Triplos

O produto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocorre na Propriedade 5 é chamado **produto misto ou produto triplo escalar dos vetores a, b e c**. Observe, a partir da Equação 12, que podemos escrever o produto escalar triplo como um determinante:

13

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

O significado geométrico do produto misto pode ser visto considerando-se o paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**. (Veja a Figura 3.) A área da base do paralelogramo é $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Se θ é o ângulo entre **a** e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, então a altura h do paralelepípedo é $h = |\mathbf{a}|\,|\cos\theta|$. (Devemos utilizar $|\cos\theta|$ em vez de $\cos\theta$ caso $\theta > \pi/2$.) Por conseguinte, o volume do paralelepípedo é

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\,|\mathbf{a}|\,|\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Assim, demonstramos a seguinte fórmula.

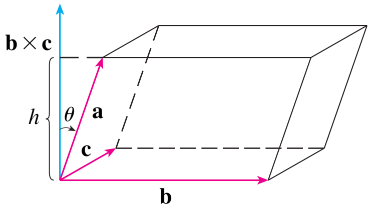


FIGURA 3

14 O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c** é o módulo do produto misto:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Se usarmos a Fórmula 14 e descobrirmoXs que o volume do paralelepípedo determinado **a**, **b** e **c** é 0, os três vetores precisam pertencer ao mesmo plano; isso quer dizer que eles são **coplanares**.

EXEMPLO 5 Utilize o produto misto para mostrar que os vetores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$ são coplanares.

SOLUÇÃO Se usarmos a Equação 13 para calcular o produto misto, teremos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} \\
&= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, por $\boxed{14}$, o volume do paralelepípedo determinado por **a**, **b** e **c** é 0. Isso significa que **a**, **b** e **c** são coplanares.

O produto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocorre na Propriedade 6 é chamado **triplo produto vetorial** de **a**, **b** e **c**. A Propriedade 6 será usada para deduzir a Primeira Lei de Kepler do movimento planetário no Capítulo 13. Sua demonstração é pedida no Exercício 50.

Torque

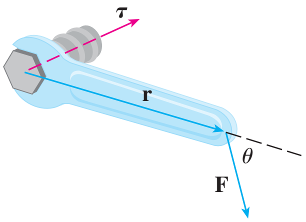


FIGURA 4

A ideia de produto vetorial aparece muito frequentemente em física. Em particular, considera-se uma força **F** agindo sobre um corpo rígido em um determinado ponto de um vetor posição **r**. (Por exemplo, ao apertarmos um parafuso aplicando uma força a uma chave de boca, como na Figura 4, iremos girar o parafuso). O **torque** $\boldsymbol{\tau}$ (em relação à origem) é definido como sendo o produto cruzado dos vetores posição e força:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e mede a tendência do corpo para girar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 9, o módulo do torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \text{ sen } \theta,$$

onde θ é o ângulo entre o vetor posição e o vetor força. Observe que a única componente da força **F** que pode causar a rotação do objeto é a perpendicular a **r**, ou seja, $|\mathbf{F}|$ sen θ. O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por **r** e **F**.

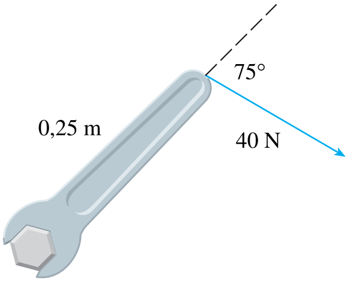


FIGURA 5

EXEMPLO 6 Um parafuso é apertado aplicando-se uma força de 40 N a uma chave de boca de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em relação ao centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \text{ sen } 75^0 &= (0{,}25)\,(40) \text{ sen } 75^0 \\
&= 10 \text{ sen } 75^{\text{o}} \approx 9{,}66 \text{ N}\cdot\text{m}
\end{aligned}
$$

Se o parafuso tem a rosca para a direita, o vetor torque é

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\mathbf{n} \approx 9{,}66\ \mathbf{n}$$

onde **n** é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido para dentro do papel.

12.4 Exercícios

1–7 Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal a **a** e **b**.

1. $\mathbf{a} = \langle 6, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 8, 0 \rangle$

2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 4, 6 \rangle$

3. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

4. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle t, 1, 1/t \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t^2, t^2, 1 \rangle$

8. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce **a**, **b** e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.

9–12 Encontre o vetor, sem usar determinantes, mas usando propriedades do produto vetorial.

9. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$

10. $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

11. $(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$

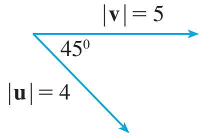
12. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j})$

13. Diga se cada expressão a seguir tem sentido. Se não, explique por quê. Se tiver, diga se é um vetor ou um escalar.

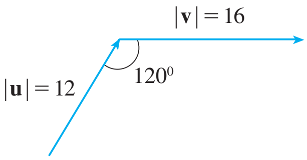
(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$
(f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

14–15 Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e determine se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem o sentido de entrar ou sair da página.

14.

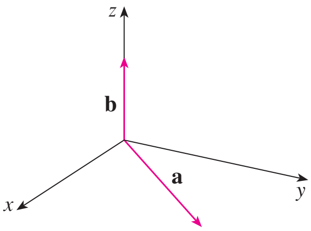


15.



16. A figura mostra um vetor **a** no plano xy e um vetor **b** na direção de **k**. Os seus comprimentos são $|\mathbf{a}| = 3$ e $|\mathbf{b}| = 2$.

(a) Encontre $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
(a) Utilize a regra da mão direita para decidir se as componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são positivas, negativas ou 0.



17. Se $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 4, 2, 1 \rangle$, encontre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

18. Se $\mathbf{a} = \langle 1, 0, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

19. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a $\langle 3, 2, 1 \rangle$ e $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

20. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

21. Mostre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para qualquer vetor **a** em V_3.

22. Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todo vetor **a** e **b** em V_3.

23. Demonstre a Propriedade 1 do Teorema 11.

24. Demonstre a Propriedade 2 do Teorema 11.

25. Demonstre a Propriedade 3 do Teorema 11.

26. Demonstre a Propriedade 4 do Teorema 11.

27. Encontre a área do paralelogramo com vértices $A(-2,1)$, $B(0, 4)$, $C(4, 2)$ e $D(2, -1)$.

28. Encontre a área do paralelogramo com vértices $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$ e $N(3, 7, 3)$.

29–32 (a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R e (b) calcule a área do triângulo PQR.

29. $P(1, 0, 1)$, $Q(-2, 1, 3)$, $R(4, 2, 5)$
30. $P(0, 0, -3)$, $Q(4, 2, 0)$, $R(3, 3, 1)$
31. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$
32. $P(-1, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$, $R(4, 3, -1)$

33–34 Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**.

33. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

34. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

35–36 Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS.

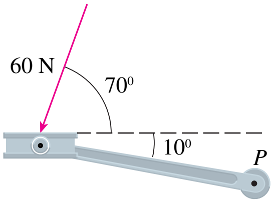
35. $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, 3, 2)$, $R(1, 4, -1)$, $S(3, 6, 1)$

36. $P(3, 0, 1)$, $Q(-1, 2, 5)$, $R(5, 1, -1)$, $S(0, 4, 2)$

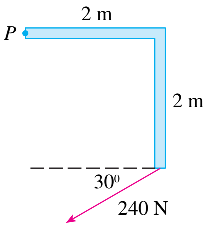
37. Utilize o produto misto para mostrar que os vetores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ são coplanares.

38. Use o produto misto para determinar se os pontos $A(1, 3, 2)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$ e $D(3, 6, -4)$ pertencem ao mesmo plano.

39. O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em relação a P.



40. Determine a intensidade do torque em relação a P se for aplicada uma força de 240 N, como mostrado.



1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

41. Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo y aperta um parafuso colocado na origem. Uma força é aplicada no final do cabo da chave com direção dada por $\langle 0, 3, -4\rangle$. Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 N·m.

42. Seja $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ e seja $\mathbf{u}$ um vetor com comprimento 3 com início na origem e que gira no plano xy. Determine o máximo e o mínimo valor possível para $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Qual a direção e o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

43. Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{3}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle 1, 2, 2\rangle$, defina o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

44. (a) Defina todos os vetores $\mathbf{v}$ tal que

$$\langle 1, 2, 1\rangle \times \mathbf{v} = \langle 3, 1, -5\rangle$$

(b) Explique por que não há nenhum vetor $\mathbf{v}$ tal que

$$\langle 1, 2, 1\rangle \times \mathbf{v} = \langle 3, 1, 5\rangle$$

45. (a) Seja P um ponto fora da reta L que passa através dos pontos Q e R. Mostre que a distância d a partir do ponto P para a reta L é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use a fórmula da parte (a) para encontrar a distância o ponto $P(1, 1, 1)$ à reta que passa por $Q\ (0, 6, 8)$ e $R\ (-1, 4, 7)$.

46. (a) Seja P um ponto fora do plano que passa pelos pontos Q, R e S. Mostre que a distância d de P para o plano é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use a fórmula da parte (a) para encontrar a distância do ponto $P(2, 1, 4)$ em relação ao plano que passa pelos pontos $Q(1, 0, 0)$, $R(0, 2, 0)$ e $S(0, 0, 3)$.

47. Mostre que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2\, |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

48. Se $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, mostre que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

49. Demonstre que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

50. Demonstre a Propriedade 6 do Teorema 11, isto é,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

51. Utilize o Exercício 50 para demonstrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

52. Demonstre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

53. Suponha que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

(a) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(b) Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(c) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

54. Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores não coplanares, defina

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

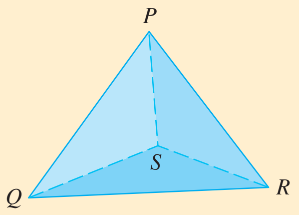
(Esses vetores aparecem no estudo de cristalografia. Vetores da forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$, em que cada n_i é um número inteiro, formam um reticulado para um cristal. Vetores escritos de forma semelhante, em termos de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_3$ formam o reticulado recíproco).

(a) Mostre que $\mathbf{k}_i$ é perpendicular a $\mathbf{v}_j$ se $i \neq j$.

(b) Mostre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

(c) Mostre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \dfrac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$.

PROJETO DE DESCOBERTA A GEOMETRIA DE UM TETRAEDRO



Um tetraedro é um sólido com quatro vértices, P, Q, R e S, e quatro faces triangulares, como mostrado na figura.

1. Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ vetores de comprimentos iguais à área das faces opostas aos vértices P, Q, R e S, respectivamente, e direções perpendiculares às respectivas faces e apontando para fora do tetraedro. Mostre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

2. O volume V de um tetraedro é um terço da distância de um vértice à face oposta vezes a área dessa face.

(a) Determine uma fórmula para o volume do tetraedro em termos das coordenadas de seus vértices P, Q, R e S.

(b) Encontre o volume do tetraedro cujos vértices são $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(1, 1, 2)$ e $S(3, -1, 2)$.

3. Suponhamos que o tetraedro na figura tenha um vértice trirretangular S. (Isto significa que os três ângulos de S são todos ângulos retos.) Sejam A, B e C as áreas das três faces que encontram o vértice S, e seja D a área da face oposta PQR. Utilizando o resultado do Problema 1, mostre que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(Essa é uma versão tridimensional do Teorema de Pitágoras.)

12.5 Equações de Retas e Planos

Uma reta no plano xy é determinada quando um ponto e uma direção (inclinação ou coeficiente angular da reta) são dados. A equação da reta pode ser então escrita utilizando-se a forma ponto-inclinação.

Da mesma forma, uma reta L no espaço tridimensional é determinada quando conhecemos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em L e a direção de L. Em três dimensões, a direção de uma reta é convenientemente descrita por um vetor. Seja $\mathbf{v}$ um vetor paralelo a L. Seja $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário sobre L e sejam $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}$ os vetores posição de P_0 e P (isto é, eles têm representantes $\overrightarrow{OP_0}$ e $\overrightarrow{OP}$). Se $\mathbf{a}$ é o vetor com representante $\overrightarrow{P_0P}$, como na Figura 1, então pela Regra do Triângulo para soma dos vetores temos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Mas, uma vez que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos, há um escalar t de tal modo que $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$. Assim,

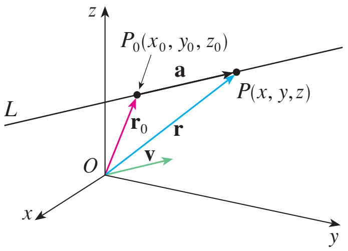


FIGURA 1

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}}$$

que é a **equação vetorial** de L. Cada valor do **parâmetro** t fornece o vetor posição $\mathbf{r}$ de um ponto em L. Em outras palavras, como t varia, a reta é traçada pela ponta do vetor $\mathbf{r}$. Como a Figura 2 indica, os valores positivos de t correspondem a pontos em L que se encontram de um lado de P_0, enquanto os valores negativos de t correspondem a pontos que se encontram do outro lado de P_0.

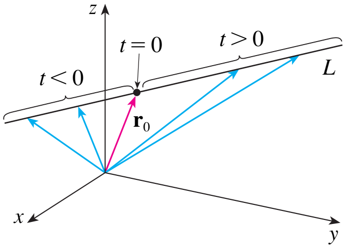


FIGURA 2

Se o vetor $\mathbf{v}$, que fornece a direção da reta L, é escrito sob a forma de componentes $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, temos que $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc \rangle$. Também podemos escrever $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, de modo a equação do vetor $\boxed{1}$ se torna

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Dois vetores iguais têm as componentes correspondentes iguais. Assim, temos três equações escalares:

$$\boxed{2} \qquad \boxed{x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct}$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Essas equações são chamadas **equações paramétricas** da reta L, que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. Cada valor do parâmetro t fornece um ponto (x, y, z) em L.

EXEMPLO 1

(a) Determine as equações vetorial e paramétrica de uma reta que passa pelo ponto (5, 1, 3) e é paralela ao vetor $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
(b) Determine outros dois pontos na reta.

A Figura 3 mostra a reta L do Exemplo 1 e sua relação com o ponto dado e o vetor direção.

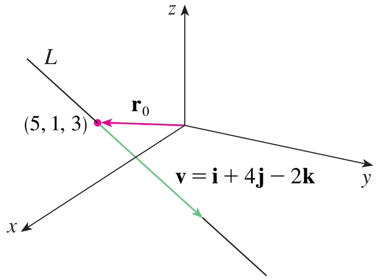


FIGURA 3

SOLUÇÃO

(a) Aqui $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3 \rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, portanto, a equação do vetor $\boxed{1}$ se torna

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

ou

$$\mathbf{r} = (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\,\mathbf{j} + (3 - 2t)\,\mathbf{k}$$

As equações paramétricas são

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

(b) Escolhendo o valor do parâmetro $t = 1$ temos $x = 6$, $y = 5$ e $z = 1$, assim (6, 5, 1) é um ponto sobre a reta. Da mesma forma, $t = -1$ corresponde ao ponto (4, −3, 5). ■

A equação vetorial e as equações paramétricas de uma reta não são únicas. Se trocarmos o ponto ou o parâmetro ou escolhermos um vetor paralelo diferente, a equação muda. Por exemplo, se, em vez do ponto (5, 1, 3) escolhermos o ponto (6, 5, 1) no Exemplo 1, as equações paramétricas da reta se tornam

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$

Ou, se mantivermos o ponto (5, 1, 3), mas escolhermos o vetor paralelo $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, chegaremos às equações

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

Em geral, se um vetor $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ é usado para descrever a direção de uma reta L, então os números a, b e c são as **componentes do vetor diretor** de L. Uma vez que qualquer vetor paralelo $\mathbf{v}$ também pode ser usado, vemos que quaisquer três números proporcionais a a, b e c poderiam também ser usados como componentes do vetor diretor de L.

Outra maneira de descrever uma reta L é eliminar o parâmetro t das Equações 2. Se nenhum dos números a, b e c for 0, podemos isolar t em cada uma das equações e igualar os resultados, obtendo

$$\boxed{3} \qquad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Essas equações são chamadas **equações simétricas** de L. Observe que os números a, b e c que aparecem nos denominadores das Equações 3 são as componentes do vetor diretor de L, isto é, as componentes de um vetor paralelo ao vetor diretor de L. Se a, b ou c é 0, ainda podemos eliminar t. Por exemplo, se $a = 0$, podemos escrever as equações de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Isso indica que a reta L pertence ao plano vertical $x = x_0$.

A Figura 4 mostra a reta L do Exemplo 2 e o ponto P de intersecção com o plano xy.

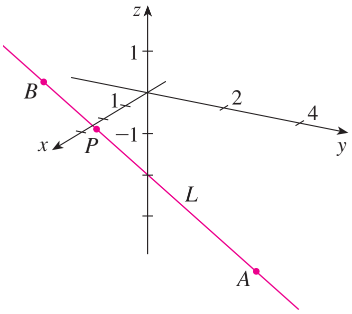


FIGURA 4

EXEMPLO 2

(a) Determine as equações paramétricas e simétricas da reta que passa pelos pontos $A(2, 4, -3)$ e $B(3, -1, 1)$.

(b) Qual a intersecção dessa reta com o plano xy?

SOLUÇÃO

(a) Não nos foi dado de forma explícita o vetor paralelo à reta, mas observe que o vetor $\mathbf{v}$ com representação $\overrightarrow{AB}$ é paralelo à reta e

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

Assim, os números diretores são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$. Considerando o ponto $(2, 4, -3)$ como P_0, vemos que as equações paramétricas $\boxed{2}$ são

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

e as equações simétricas $\boxed{3}$ são

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

(b) A reta intercepta o plano xy quando $z = 0$; então, tomando $z = 0$ nas equações simétricas, obtemos:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

o que fornece $x = \frac{11}{4}$ e $y = \frac{1}{4}$, portanto a reta intercepta o plano xy no ponto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

Em geral, o procedimento do Exemplo 2 mostra que as componentes do vetor diretor da reta L que passa pelos ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ são $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ e $z_1 - z_0$ e as equações simétricas de L são

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Frequentemente precisamos de uma descrição, não de uma reta inteira, mas apenas de um segmento de reta. Como, por exemplo, poderíamos descrever o segmento de reta AB no

Exemplo 2? Se colocarmos $t = 0$ nas equações paramétricas no Exemplo 2(a), temos o ponto $(2, 4, -3)$ e se colocarmos $t = 1$, temos $(3, -1, 1)$. Assim, o segmento de reta é descrito pelas equações paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ou pela equação vetorial correspondente

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t, 4 - 5t, -3 + 4t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

De um modo geral, sabemos a partir da Equação 1 que a equação vetorial de uma reta partindo (do fim) de vetor $\mathbf{r}_0$ na direção de um vetor $\mathbf{v}$ é $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Se a reta também passa por (a ponta) $\mathbf{r}_1$, então podemos tomar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ e então sua equação vetorial é

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

O segmento de reta de $\mathbf{r}_0$ até $\mathbf{r}_1$ é dado pelo intervalo do parâmetro $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4 O segmento de reta de $\mathbf{r}_0$ até $\mathbf{r}_1$ é dado pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

EXEMPLO 3 Mostre que as retas L_1 e L_2 com as equações paramétricas dadas por

$$x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

são **retas reversas**, isto é, são retas que não se interceptam e não são paralelas (não pertencendo, portanto, a um mesmo plano).

SOLUÇÃO As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores $\langle 1, 3, -1 \rangle$ e $\langle 2, 1, 4 \rangle$ não são paralelos. (As componentes não são proporcionais.) Se L_1 e L_2 tivessem um ponto de intersecção, haveria valores de t e s tal que

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2s \\ -2 + 3t &= 3 + s \\ 4 - t &= -3 + 4s \end{aligned}$$

Mas, se resolvermos as primeiras duas equações, obteremos $t = \frac{11}{5}$ e $s = \frac{8}{5}$, que não satisfazem a terceira equação. Não existem valores para t e s que satisfaçam as três equações, portanto L_1 e L_2 não se interceptam. Desse modo, L_1 e L_2 são retas reversas.

As retas L_1 e L_2 do Exemplo 3 são reversas e estão na Figura 5.

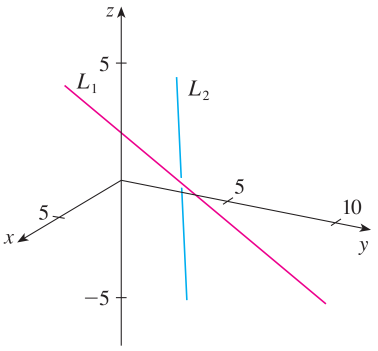


FIGURA 5

Planos

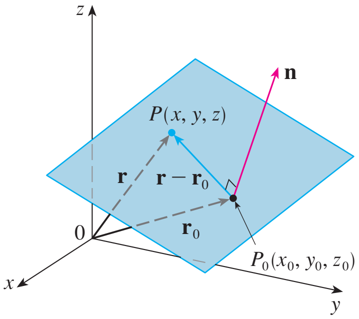


FIGURA 6

Enquanto as retas no espaço são facilmente determinadas por um ponto e um vetor diretor, um plano é um pouco mais complicado de descrever. Um único vetor paralelo ao plano desejado não é suficiente para fixar a "direção" do plano, mas um vetor que seja perpendicular a esse plano define de modo completo sua "direção". Então, um plano no espaço fica determinado se conhecermos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ no plano e um vetor $\mathbf{n}$ que seja ortogonal ao plano. Esse vetor ortogonal $\mathbf{n}$ é chamado **vetor normal**. Seja $P(x, y, z)$ ser um ponto arbitrário no plano e sejam $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}$ os vetores posição P_0 e P. Então o vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ é representado por $\overrightarrow{P_0P}$. (Veja a Figura 6.) O vetor normal $\mathbf{n}$ é ortogonal a todo vetor do plano. Em particular, $\mathbf{n}$ é ortogonal a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ e assim temos

5 $$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0}$$

que pode ser reescrito como

6 $$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}$$

Tanto a Equação 5 quanto a Equação 6 são chamadas **equação vetorial do plano**.

Para obtermos uma equação escalar para o plano, escrevemos $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Então a equação $\boxed{5}$ se transforma em

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

ou

$$\boxed{7} \qquad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

A Equação 7 é a **equação escalar do plano que passa por** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **com vetor normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$.

EXEMPLO 4 Determine uma equação do plano que passa pelo ponto $(2, 4, -1)$ e tem como vetor normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4\rangle$. Encontre também suas intersecções com os eixos coordenados e faça um esboço do plano.

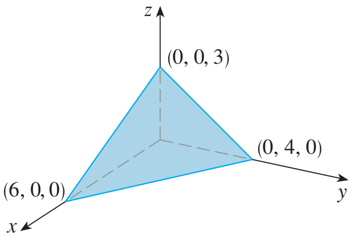


FIGURA 7

SOLUÇÃO Tomando $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ e $z_0 = -1$ na Equação 7, vemos que uma equação do plano é

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

ou

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Para encontrarmos a intersecção com o eixo x, colocamos $y = z = 0$ nesta equação e obtemos $x = 6$. Da mesma forma, a intersecção com o plano y é 4 e a intersecção com o plano z é 3. Isso nos permite esboçar a porção do plano pertencente ao primeiro octante (veja a Figura 7). ■

Agrupando os termos na Equação 7 como fizemos no Exemplo 4, podemos reescrever a equação do plano como

$$\boxed{8} \qquad \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. A Equação 8 é chamada **equação linear** em x, y e z. Reciprocamente, pode ser mostrado que, se a, b e c não são todos nulos, a equação linear $\boxed{8}$ representa um plano cujo vetor normal é o vetor $\langle a, b, c\rangle$. (Veja o Exercício 81.)

A Figura 8 mostra a parte do plano do Exemplo 5 delimitada pelo triângulo *PQR*.

EXEMPLO 5 Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ e $R(5, 2, 0)$.

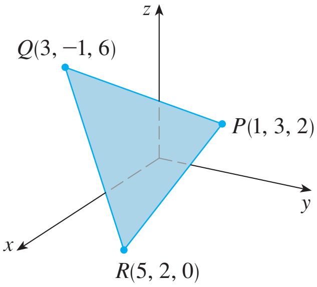


FIGURA 8

SOLUÇÃO Os vetores **a** e **b** correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4\rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2\rangle$$

Como tanto **a** quanto **b** pertencem ao plano, seu produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal ao plano e pode ser tomado como o vetor normal. Assim,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$$

Com o ponto $P(1, 3, 2)$ e o vetor normal **n**, uma equação do plano é

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

ou

$$6x + 10y + 7z = 50$$

■

EXEMPLO 6 Determine o ponto no qual a reta com equações paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$ intercepta o plano $4x + 5y - 2z = 18$.

SOLUÇÃO Substituímos as expressões x, y e z das equações paramétricas na equação do plano:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

Isto simplifica a $-10t = 20$, portanto, $t = -2$. Por conseguinte, o ponto de interseção ocorre quando o valor do parâmetro é $t = -2$. Então $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$,

$z = 5 - 2 = 3$ e, portanto, o ponto de interseção é $(-4, 8, 3)$.

Dois planos são **paralelos** se seus vetores normais são paralelos. Por exemplo, os planos $x + 2y - 3z = 4$ e $2x + 4y - 6z = 3$ são paralelos porque os seus vetores normais são $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3\rangle$ e $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6\rangle$ e $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Se dois planos não são paralelos, eles se interceptam em uma reta, e o ângulo entre os dois plano é definido como o ângulo entre os vetores normais aos planos (veja o ângulo θ na Figura 9).

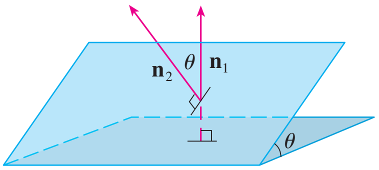


FIGURA 9

EXEMPLO 7

(a) Determine o ângulo entre os planos $x + y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 1$.

(b) Determine as equações simétricas da reta intersecção L desses dois planos.

A Figura 10 mostra os planos do Exemplo 7 e a reta de intersecção L.

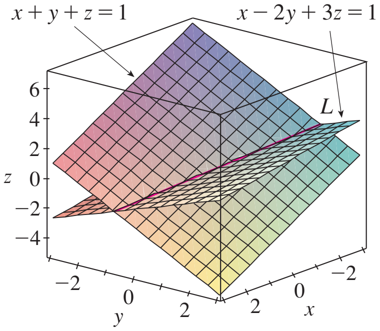


FIGURA 10

SOLUÇÃO

(a) Os vetores normais a esses planos são

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3\rangle$$

Portanto, se θ é o ângulo entre os dois planos, o Corolário 12.3.6 fornece

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1 + 1 + 1}\,\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72°$$

(b) Primeiro precisamos encontrar um ponto em L. Por exemplo, podemos achar o ponto onde a reta intercepta o plano xy tomando $z = 0$ na equação dos dois planos. Isso fornece as equações $x + y = 1$ e $x - 2y = 1$, cuja solução é $x = 1$, $y = 0$. Portanto, o ponto $(1, 0, 0)$ encontra-se em L.

Observe que, como L pertence a ambos os planos, é perpendicular ao vetor normal de ambos os planos. Então, um vetor $\mathbf{v}$ paralelo a L é dado pelo produto vetorial

Outro modo de determinar a reta de intersecção é resolver a equação do plano para duas variáveis em função da terceira, que será tomada como parâmetro.

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

e assim as equações simétricas de L podem ser escritas como

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

OBSERVAÇÃO Como uma equação linear nas variáveis x, y e z representa um plano e dois planos não paralelos se interceptam em uma reta, segue que duas equações lineares podem representar uma reta. Os pontos (x, y, z) que satisfazem a ambas as equações $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ pertencem a ambos os planos, e assim esse par de equações lineares representa a reta interseção dos planos (se eles não forem paralelos). Por exemplo, no Exemplo 7, a reta de L foi dada como a reta de intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 1$. As equações simétricas que encontramos para L podem ser escritas como

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

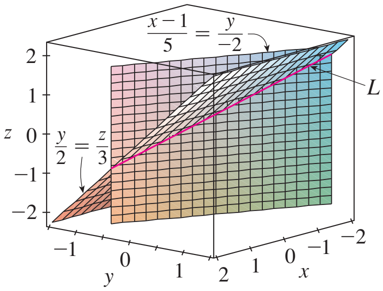


FIGURA 11

A Figura 11 mostra como a reta L do Exemplo 7 pode também ser vista como a intersecção dos planos obtidos a partir de suas equações simétricas.

que é um par de equações lineares. Elas descrevem L como a reta intersecção dos planos $(x - 1)/5 = y/(-2)$ e $y/(-2) = z/(-3)$. (Veja a Figura 11.)

Em geral, quando escrevemos as equações de uma reta na forma simétrica

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

podemos pensar na reta como a intersecção de dois planos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \qquad \text{e} \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

EXEMPLO 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

SOLUÇÃO Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do plano dado e seja $\mathbf{b}$ o vetor correspondente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Então,

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

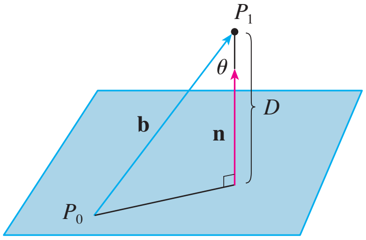


FIGURA 12

Da Figura 12 podemos ver que a distância D de P_1 até o plano é igual ao valor absoluto da projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre o vetor normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. (Veja a Seção 12.3.) Assim,

$$\begin{aligned} D &= |\operatorname{comp}_{\mathbf{n}} \mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Uma vez que P_0 se situa no plano, as suas coordenadas satisfazem a equação do plano e por isso temos $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Assim, a fórmula para D pode ser escrita como

$$\boxed{9} \qquad \boxed{D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

EXEMPLO 9 Determine a distância entre os dois planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ e $5x + y - z = 1$.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que os dois planos são paralelos, pois seus vetores normais $\langle 10, 2, -2 \rangle$ e $\langle 5, 1, -1 \rangle$ são vetores paralelos. Para achar a distância D entre os planos, escolhemos um ponto qualquer em um plano e calculamos sua distância ao outro plano. Em particular, se tomarmos $y = z = 0$ na equação do primeiro plano, obteremos $10x = 5$ e, portanto, $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ é um ponto desse plano. Pela Fórmula 9, a distância entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e o plano $5x + y - z - 1 = 0$ é

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Assim, a distância entre os planos é $\sqrt{3}/6$.

EXEMPLO 10 No Exemplo 3 mostramos que as retas

$$\begin{array}{llll} L_1: & x = 1 + t & y = -2 + 3t & z = 4 - t \\ L_2: & x = 2s & y = 3 + s & z = -3 + 4s \end{array}$$

são retas reversas. Determine a distância entre elas.

SOLUÇÃO Como as duas retas L_1 e L_2 são reversas, elas podem ser vistas como pertencentes aos planos paralelos P_1 e P_2. A distância entre L_1 e L_2 é igual à distância entre P_1 e P_2, que pode ser calculada como no Exemplo 9. O vetor normal a ambos os planos precisa ser ortogonal aos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1 \rangle$ (vetor diretor de L_1) e $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4 \rangle$ (vetor diretor de L_2). Assim, o vetor normal é dado por

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se colocarmos $s = 0$ nas equações de L_2, temos o ponto $(0, 3, -3)$ em L_2 e então a equação de P_2 é

$$13(x - 0) - 6(y - 3) - 5(z + 3) = 0 \qquad \text{ou} \qquad 13x - 6y - 5z + 3 = 0$$

Tomando agora $t = 0$ na equação de L_1, obtemos o ponto $(1, -2, 4)$ em P_1. Assim, a distância entre L_1 e L_2 é a mesma que a distância a partir de $(1, -2, 4)$ até $13x - 6y - 5z + 3 = 0$. Pela Fórmula 9, esta distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}53$$

12.5 Exercícios

1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
(a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
(b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
(c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
(d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
(e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
(f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
(g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
(h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
(i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
(j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
(k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

2–5 Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

2. A reta que passa pelo ponto $(6, -5, 2)$ e é paralela ao vetor $\langle 1, 3, -\frac{2}{3} \rangle$

3. A reta que passa pelo ponto $(2, 2{,}4, 3{,}5)$ e é paralela ao vetor $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

4. A reta que passa pelo ponto $(0, 14, -10)$ e é paralela à reta $x = -1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, $z = 3 + 9t$

5. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6–12 Determine as equações paramétricas e as equações simétricas para a reta.

6. A reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$

7. A reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(2, 1, -3)$

8. A reta que passa pelos pontos $(1{,}0, 2{,}4, 4{,}6)$ e $(2{,}6, 1{,}2, 0{,}3)$

9. A reta que passa pelos pontos $(-8, 1, 4)$ e $(3, -2, 4)$

10. A reta que passa por $(2, 1, 0)$ e é perpendicular tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ quanto $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. A reta que passa por $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12. A reta de intersecção dos planos $x + 2y + 3z = 1$ e $x - y + z = 1$

13. A reta que passa por $(-4, -6, 1)$ e $(-2, 0\ -3)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(10, 18, 4)$ e $(5, 3, 14)$?

14. A reta que passa por $(-2, 4, 0)$ e $(1, 1, 1)$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(2, 3, 4)$ e $(3, -1, -8)$?

15. (a) Encontre equações simétricas para a reta que passa pelo ponto $(1, -5, 6)$ e é paralela ao vetor $\langle -1, 2, -3 \rangle$.
(b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Encontre as equações paramétricas da reta que passa por $(2, 4, 6)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 7$.
(b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação vetorial para o segmento de reta de $(2, -1, 4)$ a $(4, 6, 1)$.

18. Encontre as equações paramétricas para o segmento de reta de $(10, 3, 1)$ a $(5, 6, -3)$.

19–22 Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

19. L_1: $x = 3 + 2t, \quad y = 4 - t, \quad z = 1 + 3t$
L_2: $x = 1 + 4s, \quad y = 3 - 2s, \quad z = 4 + 5s$

20. L_1: $x = 5 - 12t, \quad y = 3 + 9s, \quad z = 1 - 3t$
L_2: $x = 3 + 8s, \quad y = -6s, \quad z = 7 + 2s$

21. L_1: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z - 1}{-3}$
L_2: $\dfrac{x - 3}{1} = \dfrac{y + 4}{3} = \dfrac{z - 2}{-7}$

22. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z - 2}{3}$
L_2: $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z}{7}$

23–40 Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. Plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

25. O plano que passa pelo ponto $(-1, \frac{1}{2}, 3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto $(2, 0, 1)$ e é perpendicular a reta $x = 3t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 4t$

27. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, -1)$ e é paralelo ao plano $5x - y - z = 6$

28. O plano que passa pelo ponto $(2, 4, 6)$ e é paralelo ao plano $z = x + y$

29. O plano que passa pelos pontos $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e é paralelo ao plano $x + y + z = 0$

30. O plano que contém a reta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ e é paralelo ao plano $5x + 2y + z = 1$

31. O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, e $(1, 1, 0)$

32. O plano que passa pela origem e pelos pontos $(2, -4, 6)$ e $(5, 1, 3)$

33. O plano que passa pelos pontos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$, e $(-1, -2, -3)$

34. O plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

35. O plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

36. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta com equações simétricas $x = 2y = 3z$

37. O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contém a reta de interseção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

38. O plano que passa pelos pontos $(0, -2, 5)$ e $(-1, 3, 1)$ e é perpendicular ao plano $2z = 5x + 4y$

39. O plano que passa pelo ponto $(1, 5, 1)$ e é perpendicular aos planos $2x + y - 2z = 2$ e $x + 3z = 4$

40. O plano que passa pela reta de intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

41-44 Use as intersecções com os eixos coordenados como uma ajuda para esboçar o plano.

41. $2x + 5y + z = 10$

42. $3x + y + 2z = 6$

43. $6x - 3y + 4z = 6$

44. $6x + 5y - 3z = 15$

45-47 Determine o ponto no qual a reta intercepta o plano dado.

45. $x = 3 - t, \quad y = 2 + t, \quad z = 5t; \quad x - y + 2z = 9$

46. $x = 1 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 2 - 3t; \quad x + 2y - z + 1 = 0$

47. $x = y - 1 = 2z; \quad 4x - y + 3z = 8$

---

48. Em que ponto a reta que passa por $(1, 0, 1)$ e $(4, -2, 2)$ intercepta o plano $x + y + z = 6$?

49. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

50. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

51-56 Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

51. $x + 4y - 3z = 1, \qquad -3x + 6y + 7z = 0$

52. $2z = 4y - x, \qquad 3x - 12y + 6z = 1$

53. $x + y + z = 1, \qquad x - y + z = 1$

54. $2x - 3y + 4z = 5, \qquad x + 6y + 4z = 3$

55. $x = 4y - 2z, \qquad 8y = 1 + 2x + 4z$

56. $x + 2y + 2z = 1, \qquad 2x - y + 2z = 1$

57-58 (a) Determine as equações simétricas da reta intersecção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

57. $x + y + z = 1, \qquad x + 2y + 2z = 1$

58. $3x - 2y + z = 1, \qquad 2x + y - 3z = 3$

59-60 Encontre equações simétricas para a reta de intersecção dos planos.

59. $5x - 2y - 2z = 1, \qquad 4x + y + z = 6$

60. $z = 2x - y - 5, \qquad z = 4x + 3y - 5$

---

61. Determine uma equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(1, 0, -2)$ e $(3, 4, 0)$.

62. Determine uma equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(2, 5, 5)$ e $(-6, 3, 1)$.

63. Determine a equação do plano que x intercepta o eixo x em a, *o eixo* y *em b* e o eixo z em c.

64. (a) Determine o ponto dado pela intersecção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

65. Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é paralela ao plano $x + y + z = 2$ e é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

66. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$ e intercepta essa reta.

67. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

P_1: $3x + 6y - 3z = 6$ $\qquad$ P_2: $4x - 12y + 8z = 5$
P_3: $9y = 1 + 3x + 6z$ $\qquad$ P_4: $z = x + 2y - 2$

68. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

L_1: $x = 1 + 6t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = 12t + 5$
L_2: $x = 1 + 2t, \quad y = t, \quad z = 1 + 4t$
L_3: $2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$
L_4: $\mathbf{r} = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$

69-70 Utilize a fórmula que aparece no Exercício 45 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

69. (4, 1, −2); $x = 1 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 - 3t$

70. (0, 1, 3); $x = 2t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 3 + t$

71-72 Determine a distância do ponto ao plano dado.

71. (1, −2, 4), $3x + 2y + 6z = 5$

72. (−6, 3, 5), $x - 2y - 4z = 8$

73-74 Determine a distância entre os planos paralelos dados.

73. $2x - 3y + z = 4, \quad 4x - 6y + 2z = 3$

74. $6z = 4y - 2x, \quad 9z = 1 - 3x + 6y$

75. Mostre que a distância entre os planos paralelos

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \text{ e } ax + by + cz + d_2 = 0 \text{ é}$$

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

76. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e que distam duas unidades dele.

77. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

78. Encontre a distância entre as retas de inclinação com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

79. Seja L_1 a reta que passa pela origem e pelo ponto (2, 0, −1). Seja L_2 a reta que passa pela origem e pelo ponto (1, −1, 1) e (4, 1, 3). Encontre a distância entre L_1 e L_2.

80. Seja L_1 a reta que passa pela origem e pelo ponto (1, 2, 6) e (2, 4, 8). Seja L_2 a reta de interseção dos planos π_1 e π_2, onde π_1 é o plano $x - y + 2z + 1 = 0$ e π_2 é o plano que passa pelos pontos (3, 2, −1), (0, 0, 1) e (1, 2, 1). Encontre a distância entre L_1 e L_2.

81. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c \rangle$ é o vetor normal ao plano.

Dica: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

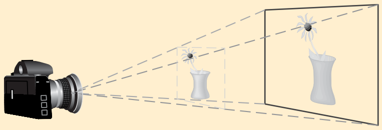
$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

82. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$ (b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta = 1$

PROJETO DE LABORATÓRIO COLOCANDO O 3D EM PERSPECTIVA



Programadores de computação gráfica enfrentam o mesmo desafio que os grandes pintores do passado: como representar uma cena tridimensional como uma imagem plana em um plano bidimensional (a tela ou um monitor). Para criar a ilusão de perspectiva, na qual os objetos próximos parecem maiores que aqueles mais distantes, os objetos tridimensionais na memória do computador são projetados em uma tela retangular a partir do ponto de visão onde o olho ou a câmera estão localizados. O volume de visão – a porção do espaço que estará visível – é a região contida nos quatro planos que passam pelo ponto de visão e por uma aresta da tela retangular. Se os objetos na cena se estendem além dos quatro planos, eles são truncados antes que os dados sejam enviados para a tela. Esses planos são, portanto, chamados *plano cortantes*.

1. Suponha que a tela seja representada por um retângulo no plano yz com vértices (0, ±400, 0) e (0, ±400, 600), e a câmera esteja localizada em (1 000, 0, 0). Uma reta L na cena passa pelos pontos (230, −285, 102) e (860, 105, 264). Em quais pontos L será contada pelos planos cortantes?

2. Se o segmento de reta cortado for projetado na tela, identifique o segmento de reta resultante.

3. Use equações paramétricas para traçar as arestas da tela, o segmento de reta cortado e sua projeção na tela. A seguir, adicione retas que conectem o ponto de visão a cada extremidade dos segmentos cortados para verificar que a projeção está correta.

4. Um retângulo com vértices (621, −147, 206), (563, 31, 242), (657, −111, 86) e (599, 67, 122) é adicionado à cena. A reta L intercepta esse retângulo. Para fazer o retângulo parecer opaco, um programador pode usar *retas escondidas*, as quais removem partes do objeto que estão atrás de outros objetos. Identifique a parte de L que deve ser removida.

12.6 Cilindros e Superfícies Quádricas

Já olhamos para dois tipos especiais de superfícies – planos (Seção 12.5) e esferas (Seção 12.1). Aqui, estudaremos outros dois tipos de superfícies – cilindros e superfícies quádricas.

Para esboçar o gráfico dessas superfícies é útil determinar a intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Essas curvas são denominadas **cortes** (ou **secções transversais**) da superfície.

Cilindros

Um **cilindro** é uma superfície constituída de todas as retas (chamadas **geratrizes**) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana.

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico da superfície $z = x^2$.

SOLUÇÃO Observe que a equação do gráfico, $z = x^2$, não envolve y. Isto significa que qualquer plano vertical com a equação $y = k$ (em paralelo com o plano xz) intersecta o gráfico de uma curva com a equação $z = x^2$. Os cortes verticais são, portanto, parábolas. A Figura 1 mostra como o gráfico é formado tornando a parábola $z = x^2$ no plano xz e movendo-a na direção do eixo y. O gráfico é uma superfície chamada de **cilindro parabólico**, constituída por um número infinito de cópias deslocadas da mesma parábola. Aqui, as geratrizes do cilindro são paralelas ao eixo y.

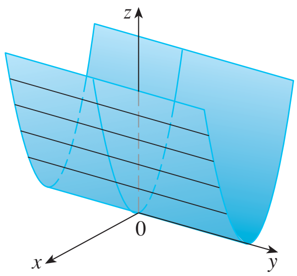


FIGURA 1
A superfície $z = x^2$ é um cilindro parabólico.

Observamos que a variável y não aparece na equação do cilindro do Exemplo 1. Esse fato é comum às superfícies cujas geratrizes são paralelas a um dos eixos coordenados. Se uma das variáveis x, y ou z está faltando na equação da superfície, a superfície é um cilindro.

EXEMPLO 2 Identifique e esboce as superfícies.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y^2 + z^2 = 1$

SOLUÇÃO

(a) Como z não aparece e as equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ representam uma circunferência de raio 1 no plano $z = k$, a superfície $x^2 + y^2 = 1$ é um cilindro circular cujo eixo é o eixo z. (Veja a Figura 2.) Aqui, as geratrizes são retas verticais.

(b) Nesse caso, a variável x é que está faltando, e a superfície é um cilindro circular cujo eixo é o eixo x. (Veja a Figura 3.) Ela é obtida tomando-se a circunferência $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$ no plano yz e deslocando-a paralelamente ao eixo x.

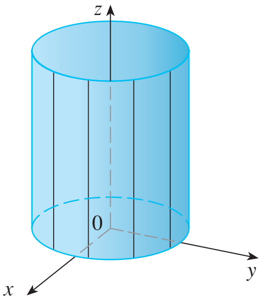


FIGURA 2 $x^2 + y^2 = 1$

OBSERVAÇÃO Quando estamos tratando de superfícies, é importante reconhecer que uma equação como $x^2 + y^2 = 1$ representa um cilindro e não uma circunferência. O corte desse cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy é a circunferência de equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

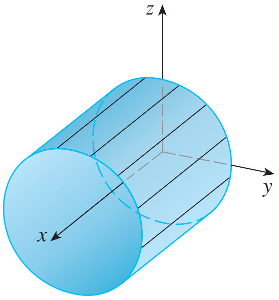


FIGURA 3 $y^2 + z^2 = 1$

Superfícies Quádricas

Uma **superfície quádrica** é o gráfico de uma equação de segundo grau nas três variáveis x, y e z. A equação mais geral é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde $A, B, C, \ldots, J$ são constantes, mas por rotação e translação essa equação pode ser posta em uma de duas formas padrão

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{ou} \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

As superfícies quádricas são as correspondentes tridimensionais das cônicas no plano. (Veja a Seção 10.5 para uma revisão das seções cônicas.)

EXEMPLO 3 Utilize cortes para fazer o esboço da superfície quádrica com equação

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUÇÃO Substituindo $z = 0$, determinamos que o corte no plano xy é $x^2 + y^2/9 = 1$, que reconhecemos ser a equação de uma elipse. Em geral, o corte horizontal no plano $z = k$ é

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

que é uma elipse, desde que $k^2 < 4$, ou seja, $-2 < k < 2$.

Da mesma forma, os cortes verticais também são elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \qquad (\text{se } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \qquad (\text{se } -3 < k < 3)$$

A Figura 4 mostra como desenhar alguns cortes para indicar a forma da superfície. Essa superfície é chamada **elipsoide**, visto que todos os seus cortes são elipses. Observe a simetria em relação a cada plano coordenado; isto é reflexo do fato de só aparecerem potências pares de x, y e z.

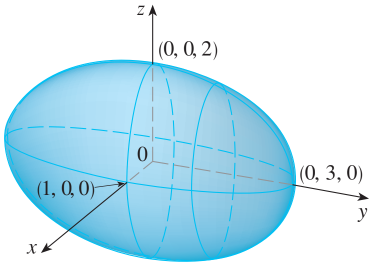


FIGURA 4

Elipsoide $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

EXEMPLO 4 Utilize cortes para esboçar a superfície $z = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Impondo $x = 0$, obtemos $z = y^2$, de forma que o plano yz intercepta a superfície em uma parábola. Impondo $x = k$ (uma constante), obtemos $z = y^2 + 4k^2$. Isso significa que, se cortarmos o gráfico por qualquer plano paralelo ao plano yz, obteremos uma nova parábola com concavidade para cima. Da mesma forma, tomando $y = k$, o corte é $z = 4x^2 + k^2$, que corresponde novamente a uma parábola com concavidade para cima. Tomando $z = k$, obteremos os cortes horizontais $4x^2 + y^2 = k$, que reconhecemos como uma família de elipses. Sabendo a forma dos cortes, podemos esboçar o gráfico da Figura 5. Pelo fato de os cortes serem parábolas e elipses, a superfície quádrica $z = 4x^2 + y^2$ é denominada **paraboloide elíptico**.

EXEMPLO 5 Esboce a superfície $z = y^2 - x^2$.

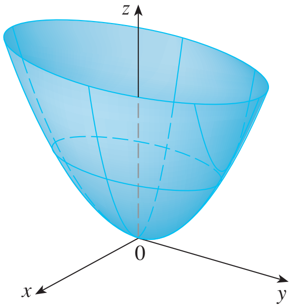
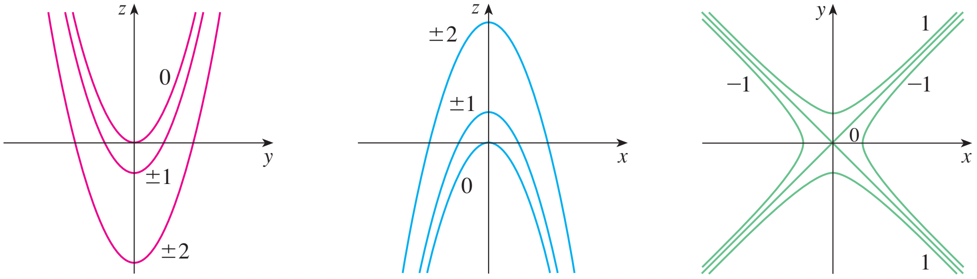


FIGURA 5

A superfície $z = 4x^2 + y^2$ é um paraboloide elíptico. Os cortes horizontais são elipses e os cortes verticais são parábolas

SOLUÇÃO Os cortes nos planos verticais $x = k$ são parábolas $z = y^2 - k^2$, com concavidade para cima. Os cortes em $y = k$ são parábolas $z = -x^2 + k^2$, com concavidade para baixo. Os traços horizontais são $y^2 - x^2 = k$, uma família de hipérboles. Na Figura 6 desenhamos esses cortes e mostramos como eles aparecem quando colocados nos planos corretos na Figura 7.

Na Figura 8 colocamos juntos os cortes da Figura 7 para formar a superfície $z = y^2 - x^2$, um **paraboloide hiperbólico**. Observe que o formato da superfície perto da origem se asse-



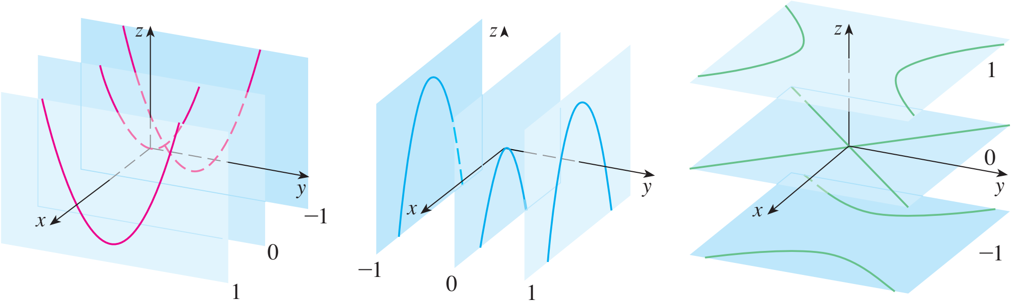
Cortes em $x = k$ são $z = y^2 - k^2$

Cortes em $y = k$ são $z = -x^2 + k^2$

Cortes em $z = k$ são $y^2 - x^2 = k$

FIGURA 6

Os cortes verticais são parábolas; os cortes horizontais são hipérboles. Todos os cortes são identificados por um valor de k.



Cortes em $x = k$ Cortes em $y = k$ Cortes em $z = k$

FIGURA 7
Cortes movidos para seus planos corretos

TEC Em *Module 12.6A* você pode investigar como cortes determinam a forma de uma superfície.

melha a uma sela. Essa superfície será alvo de estudos futuros na Seção 14.7, quando discutirmos os pontos de sela.

EXEMPLO 6 Esboce a superfície $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

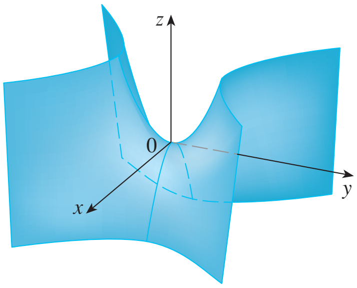


FIGURA 8
A superfície $z = y^2 - x^2$ é um paraboloide hiperbólico.

SOLUÇÃO O corte em qualquer plano horizontal $z = k$ é a elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

mas os cortes nos planos xz e yz são as hipérboles

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad x = 0$$

Essa superfície é chamada **hiperboloide de uma folha** e está esboçada na Figura 9.

A ideia de usar os cortes para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais. Na maioria desses programas, os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ são desenhados para valores de k, igualmente espaçados, e partes do gráfico são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas. A Tabela 1 mostra gráficos de computador de seis quádricas básicas na forma padrão. Todas as superfícies são simétricas em relação ao eixo z. Se uma quádrica é simétrica em relação a um eixo diferente, sua equação se modifica de modo apropriado.

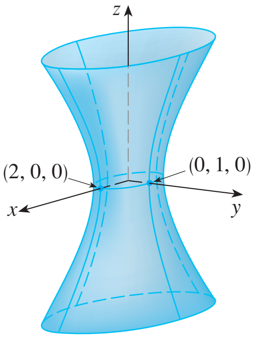
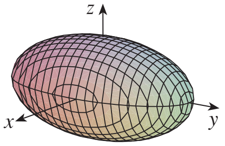
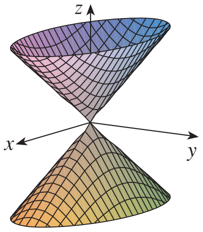
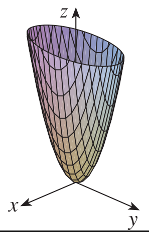
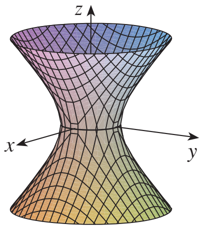
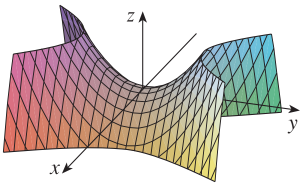
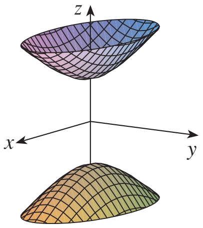


FIGURA 9

TABELA 1 Gráfico de Superfícies Quádricas

Superfície	Equação	Superfície	Equação
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todos os cortes são elipses. Se $a = b = c$, o elipsoide é uma esfera.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles se $k \neq 0$, mas são um par de retas quando $k = 0$.
Paraboloide Elíptico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são parábolas. A variável elevada à primeira potência indica o eixo do paraboloide.	Hiperboloide de Uma Folha 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são hipérboles. O eixo de simetria corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.
Paraboloide Hiperbólico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são hipérboles. Cortes verticais são parábolas. O caso aqui ilustrado corresponde a $c < 0$.	Hiperboloide de Duas Folhas 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Cortes horizontais em $z = k$ são elipses se $k > c$ ou se $k < -c$. Cortes verticais são hipérboles. Os dois sinais de menos indicam duas folhas.

EXEMPLO 7 Identifique e esboce as superfícies $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUÇÃO Dividindo por -4, colocamos a equação na forma padrão:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Comparando essa equação com as da Tabela 1, vemos que ela representa um hiperboloide de duas folhas, exceto que aqui o eixo do hiperboloide é o eixo y. Os cortes nos planos xy e yz são as hipérboles

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad z = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1 \qquad x = 0$$

A superfície não tem corte no plano xz, mas os cortes nos planos verticais $y = k$ para $|k| > 2$ são as elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

que podem ser escritas como

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

Esses cortes foram usados para fazer o esboço na Figura 10.

TEC Em *Module 12.6B* você pode verificar como mudanças em *a*, *b* e *c* na Tabela 1 afetam a forma da superfície quádrica.

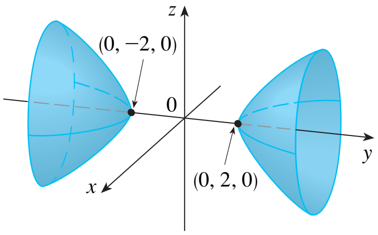


FIGURA 10
$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

EXEMPLO 8 Classifique a superfície quadrática $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUÇÃO Completando os quadrados, reescrevemos a equação como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Comparando essa equação com a Tabela 1, vemos que se trata de um paraboloide elíptico. Aqui, entretanto, o eixo do paraboloide é paralelo ao eixo y e foi transladado de forma que o vértice é o ponto $(3, 1, 0)$. Os cortes nos planos $y = k$ $(k > 1)$ são as elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

O corte no plano xy é a parábola com a equação $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$. A parábola é apresentada na Figura 11.

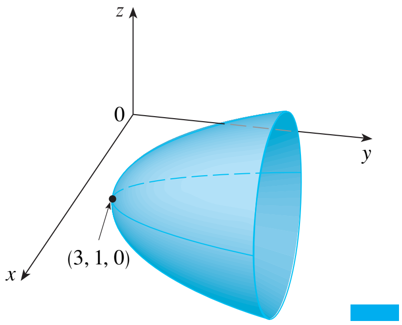


FIGURA 11
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

Aplicações de Superfícies Quádricas

Exemplos de superfícies quádricas podem ser encontrados no mundo a nossa volta. De fato, o mundo propriamente dito é um bom exemplo. Embora a Terra seja usualmente modelada como uma esfera, um modelo mais preciso é um elipsoide, pois a rotação da Terra causa um achatamento nos polos. (Veja o Exercício 47.)

Paraboloides circulares, obtidos pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo, são usados para coletar e refletir luz, som e sinais de rádio e televisão. Em um radiotelescópio, por exemplo, sinais das estrelas distantes que atingem a bacia são todos refletidos para o receptor no foco e assim amplificados. O mesmo princípio se aplica a microfones e antenas de satélite na forma de paraboloides.

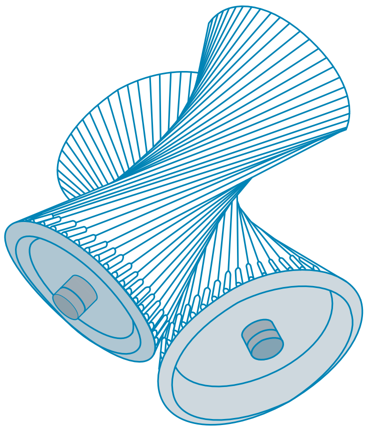
Torres de resfriamento para reatores nucleares são usualmente projetadas na forma de hiperboloides de uma folha, por razões de estabilidade estrutural. Pares de hiperboloides são usados para transmitir movimento de rotação entre eixos transversais. (Os dentes das engrenagens são as retas geradoras do hiperboloide. Veja o Exercício 49.)

David Frazler/Corbis

Uma antena parabólica reflete sinais para o foco de um paraboloide.

Mark C. Burnett/Photo Researchers, Inc

Reatores nucleares têm torres de arrefecimento com a forma de hiperboloides.



Hiperboloides produzem transmissão por engrenagens.

12.6 Exercícios

1. (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
(b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
(c) O que a equação $z = y^2$ representa?

2. (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
(b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
(c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

3-8 Descreva e esboce a superfície.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $z = 1 - y^2$

6. $y = z^2$

7. $xy = 1$

8. $z = \text{sen } y$

9. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de uma folha da Tabela 1.
(b) Se trocarmos a equação na parte (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
(c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico se parece com o gráfico do hiperboloide de duas folhas da Tabela 1.
(b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

11-20 Use cortes para esboçar e identificar as superfícies.

11. $x = y^2 + 4z^2$

12. $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$

13. $x^2 = y^2 + 4z^2$

14. $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$

15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

16. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$

17. $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$

18. $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$

19. $y = z^2 - x^2$

20. $x = y^2 - z^2$

21-28 Faça uma correspondente entre a equação e seu gráfico (identificado por I-VIII). Justifique sua escolha.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

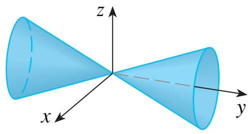
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x^2 + 2z^2$

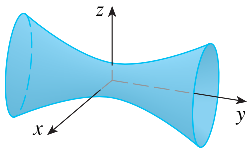
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

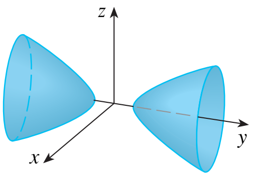
I



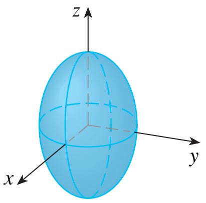
II



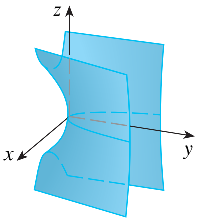
III



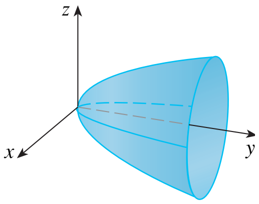
IV



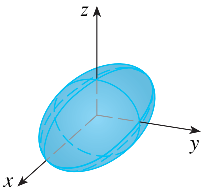
V



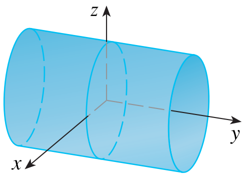
VI



VII



VIII



29-36 Coloque a equação na forma padrão, classifique a superfície e esboce-a.

29. $y^2 = x^2 + \frac{1}{9} z^2$

30. $4x^2 - y + 2z^2 = 0$

31. $x^2 + 2y - 2z^2 = 0$

32. $y^2 = x^2 + 4z^2 + 4$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37-40 Use um computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela retangular até conseguir uma boa visão da superfície.

37. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

38. $x^2 - y^2 - z = 0$

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

41. Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Esboce a região delimitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y.

44. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo x.

45. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos que são equidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique a superfície.

46. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos P para os quais a distância de P ao eixo x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

47. Tradicionalmente, a superfície da Terra tem sido modelada como uma esfera, mas o World Geodesic System de 1984 (WGS-84) usa um elipsoide como um modelo mais preciso. Ele coloca o centro da Terra na origem e o Polo Norte no eixo z positivo. A distância do centro ao polo é 6.356.523 km e a distância a um ponto do Equador é 6.378.137 km.

(a) Encontre uma equação para superfície da Terra como a usada pelo WGS-84.

(b) Curvas de latitude igual são traços nos planos $z = k$. Qual é a forma destas curvas?

(c) Meridianos (curvas com longitude constante) são cortes nos planos da forma $y = mx$. Qual é a forma desses meridianos?

48. Uma torre de resfriamento de um reator nuclear deve ser construída na forma de um hiperboloide de uma folha. O diâmetro da base é de 280 m, e o diâmetro mínimo, 500 m acima da base, é de 200 m. Encontre uma equação para a torre.

49. Mostre que, se o ponto (a, b, c) encontra-se sobre o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com as equações paramétricas $x = a + t$, $y = b + t$, $z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t$, $y = b - t$, $z = c - 2(b + a)t$, ambas, encontram-se inteiramente sobre este paraboloide. (Isso mostra que o paraboloide hiperbólico é o que é chamado uma **superfície regrada**; ou seja, ela pode ser gerada pelo movimento de uma reta. De fato, este exercício mostra que passando por cada ponto do paraboloide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras superfícies quádricas que são superfícies regradas são os cilindros, cones e hiperboloides de uma folha.)

50. Mostre que a curva de intersecção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ se situa num plano.

51. Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando o domínio $|x| \leqslant 1{,}2$, $|y| \leqslant 1{,}2$ e observe a curva de intersecção dessas superfícies. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

12 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Qual a diferença entre um vetor e um escalar?

2. Como somamos dois vetores geometricamente? Como os somamos algebricamente?

3. Se **a** é um vetor e c é um escalar, qual a relação entre $c\mathbf{a}$ e **a** geometricamente? Como determinar $c\mathbf{a}$ algebricamente?

4. Como determinar um vetor de um ponto a outro?

5. Como determinar o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dois vetores se você conhece seus comprimentos e o ângulo entre eles? E se você conhece suas componentes?

6. Para que o produto escalar é útil?

7. Escreva as expressões para a projeção escalar e vetor projeção de **b** sobre **a**. Ilustre com diagramas.

8. Como determinar o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dois vetores se você conhece seus módulos e o ângulo entre eles? E se você conhece suas componentes?

9. Para que o produto vetorial é útil?

10. (a) Como calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores **a** e **b**?

(b) Como calcular o volume do paralelepípedo definido pelos vetores **a**, **b** e **c**?

11. Como determinar um vetor perpendicular a um plano?

12. Como determinar o ângulo entre dois planos que se interceptam?

13. Escreva as equações vetorial, paramétricas e simétricas para uma reta.

14. Escreva as equações vetorial e escalar de um plano.

15. (a) Como você sabe se dois vetores são paralelos?

(b) Como você sabe se dois vetores são perpendiculares?

(c) Como você sabe se dois planos são paralelos?

16. (a) Descreva um método para determinar se três pontos P, Q e R estão alinhados.

(b) Descreva um método para determinar se quatro pontos P, Q, R e S são coplanares.

17. (a) Como você determina a distância de um ponto a uma reta?

(b) Como você determina a distância de um ponto a um plano?

(c) Como você determina a distância entre retas?

18. O que são os traços de uma superfície? Como determiná-los?

19. Escreva as equações na forma padrão dos seis tipos de quádricas.

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$.

2. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

3. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

4. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

5. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

6. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

7. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$.

8. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3 e qualquer escalar k, $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

9. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3 e qualquer escalar k, $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$.

10. Para quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

11. Para quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em V_3, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

12. Para quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em V_3, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.

13. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.

14. Para quaisquer vetores **u** e **v** em V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

15. O vetor $\langle 3, -1, 2 \rangle$ é paralelo ao plano $6x - 2y + 4z = 1$.

16. Uma equação linear $Ax + By + Cz + D = 0$ representa uma reta no espaço.

17. O conjunto de pontos $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é um círculo.

18. Em $\mathbb{R}^3$ o gráfico de $y = x^2$ é um paraboloide.

19. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.

20. Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$

21. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.

22. Se **u** e **v** estão em V_3, então $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

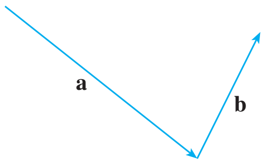
Exercícios

1. (a) Encontre uma equação da esfera que passa pelo ponto $(6, -2, 3)$ e tem centro $(-1, 2, 1)$.
(b) Encontre a curva na qual esta esfera intercepta o plano *yz*.
(b) Encontre o centro e o raio da esfera

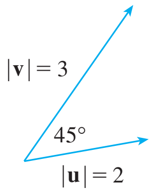
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$$

2. Copie os vetores da figura e utilize-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $-\frac{1}{2}\,\mathbf{a}$ (d) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$



3. Se **u** e **v** são os vetores mostrados na figura, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. O sentido do vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é entrando ou saindo do papel?



4. Calcule a quantidade dada se

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

(a) $2\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b}$ (b) $|\mathbf{b}|$
(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ (f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(g) $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$ (h) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(i) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ (j) $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$
(k) O ângulo entre **a** e **b** (com precisão de um grau)

5. Determine os valores de *x* tais que os vetores $\langle 3, 2, x \rangle$ e $\langle 2x, 4, x \rangle$ sejam ortogonais.

6. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

7. Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$. Encontre

(a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
(c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

8. Mostre que, se **a**, **b** e **c** estão em V_3, então

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$

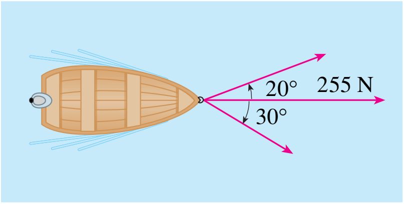
9. Determine o ângulo agudo entre duas diagonais de um cubo.

10. Dados os pontos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 1, 4)$ e $D(0, 3, 2)$, determine o volume do paralelepípedo com lados adjacentes *AB*, *AC* e *AD*.

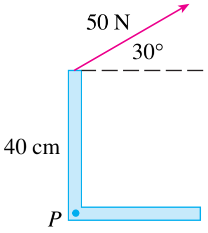
11. (a) Encontre um vetor perpendicular ao plano através dos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ e $C(1, 4, 3)$.
(b) Determine a área do triângulo *ABC*.

12. Uma força constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ move um objeto ao longo do segmento de reta de $(1, 0, 2)$ a $(5, 3, 8)$. Determine o trabalho realizado se a distância é medida em metros e a força em newtons.

13. Um barco é puxado para a praia usando duas cordas, como mostrado no diagrama. Se é necessária uma força de 255 N, determine o módulo da força exercida em cada corda.



14. Encontre a magnitude do torque em relação ao ponto *P* se uma força de 50 N é aplicada como mostrado.



15-17 Determine as equações paramétricas da reta.

15. A reta que passa por $(4, -1, 2)$ e $(1, 1, 5)$

16. A reta que passa por $(1, 0, -1)$ e é paralela à reta $\frac{1}{3}(x - 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$

17. A reta que passa por $(-2, 2, 4)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + 5z = 12$

18-20 Determine a equação do plano.

18. O plano que passa por $(2, 1, 0)$ e é paralelo à $x + 4y - 3z = 1$

19. O plano que passa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ e $(6, 3, 1)$

20. O plano que passa por $(1, 2, -2)$ e contém a reta $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + 3t$

21. Determine o ponto no qual a reta com equações paramétricas $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4t$ intercepta o plano $2x - y + z = 2$.

22. Encontre a distância desde a origem até a reta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

23. Determine se as retas dadas pelas equações simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

e

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

são paralelas, se inclinam ou intersectam.

24. (a) Mostre que os planos $x + y - z = 1$ e $2x - 3y + 4z = 5$ não são nem paralelos nem perpendiculares.
(b) Determine, com precisão de um grau, o ângulo entre os planos.

25. Encontre uma equação do plano que passa pela reta de interseção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$.

26. (a) Encontre uma equação do plano que passa através dos pontos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, -1, 10)$ e $C(1, 3, -4)$.
(b) Encontre as equações simétricas da reta que passa por B e é perpendicular ao plano da parte (a).
(c) Um segundo plano passa por $(2, 0, 4)$ e tem vetor normal $\langle 2, -4, -3 \rangle$. Mostre que o ângulo agudo entre os planos é aproximadamente 43°.
(d) Encontre as equações paramétricas para a reta intersecção dos dois planos.

27. Determine a distância entre os dois planos $3x + y - 4z = 2$ e $3x + y - 4z = 24$.

28-36 Identifique e esboce o gráfico de cada superfície.

28. $x = 3$

29. $x = z$

30. $y = z^2$

31. $x^2 = y^2 + 4z^2$

32. $4x - y + 2z = 4$

33. $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

34. $y^2 + z^2 = 1 + x^2$

35. $4x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 = 0$

36. $x = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 5$

37. Um elipsoide é criado pela rotação da elipse $4x^2 + y^2 = 16$ sobre o eixo x. Encontre uma equação do elipsoide.

38. Uma superfície é constituída de todos os pontos P tais que a distância de P ao plano $y = 1$ é o dobro da distância de P ao ponto $(0, -1, 0)$. Determine a equação dessa superfície e identifique-a.

Problemas Quentes

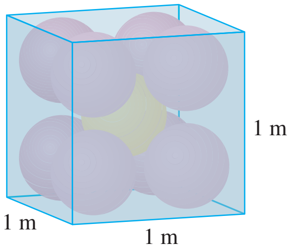


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. Cada borda de uma caixa cúbica tem comprimento de 1 m. A caixa contém nove bolas esféricas com o mesmo raio r. O centro de uma esfera está no centro do cubo e ela toca as outras oito bolas. Cada uma das oito bolas toca 3 lados da caixa. As bolas estão firmemente alojadas na caixa. (Veja a figura.) Determine r.

2. Seja B uma caixa sólida com comprimento L, largura W e altura H. Seja S o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância de no máximo 1 de algum ponto B. Expresse o volume de S nos termos de L, W e H.

3. Seja L a reta obtida pela intersecção dos planos $cx + y + z = c$ e $x - cy + cz = -1$, onde c é um número real.
(a) Determine as equações simétricas da reta L.
(b) À medida que o número de c varia, a reta L varre uma superfície S. Encontre uma equação para a curva de interseção de S com o plano horizontal $z = t$ (o corte de S no plano $z = t$).
(c) Determine o volume do sólido limitado por S e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

4. Um avião é capaz de viajar a 180 km/h em condições normais. O piloto decola e voa em direção ao norte, guiado pela bússola do avião. Depois de 30 minutos de voo, o piloto constata que, em decorrência do vento, viajou 80 km a um ângulo de 5° a leste do norte.
(a) Qual a velocidade do vento?
(b) Para que direção o piloto deveria ter dirigido o avião para alcançar o destino pretendido?

5. Suponha que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sejam vetores com $|\mathbf{v}_1| = 2$, $|\mathbf{v}_2| = 3$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 5$. Seja $\mathbf{v}_3 = \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \text{proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5 = \text{proj}_{\mathbf{v}_3} \mathbf{v}_4$ e assim por diante. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{v}_n|$.

6. Encontre uma equação da esfera maior que passa através do ponto $(-1, 1, 4)$ e é tal que cada um dos pontos (x, y, z) no interior da esfera satisfaz a condição

$$x^2 + y^2 + z^2 < 136 + 2(x + 2y + 3z)$$

7. Suponha que um bloco de massa m seja colocado em um plano inclinado, como mostrado na figura. A descida do bloco pelo plano inclinado é freada pela força de atrito; se θ não for grande o suficiente, o atrito impedirá qualquer deslocamento do bloco. As forças que agem sobre o bloco são seu peso $\mathbf{W}$, onde $|\mathbf{W}| = mg$ (g é a aceleração da gravidade); a força normal $\mathbf{N}$ (o componente normal da força de reação no plano do bloco), onde $|\mathbf{N}| = n$; e a força $\mathbf{F}$ devida ao atrito, que age paralelamente ao plano inclinado, no sentido contrário ao movimento. Se o bloco estiver parado e θ for aumentado, $|\mathbf{F}|$ aumentará até atingir um valor máximo, além do qual o bloco começará a deslizar. Neste ângulo θ_s, pode ser observado que $|\mathbf{F}|$ é proporcional a n. Então, quando $|\mathbf{F}|$ é máximo, podemos dizer que $|\mathbf{F}| = \mu_s n$, onde μ_s é chamado *coeficiente de atrito estático* e depende dos materiais que estão em contato.

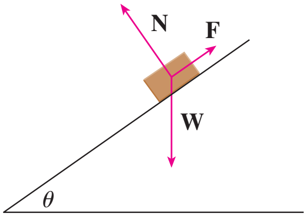


FIGURA PARA O PROBLEMA 7

(a) Observe que $\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$ e deduza que $\mu_s = \text{tg}\,(\theta_s)$.

(b) Suponha que, para $\theta > \theta_s$, uma força adicional exterior $\mathbf{H}$ seja aplicada ao bloco, na horizontal a partir da esquerda, e seja $|\mathbf{H}| = h$. Se h é pequeno, o bloco pode ainda deslizar para baixo do plano; se h é suficientemente grande, o bloco irá mover-se no avião. Seja $h_{\min}$ o menor valor de h que permita ao bloco permanecer parado (de modo que $|\mathbf{F}|$ é máximo).

Escolhendo os eixos coordenados de modo que $\mathbf{F}$ esteja na direção do eixo x, determine para cada força atuante suas componentes paralela e perpendicular ao plano inclinado e mostre que

$$h_{\min} \,\text{sen}\,\theta + mg\cos\theta = n \qquad \text{e} \qquad h_{\min}\cos\theta + \mu_s n = mg\,\text{sen}\,\theta$$

(c) Mostre que $$h_{\min} = mg\,\text{tg}\,(\theta - \theta_s)$$
Isso parece razoável? Faz sentido para $\theta = \theta_s$? E quando $\theta \to 90°$?
Explique.

(d) Seja $h_{\max}$ o maior valor que permita ao bloco permanecer parado. (Nesse caso, qual o sentido de $\mathbf{F}$?) Mostre que

$$h_{\max} = mg\,\text{tg}\,(\theta + \theta_s)$$

Isso parece razoável? Explique.

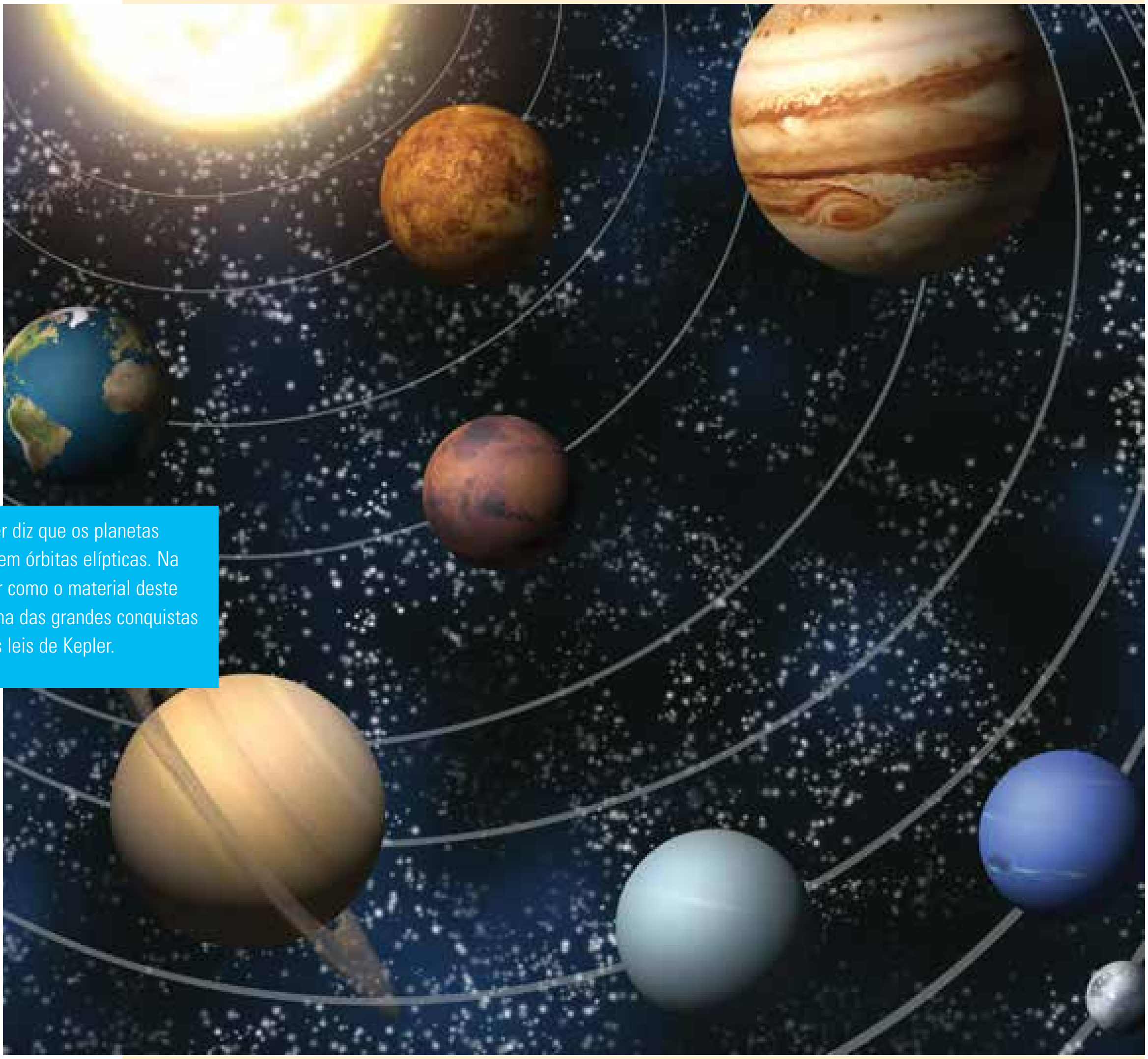
8. Um sólido tem as seguintes propriedades. Quando iluminado por raios paralelos ao eixo z, a sua sombra é um disco circular. Quando iluminado por raios paralelos ao eixo y, sua sombra é um quadrado. Quando iluminado por raios paralelos ao eixo, sua sombra é um triângulo isósceles. (No Exercício 44 na Seção 12.1 foi solicitado que se descrevesse e se esboçasse um exemplo de um sólido, mas há muitos outros sólidos). Suponha que a projeção sobre o plano xz seja um quadrado cujos lados têm comprimento 1.

(a) Qual é o volume do maior sólido?

(b) Existe um menor volume?

13

Funções Vetoriais



A Primeira Lei de Kepler diz que os planetas giram em torno do Sol em órbitas elípticas. Na Seção 13.4 você vai ver como o material deste capítulo é usado em uma das grandes conquistas do cálculo: provando as leis de Kepler.

Christos Georghiou/Shutterstock

As funções que usamos até agora foram funções a valores reais. Agora estudaremos funções cujos valores são vetores, pois estas são necessárias para descrever curvas e superfícies no espaço. Usaremos funções a valores vetoriais também para descrever o movimento de objetos no espaço. Em particular, as usaremos para deduzir as leis de Kepler para o movimento planetário.

13.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Estamos particularmente interessados em funções vetoriais $\mathbf{r}$ cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que, para todo número t no domínio de $\mathbf{r}$ existe um único vetor de V_3 denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são as componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f, g e h são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de $\mathbf{r}$ e podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

Usamos a letra t para denotar a variável independente porque ela representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

EXEMPLO 1 Se

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t} \right\rangle$$

então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3-t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

Pela convenção usual, o domínio de $\mathbf{r}$ é constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $\mathbf{r}(t)$ está definida. As expressões t^3, $\ln(3-t)$ e $\sqrt{t}$ são definidas quando $3 - t > 0$ e $t \geqslant 0$. Portanto, o domínio de $\mathbf{r}$ é o intervalo $[0, 3)$. ■

Se $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$, essa definição equivale a dizer que o comprimento, a direção e o sentido do vetor $\mathbf{r}(t)$ se aproximam do comprimento, da direção e do sentido do vetor $\mathbf{L}$.

O **limite** de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

1 Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Da mesma forma, poderíamos ter usado uma definição usando o ε-δ (veja o Exercício 51). Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais (veja o Exercício 49).

EXEMPLO 2 Determine $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$, onde $\mathbf{r}(t) = (1+t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO De acordo com a Definição 1, o limite de $\mathbf{r}$ é o vetor cujas componentes são os limites das funções componentes de $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t\to 0}(1+t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \text{(Pela Equação 3.3.2)}\end{aligned}$$

■

Uma função vetorial $\mathbf{r}$ é **contínua em *a*** se

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que $\mathbf{r}$ é contínua em a se e somente se suas funções componentes f, g e h forem contínuas em a.

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I. Em seguida, o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde

$$\boxed{2} \qquad x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

e t varia no intervalo I, é chamado **curva espacial**. As equações em $\boxed{2}$ são denominadas **equações paramétricas de** C e t é conhecido como **parâmetro**. Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $\big(f(t), g(t), h(t)\big)$. Se considerarmos agora a função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, então $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição do ponto de $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ em C. Assim, qualquer função vetorial contínua $\mathbf{r}$ define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento $\mathbf{r}(t)$, como se mostra na Figura 1.

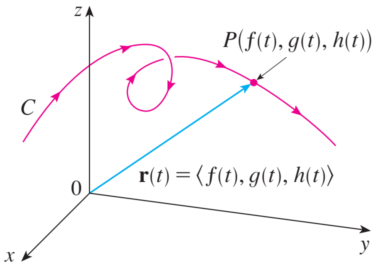


FIGURA 1

C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\mathbf{r}(t)$.

TEC *Visual 13.1A* mostra diversas curvas serem traçadas por vetores posição, incluindo aquelas nas Figuras 1 e 2.

EXEMPLO 3 Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t\rangle$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

que reconhecemos, a partir da Equação 12.5.2, como as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto $(1, 2, -1)$ e paralela ao vetor $\langle 1, 5, 6\rangle$. Como alternativa, podemos observar que a função pode ser escrita como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, quando $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6\rangle$, e esta é a equação vetorial da reta dada pela Equação 12.5.1.

Curvas planas também podem ser representadas utilizando-se notação vetorial. Por exemplo, a curva determinada pelas equações paramétricas $x = t^2 - 2t$ e $y = t + 1$ (veja o Exemplo 1, na Seção 10.1) poderia também ser descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1\rangle = (t^2 - 2t)\,\mathbf{i} + (t + 1)\,\mathbf{j}$$

onde $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ e $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$.

EXEMPLO 4 Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Uma vez que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move para a esquerda em torno do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy. (A projeção da curva para o plano xy tem equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \big\langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0\big\rangle$. Veja o Exemplo 2 na Seção 10.1.) Como $z = t$ a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**.

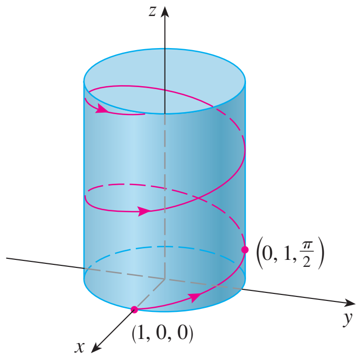


FIGURA 2

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953, James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.

Nos Exemplos 3 e 4 demos as equações vetoriais das curvas e pedimos uma descrição geométrica ou esboço delas. Nos dois exemplos a seguir, daremos uma descrição geométrica da curva e pediremos para encontrar equações paramétricas para ela.

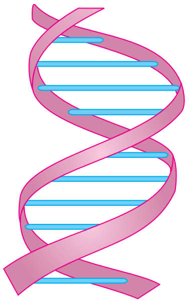


FIGURA 3

Uma hélice dupla

EXEMPLO 5 Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.

SOLUÇÃO Na Seção 12.5 encontramos uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor $\mathbf{r}_0$ à extremidade do vetor $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\,\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

A Figura 4 mostra o segmento de linha PQ no Exemplo 5

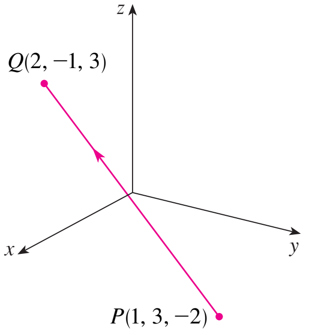


FIGURA 4

(Veja a Equação 12.5.4.) Aqui tomamos $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$ para obter uma equação vetorial do segmento de linha de P para Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2 \rangle + t\langle 2, -1, 3 \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ou

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$ ■

EXEMPLO 6 Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

SOLUÇÃO A Figura 5 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 6 mostra a curva de intersecção C, que é uma elipse.

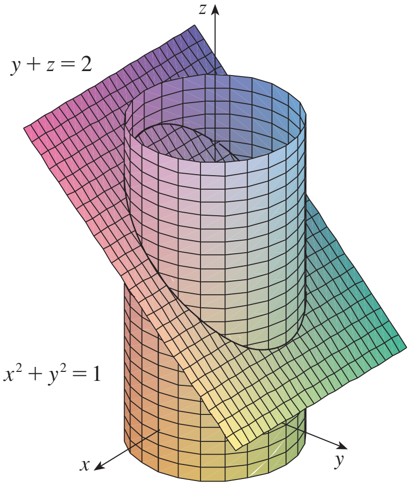


FIGURA 5

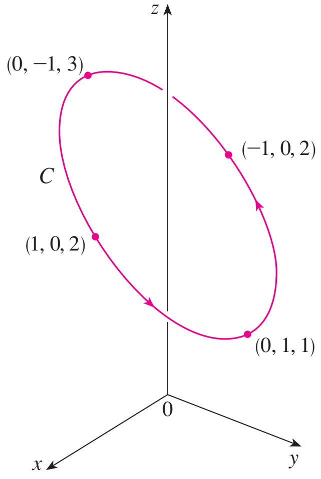


FIGURA 6

A projeção de C para o plano xy é o círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Então, sabemos do Exemplo 2 na Seção 10.1 que podemos escrever

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Essa equação é chamada de *parametrização* da curva C. As setas na Figura 6 indicam o sentido em que a curva C é percorrida quando o valor do parâmetro t aumenta. ■

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de desenhar que as curvas planas. Para uma representação mais precisa precisamos utilizar a tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas

$$x = (4 + \text{sen } 20t) \cos t \qquad y = (4 + \text{sen } 20t) \text{ sen } t \qquad z = \cos 20t$$

Essa curva é denominada **espiral toroidal**, pois está sobre um toro. Outra curva interessante, o **nó de trevo ou trifólio**, com equações

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t \qquad y = (2 + \cos 1{,}5t) \text{ sen } t \qquad z = \text{sen } 1{,}5t$$

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer uma dessas curvas à mão.

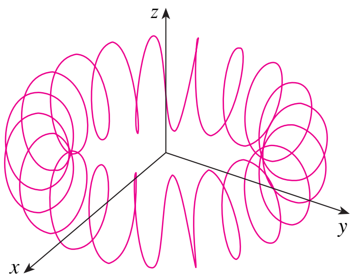


FIGURA 7 Espiral toroidal

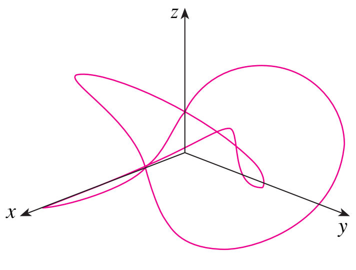
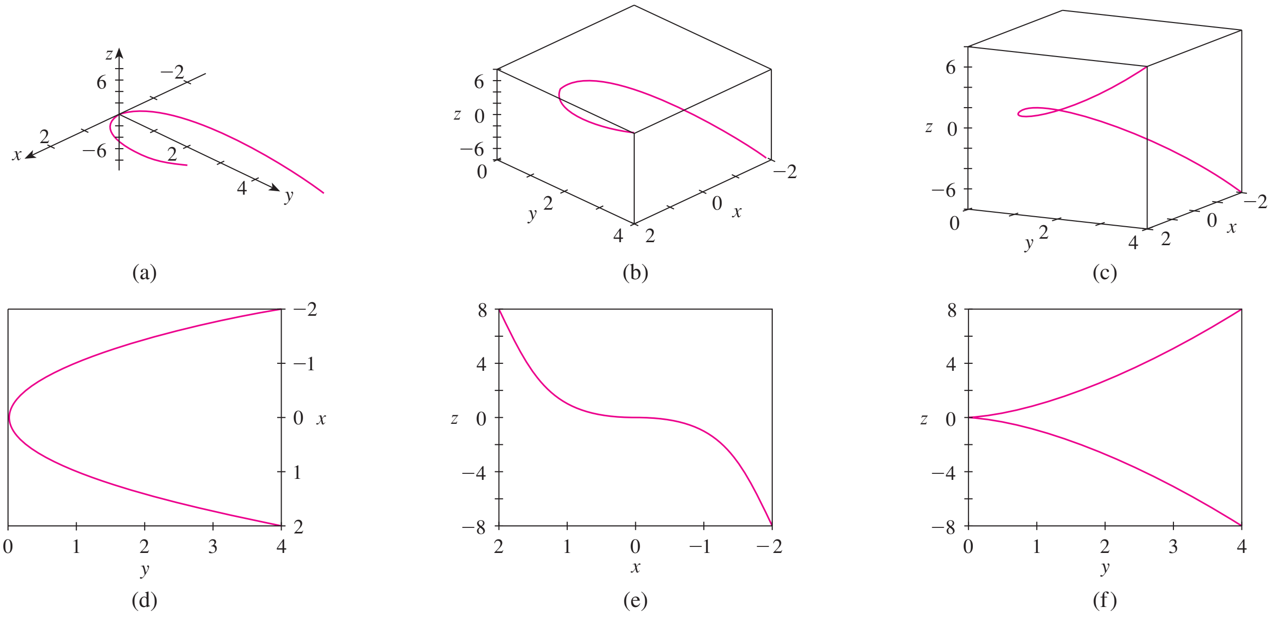


FIGURA 8 Nó de trevo

Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, as ilusões ópticas tornam difícil entender a forma real da curva. (Isso é especialmente verdadeiro na Figura 8. Veja o Exercício 50.) O exemplo seguinte mostra como lidar com este problema.

EXEMPLO 7 Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

SOLUÇÃO Começaremos traçando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ para $-2 \leqslant t \leqslant 2$. O resultado é mostrado na Figura 9(a), mas é difícil ver a verdadeira natureza da curva através desse único gráfico. A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma. Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

FIGURA 9 Vistas da cúbica torcida

TEC Em *Visual 13.1b* você pode girar a caixa na Figura 9 para ver a curva a partir de qualquer ponto de vista.

Temos uma ideia melhor da curva quando a observamos de diversos ângulos. A parte (c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista. As partes (d), (e) e (f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa. Em particular, a parte (d) mostra a vista de cima da caixa. A curva obtida é a projeção da curva no plano xy, a parábola $y = x^2$. A parte (e) exibe a projeção no plano xz a curva cúbica $z = x^3$. Fica claro o porquê de essa curva ser chamada cúbica retorcida.

Outra maneira de visualizar uma curva espacial é desenhá-la em uma superfície. Por exemplo, a cúbica retorcida do Exemplo 7 está no cilindro parabólico $y = x^2$. (Elimine o parâmetro das duas primeiras equações paramétricas, $x = t$ e $y = t^2$.) A Figura 10 mostra o cilindro e a cúbica retorcida sobrepostos, tornando mais fácil enxergar que a curva caminha da origem para cima, sobre o cilindro. Usamos essa mesma técnica no Exemplo 4 para visualizar a hélice circular (veja a Figura 2).

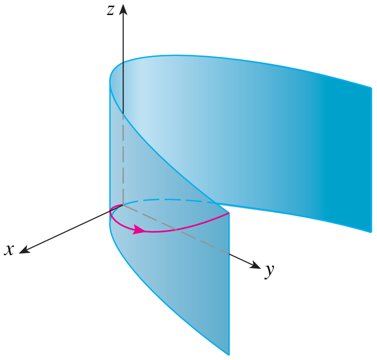


FIGURA 10

Um terceiro processo de visualização para a cúbica retorcida é constatar que a curva também está contida na superfície cilíndrica $z = x^3$. Então podemos ver a curva como a intersecção das duas superfícies cilíndricas $y = x^2$ e $z = x^3$. (Veja a Figura 11.)

TEC *Visual 13.1C* mostra como as curvas surgem como intersecções de superfícies.

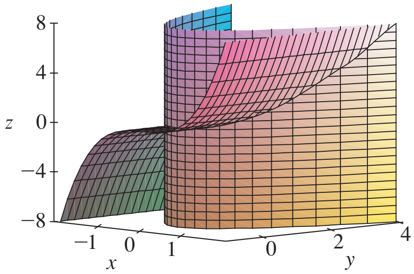
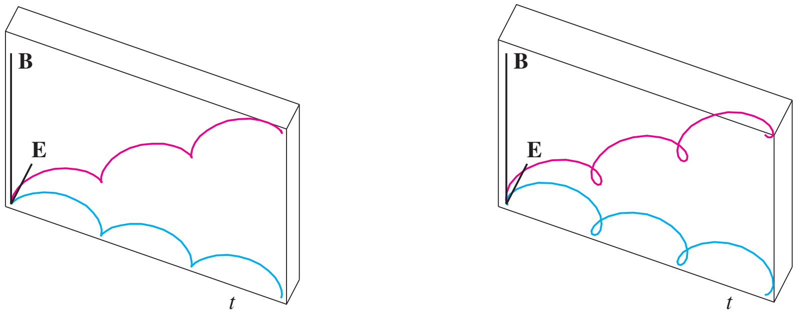


FIGURA 11

Alguns sistemas de computação algébrica nos proporcionam uma figura bem mais clara de uma curva espacial envolvendo-a em um tubo. Esse recurso nos permite ver se uma parte de uma curva passa pela frente ou por trás de outra parte dessa curva. Por exemplo, a Figura 13 mostra a curva da Figura 12(b), obtida como resultado do comando `tubeplot` no Maple.

Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial na ciência é a trajetória de uma partícula de carga positiva em campos elétricos e magnéticos ortogonalmente orientados **E** e **B**. Dependendo da velocidade inicial dada à partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a cicloide estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)], ou é uma curva cuja projeção é a trocoide investigada no Exercício 40 da Seção 10.1 [Figura 12 (b).]



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t\rangle$ (b) $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\right\rangle$

FIGURA 12
Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

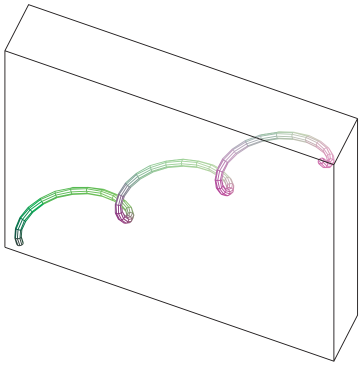


FIGURA 13

Para mais detalhes sobre a física envolvida e animações das trajetórias das partículas, consulte os seguintes sites:

- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

13.1 Exercícios

1–2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{4 - t^2}, e^{-3t}, \ln(t+1)\right\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9 - t^2)\,\mathbf{k}$

3–6 Calcule os limites.

3. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}\right)$

4. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2 - t}{t-1}\,\mathbf{i} + \sqrt{t+8}\,\mathbf{j} + \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\ln t}\,\mathbf{k}\right)$

5. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \operatorname{tg}^{-1}t, \frac{1 - e^{-2t}}{t}\right\rangle$

6. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left\langle te^{-t}, \frac{t^3 + t}{2t^3 - 1}, t\operatorname{sen}\frac{1}{t}\right\rangle$

7–14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro t cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2\rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2 - t, 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen}\pi t, t, \cos\pi t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \cos t, 2\operatorname{sen} t\rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

15–16 Desenhe as projeções da curva nos três planos coordenados. Use essas projeções para ajudá-lo a esboçar a curva.

15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t, 2\cos t\rangle$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t^2\rangle$

17–20 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

17. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

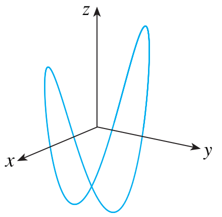
18. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

19. $P(0, -1, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$

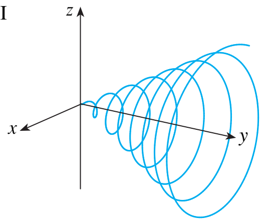
20. $P(a, b, c)$, $Q(u, v, w)$

21–26 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I–VI). Justifique sua escolha.

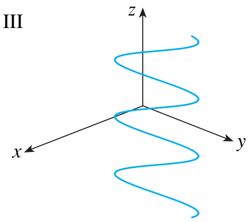
I



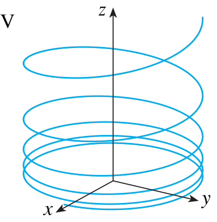
II



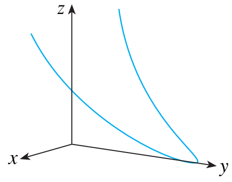
III



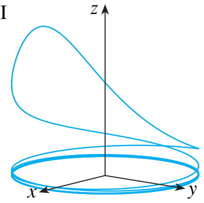
IV



V



VI



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

21. $x = t\cos t, \quad y = t, \quad z = t \operatorname{sen} t, \quad t \geqslant 0$

22. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 1/(1 + t^2)$

23. $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$

24. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \cos 2t$

25. $x = \cos 8t, \quad y = \operatorname{sen} 8t, \quad z = e^{0,8t}, \quad t \geqslant 0$

26. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t, \quad z = t$

27. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

28. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

29. Em quais pontos a curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\,\mathbf{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

30. Em quais pontos a hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

31–35 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

31. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t \rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \rangle$

33. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \operatorname{sen} t, t \cos t \rangle$

34. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t \rangle$

35. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 2t, \ \cos 3t, \cos 4t \rangle$

36. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \cos 4t$. Explique sua forma representando por gráficos suas projeções para os três planos coordenados.

37. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = (1 + \cos 16t)\cos t$$
$$y = (1 + \cos 16t)\operatorname{sen} t$$
$$z = 1 + \cos 16t.$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

38. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\ \cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\ \operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

39. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$, mas não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

40–44 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

40. O cilindro de $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

41. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

42. O paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

43. A hipérbole $z = x^2 - y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

44. O semielipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $y \geqslant 0$, e o cilindro $x^2 + z^2 = 1$

45. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

46. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $y = x^2$ e a metade superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

47. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Será que um míssil atingiu seu alvo em movimento? Vão se colidir duas aeronaves?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

48. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

49. Suponha que **u** e **v** sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim\limits_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim\limits_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim\limits_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim\limits_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim\limits_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim\limits_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim\limits_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

50. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t)\cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t)\operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano xy tem coordenadas polares $r = 2 + \cos 1{,}5t$ e $\theta = t$, de forma que r varia entre 1 e 3. Mostre então que z tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre $r = 1$ e $r = 3$.

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando `tubeplot` do Maple ou o `curvetube` ou comando Tube no Mathematica.)

51. Mostre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

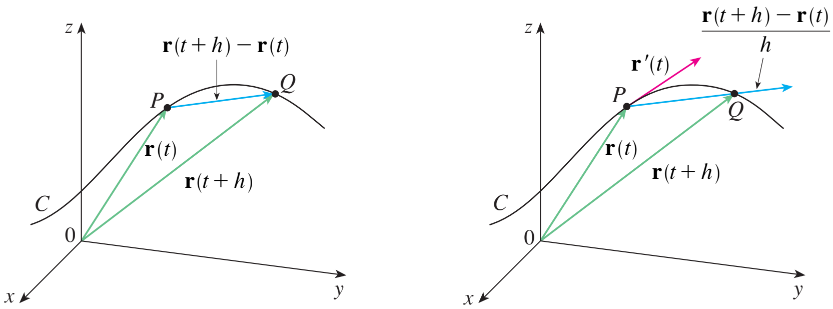
Derivadas

A **derivada** $\mathbf{r}'$ de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos P e Q têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t+h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$ tem o mesmo sentido que $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$. Quando $h \to 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, o vetor $\mathbf{r}'(t)$ é chamado o **vetor tangente** à curva definida por $\mathbf{r}$ no ponto P, desde que $\mathbf{r}'(t)$ exista e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\mathbf{r}'(t)$. Teremos ocasião de considerar o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



(a) O vetor secante $\overrightarrow{PQ}$

(b) O vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$

FIGURA 1

TEC *Visual 13.2* mostra uma animação da Figura 1.

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial $\mathbf{r}$ por derivação de cada componente de $\mathbf{r}$.

$\boxed{2}$ **Teorema** Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\langle f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

EXEMPLO 1
(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.
(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

SOLUÇÃO
(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de $\mathbf{r}$, obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Uma vez que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, o vetor unitário da tangente no ponto $(1, 0, 0)$ é

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}$$

EXEMPLO 2 Para a curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2 - t)\,\mathbf{j}$, determine $\mathbf{r}'(t)$ e desenhe o vetor posição $\mathbf{r}(1)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(1)$.

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

A curva é plana, e a eliminação do parâmetro das equações $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ nos dá $y = 2 - x^2$, $x \geqslant 0$. Na Figura 2, desenhamos o vetor posição $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ começando na origem e o vetor tangente $\mathbf{r}'(1)$ começando no ponto correspondente $(1, 1)$.

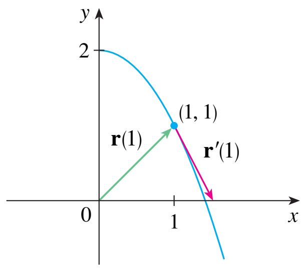


FIGURA 2

Observe na Figura 2 os pontos de vetor tangente na direção de aumentar. (Veja o Exercício 56.)

EXEMPLO 3 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice com equações paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

no ponto $(0, 1, \pi/2)$.

SOLUÇÃO A equação vetorial da hélice é $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle$, de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2\operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle$$

O valor do parâmetro correspondente ao ponto $(0, 1, \pi/2)$ é $t = \pi/2$, e o vetor tangente é $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle$. A reta tangente passa por $(0, 1, \pi/2)$ e é paralela ao vetor $\langle -2, 0, 1 \rangle$, então, pela equação 12.5.2, suas equações paramétricas são

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$

A hélice e a reta tangente do Exemplo 3 estão na Figura 3.

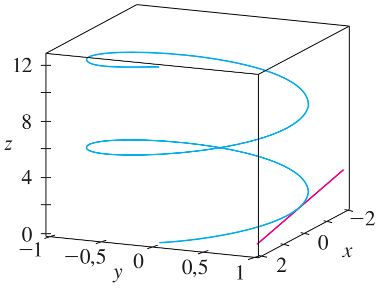


FIGURA 3

Do mesmo modo que para as funções reais, a **segunda derivada** da função vetorial $\mathbf{r}$ é a derivada de $\mathbf{r}'$, ou seja, $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$. Por exemplo, a segunda derivada da função do Exemplo 3 é

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\text{sen}\, t, 0 \rangle$$

Na Seção 13.4 veremos como $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ podem ser interpretados como os vetores velocidade e aceleração de uma partícula se movendo pelo espaço com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.

Regras de Derivação

O próximo teorema mostra que as fórmulas de derivação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

3 Teorema Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então,

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (Regra da Cadeia)

Esse teorema pode ser demonstrado usando-se diretamente a Definição 1 ou empregando-se o Teorema 2 e as fórmulas de derivação correspondentes para as funções a valores reais. A demonstração da Fórmula 4 está a seguir; as fórmulas restantes são deixadas como exercícios.

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA 4 Sejam

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \qquad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

Então
$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) + f_3(t)\,g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i(t)$$

e as regras usuais de derivação do produto fornecem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}[f_i(t)\,g_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{3} [f_i'(t)\,g_i(t) + f_i(t)\,g_i'(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{3} f_i'(t)\,g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i'(t) \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)\end{aligned}$$

■

EXEMPLO 4 Mostre que, se $|\mathbf{r}(t)| = c$ (uma constante), então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

e c^2 é uma constante, da Fórmula 4 do Teorema 3 vem

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Assim, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, que diz que $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ é sempre perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}(t)$.

Integrais

A **integral definida** de uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t)$ pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de $\mathbf{r}$ como a integral de suas funções componentes f, g e h como segue. (Utilizamos a notação do Capítulo 5, no Volume I.)

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_i^*)\,\Delta t \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\,\Delta t\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\,\Delta t\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\,\Delta t\right)\mathbf{k}\right]\end{aligned}$$

e também

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma primitiva de $\mathbf{r}$, ou seja, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\boldsymbol{k}$, então

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k} \\ &= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração, e

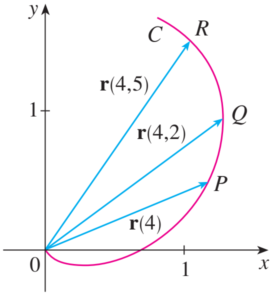
$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\mathbf{k}$$

13.2 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.
(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.
(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.
(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3–8
(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.
(b) Encontre $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle$, $\quad t = -1$
4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle$, $\quad t = 1$
5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $\quad t = \pi/4$
6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$
7. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$
8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}$, $\quad t = \pi/6$

9–16 Determine a derivada da função vetorial.
9. $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t \rangle$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2 \rangle$
11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{1+t}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{1+t}k$
13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(t) = at\cos 3t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c\cos^3 t\,\mathbf{k}$
15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\,\mathbf{c}$
16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17–20 Determine o vetor tangente unitário $\mathrm{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro dado t.
17. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{-t}, 2\operatorname{arctg} t, 2e^t \rangle$, $\quad t = 0$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle$, $\quad t = 1$
19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$, $\quad t = 0$
20. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j} + \operatorname{tg}^2 t\,\mathbf{k}$, $\quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.
22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, encontre $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23–26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.
23. $x = 1 + 2\sqrt{t}$, $\quad y = t^3 - t$, $\quad z = t^3 + t$; $\quad (3, 0, 2)$
24. $x = e^t$, $\quad y = te^t$, $\quad z = te^{t^2}$; $\quad (1, 0, 0)$
25. $x = e^{-t}\cos t$, $\quad y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, $\quad z = e^{-t}$; $\quad (1, 0, 1)$
26. $x = \sqrt{t^2 + 3}$; $\quad y = \ln(t^2 + 3)$; $\quad z = t$; $\quad (2, \ln 4, 1)$

27. Encontre uma equação para a reta tangente à curva de intersecção dos cilindros $x^2 + y^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 20$ no ponto $(3, 4, 2)$.
28. Encontre o ponto na curva de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, e^t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, em que a reta tangente é paralela ao plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

SCA **29–31** Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.
29. $x = t$, $\; y = e^{-t}$, $\; z = 2t - t^2$; $\quad (0, 1, 0)$
30. $x = 2\cos t$, $\; y = 2\operatorname{sen} t$, $\; z = 4\cos 2t$; $\quad (\sqrt{3}, 1, 2)$
31. $x = t\cos t$, $\; y = t$, $\; z = t\operatorname{sen} t$; $\quad (-\pi, \pi, 0)$

32. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2\operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
▦ (b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.
33. As curvas de $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.
34. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$ se cruzam? Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

35–40 Calcule a integral.
35. $\displaystyle\int_0^2 (t\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + 3t^5\,\mathbf{k})\,dt$
36. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{4}{1 + t^2}\,\mathbf{j} + \frac{2t}{1 + t^2}\,\mathbf{k} \right) dt$
37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (3\operatorname{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} t\cos t\,\mathbf{k})\,dt$
38. $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t - 1}\,\mathbf{j} + t\operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \right) dt$

▦ É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

39. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

40. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

---

41. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

42. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

43. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

45. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

46. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

47. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$, utilize a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

48. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções de vetor no Exercício 47, utilize a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

49. Determine $f'(2)$, onde $f(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(2) = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{u}'(2) = \langle 3, 0, 4 \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

50. Se $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções de vetor no Exercício 49, encontre $\mathbf{r}'(2)$.

51. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

52. Determine uma expressão para $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

53. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Dica*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

54. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

55. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

56. Mostre que o vetor tangente a uma curva definida por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ aponta no mesmo sentido da curva com t aumentando. [*Dica:* Consulte a Figura 1 e considere os casos $h > 0$ e $h < 0$ separadamente.]

13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula

$\boxed{1}$ $$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

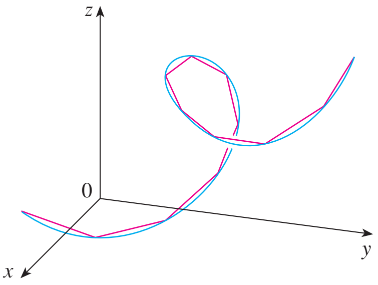


FIGURA 1
O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas.

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

$\boxed{2}$ $$\boxed{\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \end{aligned}}$$

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ podem ser escritos de forma mais compacta

$\boxed{3}$ $$\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt}$$

porque, para curvas planas $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

e para as curvas espaciais $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

EXEMPLO 1 Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ do ponto (1, 0, 0) até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

A Figura 2 mostra o arco de hélice cujo comprimento é calculado no Exemplo 1.

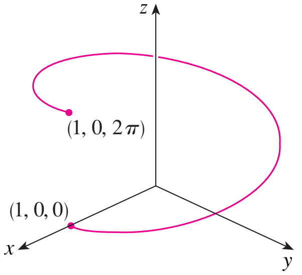


FIGURA 2

SOLUÇÃO Uma vez que $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, temos

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de (1, 0, 0) até $(1, 0, 2\pi)$ é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e, assim, da Fórmula 3, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,\pi \qquad ■$$

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2 \tag{4}$$

poderia ser representada também pela função

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \qquad 0 \leqslant u \leqslant \ln 2 \tag{5}$$

onde a relação entre os parâmetros t e u é dada por $t = e^u$. Dizemos que as Equações 4 e 5 são **parametrizações** da curva C. Se fôssemos usar a Equação 3 para calcular o comprimento de C usando Equações 4 e 5, gostaríamos de obter a mesma resposta. Em geral, pode ser mostrado que, quando a Equação 3 é usada para calcular o comprimento do arco, a resposta é independente da parametrização que é usada.

Suponhamos agora que C seja uma curva dada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

onde $\mathbf{r}'$ é contínua e C é percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a para b. Definimos sua **função de comprimento de arco** s por

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du \tag{6}$$

Então $s(t)$ é o comprimento da parte de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$. (Veja a Figura 3.) Se derivarmos os dois lados da Equação 6 usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| \tag{7}$$

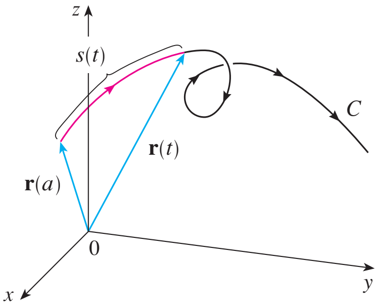


FIGURA 3

É frequentemente útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva $\mathbf{r}(t)$ já está dada em termos de um parâmetro t e $s(t)$ é a função comprimento de arco dada pela Equação 6, podemos ser capazes de escrever t como uma função de s: $t = t(s)$. Em seguida, a curva pode ser reparametrizada em termos de s substituindo por t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. Assim, se $s = 3$, por exemplo, $\mathbf{r}(t(3))$ é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

EXEMPLO 2 Reparametrize a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ utilizando o comprimento de arco medido a partir de (1, 0, 0) na direção de crescimento de t.

SOLUÇÃO O ponto inicial (1, 0, 0) corresponde ao valor do parâmetro $t = 0$. A partir do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

e assim
$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\,t$$

Portanto $t = s/\sqrt{2}$ e a reparametrização pedida é obtida substituindo-se o valor de t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\big(s/\sqrt{2}\big)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\big(s/\sqrt{2}\big)\,\mathbf{j} + \big(s/\sqrt{2}\big)\,\mathbf{k}$$

Curvatura

TEC *Visual 13.3A* mostra vetores tangentes unitários animados, como os da Figura 4, para uma variedade de curvas planas e curvas espaciais.

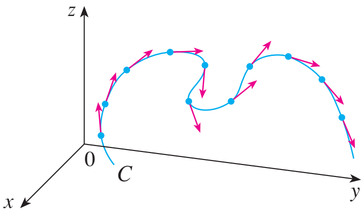


FIGURA 4

Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de C

Uma parametrização $\mathbf{r}(t)$ é chamada **suave** em um intervalo I se $\mathbf{r}'$ for contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ em I. Uma curva é chamada de **suave** se tiver uma parametrização suave. Uma curva suave não tem quebras abruptas ou cúspides; quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

Se C for uma curva suave definida por uma função vetorial $\mathbf{r}$, lembre-se de que o vetor tangente unitário $\mathrm{T}(t)$ será dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Da Figura 4, podemos ver que $\mathbf{T}(t)$ muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou retorce mais acentuadamente.

A curvatura de C em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. Especificamente, definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco. (Utilizamos o comprimento de arco, pois assim a curvatura independe da parametrização.)

8 **Definição** A **curvatura** de uma curva é

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

onde $\mathbf{T}$ é o vetor tangente unitário.

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro t em vez de s. Assim, usamos a Regra da Cadeia (Teorema 13.2.3, Fórmula 6) para escrever

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Mas, da Equação 7, $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$, e então

9
$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}}$$

EXEMPLO 3 Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

SOLUÇÃO Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Portanto
$$\mathbf{r}'(t) = -a\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$$

Logo,
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

e $$\mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Isso nos dá $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, então, usando a Equação 9, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$ ■

O resultado do Exemplo 3 mostra que pequenos círculos têm uma grande curvatura, enquanto grandes círculos têm uma pequena curvatura, como nossa intuição indica. Podemos ver diretamente da definição que a curvatura de uma reta é sempre 0, pois o vetor tangente é constante.

Embora a Fórmula 9 possa ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura, em geral é mais conveniente aplicar a fórmula dada pelo teorema a seguir:

10 **Teorema** A curvatura de uma curva dada pela função vetorial **r** é

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

DEMONSTRAÇÃO Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ e $|\mathbf{r}'| = ds/dt$, temos

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

e, pela Regra do Produto (Teorema 13.2.3, Fórmula 3), temos

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

Usando o fato de que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$ (veja o Exemplo 2 da Seção 12.4), temos

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Agora $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todo t, então $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ são ortogonais pelo Exemplo 4 na Seção 13.2. Portanto, pelo Teorema 12.4.9,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Logo, $$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

e $$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$ ■

EXEMPLO 4 Determine a curvatura da cúbica retorcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ em um ponto genérico e em (0, 0, 0).

SOLUÇÃO Calculemos inicialmente os ingredientes necessários:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Então, aplicando o Teorema 10, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, onde $t = 0$, a curvatura é $\kappa(0) = 2$.

Para o caso especial de uma curva plana com a equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro e escrevemos $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Então $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. Nós também temos $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ e, assim, pelo Teorema 10,

11
$$\boxed{\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}}$$

EXEMPLO 5 Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos (0, 0), (1, 1) e (2, 4).

SOLUÇÃO Como $y' = 2x$ e $y'' = 2$, a Fórmula 11 nos dá

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em (0, 0) é $\kappa(0) = 2$. Em (1, 1) isso é $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0{,}18$. Em (2, 4) isso é $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0{,}03$. Observe a partir da expressão de $\kappa(x)$ ou o gráfico de κ na Figura 5 que $\kappa(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$. Isso corresponde ao fato de que a parábola parece tornar-se mais plana quando $x \to \pm\infty$.

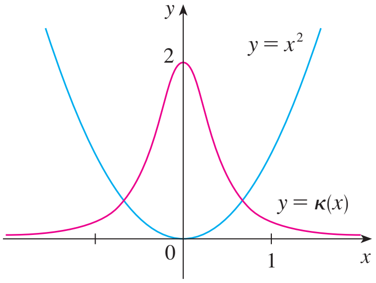


FIGURA 5
A parábola $y = x^2$ e sua função curvatura

Vetores Normal e Binormal

Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

Em um ponto dado de uma curva suave $\mathbf{r}(t)$, existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$. Escolhemos um observando que, como $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todo t, temos $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$ pelo Exemplo 4 da Seção 13.2, de modo que $\mathbf{T}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Observe, no entanto, que $\mathbf{T}'(t)$ pode não ser um vetor unitário. Mas se $\mathbf{r}'$ também for suave, $\kappa \neq 0$podemos definir o **vetor normal unitário principal** $\mathbf{N}(t)$ (ou simplesmente **normal unitário**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

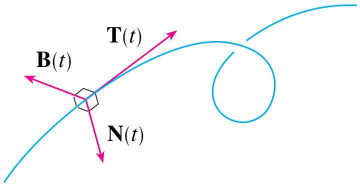


FIGURA 6

O vetor $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ é chamado **vetor binormal**. Ele é perpendicular a ambos **T** e **N** e também é unitário (veja a Figura 6).

EXEMPLO 6 Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO Vamos, inicialmente, calcular os ingredientes necessários para o cálculo do vetor normal unitário:

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo z. O vetor binormal é

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle$$ ■

A Figura 7 ilustra o Exemplo 6 mostrando os vetores **T**, **N** e **B** em dois pontos da hélice circular. Em geral, os vetores **T**, **N** e **B**, começando nos vários pontos da curva, formam um conjunto de vetores ortogonais, denominados referencial **TNB**, que se move ao longo da curva quando t varia. Esse referencial **TNB** tem um papel importante em um ramo da matemática chamado geometria diferencial e em suas aplicações em movimento de naves espaciais.

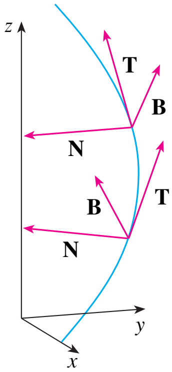


FIGURA 7

O plano determinado pelos vetores normal e binormal **N** e **B** num ponto P sobre uma curva C é chamado **plano normal** de C em P. E constituída por todas as linhas que são ortogonais ao vetor tangente **T**. O plano determinado pelos vetores **T** e **N** é chamado **plano osculador** de C a P. O nome vem do latim *osculum*, que significa "beijo". É o plano que se aproxima mais do que contém a parte da curva próxima P. (Para uma curva plana, o plano osculador é simplesmente o plano que contém a curva.)

O círculo que está no plano osculador de C em P, tem a mesma tangente que C em P, fica do lado côncavo de C (na direção em que **N** aponta) e tem raio $\rho = 1/\kappa$ (o recíproco da curvatura) é conhecido como **círculo osculador** (ou **círculo da curvatura**) de C em P. É o círculo que melhor descreve como C se comporta perto de P; que compartilha a mesma tangente, normal e curvatura P.

TEC *Visual 13.3B* mostra como a estrutura TNB move ao longo de diversas curvas.

EXEMPLO 7 Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice circular do Exemplo 6 no ponto $P(0, 1, \pi/2)$.

SOLUÇÃO O plano normal em P tem vetor normal $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1\rangle$, portanto sua equação é

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

O plano osculador em P contém os vetores **T** e **N**, e assim seu vetor normal é $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. A partir do Exemplo 6, temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

Um vetor normal mais simples é $\langle 1, 0, 1\rangle$, então uma equação do plano osculador é

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = -x + \frac{\pi}{2}$$ ■

A Figura 8 mostra a hélice e o plano osculador do Exemplo 7.

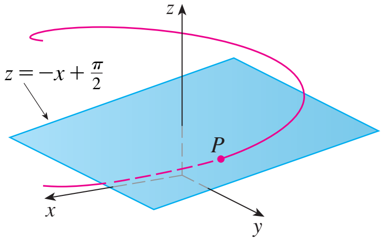


FIGURA 8

EXEMPLO 8 Determine e desenhe o círculo osculador da parábola $y = x^2$ na origem.

SOLUÇÃO Do Exemplo 5, a curvatura da parábola na origem é $\kappa(0) = 2$. Dessa forma, o raio do círculo osculador é $1/\kappa = \frac{1}{2}$ e seu centro é $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Sua equação é, portanto,

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

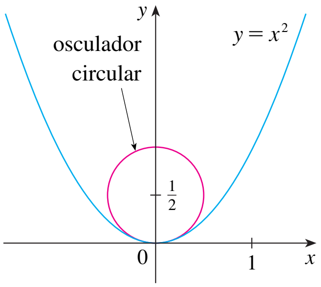


FIGURA 9

TEC *Visual 13.3C* mostra como o círculo osculador muda conforme um ponto se move ao longo de uma curva.

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 Exercícios

1–6 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, 3 \operatorname{sen} t\rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7–9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle\sqrt{t}, t, t^2\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{-t}, te^{-t}\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 3$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \operatorname{sen} 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

11. Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 2$.

13–14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t}\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t. Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17–20

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3 \operatorname{sen} t\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t\cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t\rangle, \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle\sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t}\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, t^2\rangle$

21–23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 4\cos t\,\mathbf{k}$

24. Encontre a curvatura da curva $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t \operatorname{sen} t, t\rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 5t$ e calcule a curvatura no ponto $(1, 0, 0)$.

27–29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

27. $y = x^4$ **28.** $y = \operatorname{tg} x$ **29.** $y = xe^x$

30–31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$?

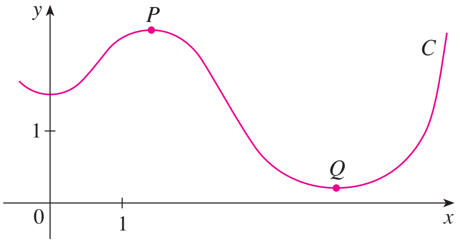
30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.
(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.



34–35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura $\kappa(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

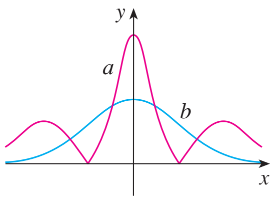
SCA **36–37** Trace a curva espacial e sua função curvatura $\kappa(t)$. Comente como a curvatura reflete a forma da curva.

36. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \text{sen}\, t, 1 - \cos t, 4\cos(t/2)\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 8\pi$

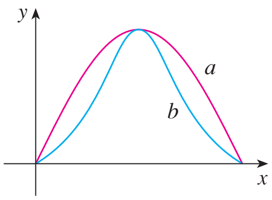
37. $\mathbf{r}(t) = \langle te^e, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

38–39 Dois gráficos, a e b, são mostrados. Um é a curva $y = f(x)$ e o outro é o gráfico da sua função curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

38.



39.



SCA **40.** (a) Desenhe a curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, 3t, \text{sen}\, 2t, \text{sen}\, 3t\rangle$. Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?
(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

SCA **41.** O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\right\rangle$ é mostrado na Figura 12(b) da Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

42. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$ é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t.

43–45 Use a fórmula do Exercício 42 para calcular a curvatura.

43. $x = t^2, \quad y = t^3$

44. $x = a\cos\omega t, \quad y = b\,\text{sen}\,\omega t$

45. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\,\text{sen}\, t$

---

46. Considere a curvatura em $x = 0$ para cada membro da família de funções $f(x) = e^{cx}$. Para quais membros $\kappa(0)$ é maior?

47–48 Encontre os vetores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ no ponto indicado.

47. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t\right\rangle, \quad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$

48. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{sen}\, t, \ln\cos t\rangle, \quad (1, 0, 0)$

49–50 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

49. $x = 2\,\text{sen}\, 3t, \quad y = t, \quad z = 2\cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$

50. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

---

51. Encontre as equações para o círculo osculador da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

52. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

53. Em qual ponto da curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ o plano normal é paralelo ao plano $6x + 6y - 8z = 1$?

SCA **54.** Existe um ponto da curva do Exercício 53 onde o plano osculador é paralelo ao plano $x + y + z = 1$? [*Observação:* Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.]

55. Determine as equações dos planos normais e osculador da curva de interseção dos cilindros parabólicos $x = y^2$ e $z = x^2$ no ponto $(1, 1, 1)$.

56. Mostre que o plano osculador em cada ponto da curva $\mathbf{r}(t) = \left\langle t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2\right\rangle$ é o mesmo plano. O que você pode concluir sobre a curva?

57. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

58. Mostre que a curvatura de uma curva plana é $\kappa = |d\phi/ds|$, onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{i}$, isto é, ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

59. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{T}$.
(c) Deduza das partes (a) e (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algum número $\tau(s)$ chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)
(d) Mostre que para uma curva plana a torção é $\tau(s) = 0$.

60. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(A Fórmula 1 é fornecida a partir do Exercício 57 e da Fórmula 3 vem de Exercício 59.) Use o fato de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deduzir Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

61. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Apóstrofo denota derivadas com relação a t. Comece como na demonstração do Teorema 10.)
(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$
(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

62. Mostre que a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt \rangle$, onde a e b são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 61(d).]

63. Utilize a fórmula do Exercício 61(d) para calcular a torção da curva $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \right\rangle$.

64. Encontre a curvatura e torção da curva $x = \operatorname{senh} t$, $y = \cosh t$, $z = t$ no ponto (0, 1, 0).

65. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares. O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 ângströms (1 Å $= 10^{-8}$ cm). Cada hélice, em uma volta completa, sobe 34 Å, e existem cerca de $2{,}9 \times 10^8$ voltas completas. Estime o comprimento de cada hélice circular.

66. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea de modo a fazer transições lisas entre as seções de trilhos retos. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo x precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta $y = 1$ para $x \geqslant 1$.

(a) Determine um polinômio $P = P(x)$ de grau 5 tal que a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.

(b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de F.

13.4 Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

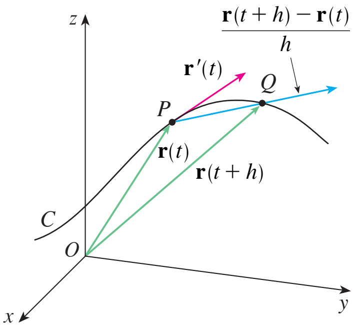


FIGURA 1

Nesta seção, mostraremos como as ideias dos vetores tangente e normal, assim como as de curvatura, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando estão se movendo ao longo de uma curva espacial. Em particular, seguiremos os passos de Newton, usando seu método para deduzir a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário.

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante t é $\mathbf{r}(t)$. Observe da Figura 1 que, para pequenos valores de h, o vetor

$$\boxed{1} \qquad \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se aproxima da direção de movimento da partícula que se move ao longo da curva $\mathbf{r}(t)$. Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo. O vetor $\boxed{1}$ fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento h e seu limite é o **vetor velocidade** $\mathbf{v}(t)$ no instante t:

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)}$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

A **velocidade escalar** da partícula no instante t é a magnitude do vetor velocidade, ou seja, $|\mathbf{v}(t)|$. Isso é apropriado, pois, de $\boxed{2}$ e da Equação 13.3.7, temos

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{a taxa de variação da distância com relação ao tempo}$$

Como no caso de movimento unidimensional, a **aceleração** da partícula é definida como a derivada da velocidade:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EXEMPLO 1 O vetor posição de um objeto em movimento em um plano é dado por $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Determine a sua velocidade, a velocidade escalar aceleração quando $t = 1$ e ilustre geometricamente.

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração no instante t são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

e a velocidade escalar é

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Quando $t = 1$, temos

$$\mathbf{v}(1) = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}(1) = 6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Os vetores velocidade e aceleração estão mostrados na Figura 2.

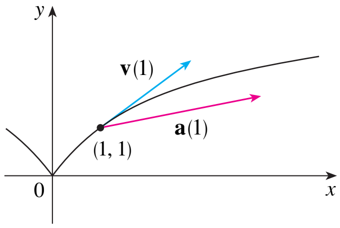


FIGURA 2

TEC *Visual 13.4* mostra vetores animados de velocidade e aceleração para objetos que se movem ao longo de várias curvas.

EXEMPLO 2 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar de uma partícula com vetor posição $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$.

SOLUÇÃO

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1 + t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2 + t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1 + t)^2 e^{2t}}$$

A Figura 3 mostra a trajetória da partícula do Exemplo 2 com vetores velocidade e aceleração quando $t = 1$.

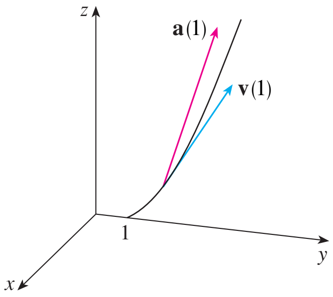


FIGURA 3

A integração de vetores introduzida na Seção 13.2 pode ser usada para achar o vetor posição quando os vetores velocidade ou aceleração são conhecidos, como no seguinte exemplo.

EXEMPLO 3 Uma partícula movendo-se começa numa posição inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$ com uma velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Sua aceleração é $\mathbf{a}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine a sua velocidade e posição no momento t.

SOLUÇÃO Uma vez que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt \\ &= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

Para determinarmos o valor da constante do vetor $\mathbf{C}$, usamos o fato de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. A equação anterior permite $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$, de modo que $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= (2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t)\,dt \\ &= \int [(2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}]\,dt \\ &= \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}\end{aligned}$$

Tomando $t = 0$, achamos que $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$, então a posição no tempo t é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$

A expressão para $\mathbf{r}(t)$ que obtivemos no Exemplo 3 foi usada para traçar a trajetória da partícula na Figura 4 para $0 \leqslant t \leqslant 3$.

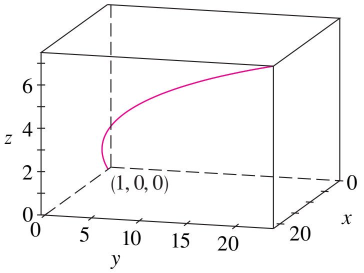


FIGURA 4

Em geral, por integração vetorial podemos recuperar a velocidade quando a aceleração for conhecida e a posição quando a velocidade for conhecida:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\,du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\,du$$

Se a força que age sobre a partícula é conhecida, então a aceleração pode ser determinada a partir da **Segunda Lei de Newton para o Movimento**. A versão vetorial dessa lei nos diz que, se em qualquer instante de tempo t, uma força $\mathbf{F}(t)$ age sobre um objeto m produzindo uma aceleração $\mathbf{a}(t)$, então

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

A velocidade angular do objeto em movimento com posição P é $\omega = d\theta/dt$, onde θ é o ângulo mostrado na Figura 5.

EXEMPLO 4 Um objeto de massa m que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante ω tem vetor posição dado por $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$. Determine a força que age sobre o objeto e mostre que sua direção e sentido são dados pela reta que passa pela origem, apontando em direção à origem.

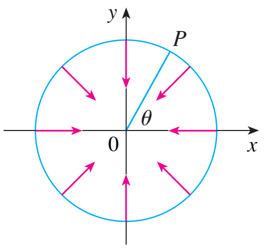


FIGURA 5

SOLUÇÃO Para encontrarmos a força, precisamos primeiro saber a aceleração:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

Portanto, pela Segunda Lei de Newton, temos a força

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j})$$

Observe que $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\mathbf{r}(t)$. Isso mostra que a força age na direção oposta ao vetor radial $\mathbf{r}(t)$ e, portanto, aponta para a origem (veja a Figura 5). Essa força é chamada *força centrípeta*. ■

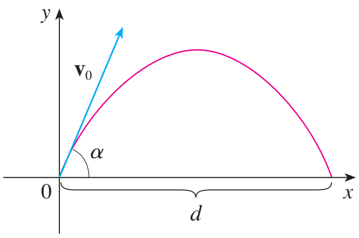


FIGURA 6

EXEMPLO 5 Um projétil é disparado com ângulo de elevação α e velocidade inicial $\mathbf{v}_0$. (Veja a Figura 6.) Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade, determine a função posição $\mathbf{r}(t)$ do projétil. Para qual valor de α obtemos maior alcance (distância horizontal percorrida)?

SOLUÇÃO Fixamos os eixos coordenados de forma que a origem coincida com o ponto inicial da trajetória do projétil. Como a força devida à gravidade age para baixo, temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j}$$

onde $g = |\mathbf{a}| \approx 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Assim,

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$$

Uma vez que $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$, temos

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Portanto

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando novamente, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Mas $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, e então o vetor posição do projétil é dado por

$$\boxed{3}\qquad \mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0$$

Se escrevermos $|\mathbf{v}_0| = v_0$ (a velocidade escalar inicial do projétil), então

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{j}$$

e a Equação 3 se torna

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

As equações paramétricas da trajetória são

Se você eliminar t das Equações 4, verá que y é uma função quadrática de x. Assim, o caminho do projétil faz parte de uma parábola.

$$\boxed{4} \qquad \boxed{x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2}$$

A distância horizontal d é dada pelo valor de x quando $y = 0$. Ajustando $y = 0$, obtemos $t = 0$ ou $t = (2v_0 \operatorname{sen} \alpha)/g$. O último valor de t fornece

$$d = x = (v_0 \cos \alpha)\frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{v_0^2(2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Claramente, d tem valor máximo quando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, ou seja, quando $\alpha = \pi/4$. ■

EXEMPLO 6 Um projétil é lançado com velocidade de disparo de 150 m/s e ângulo de elevação de 45° de um ponto 10 m acima do nível do solo. Onde o projétil vai atingir o solo e com que velocidade escalar?

SOLUÇÃO Se tomarmos a origem no nível do solo, então a posição inicial do projétil é (0, 10) e, portanto, precisamos adequar a Equação 4 adicionando 10 na expressão para y. Com $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45°$ e $g = 9{,}8$ m/s^2, temos

$$x = 150 \cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}\,t$$

$$y = 10 + 150 \operatorname{sen}(\pi/4)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}\,t - 4{,}9t^2$$

O impacto ocorrerá quando $y = 0$, isto é, $4{,}9t^2 - 75\sqrt{2}t - 10 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática (e usando somente o valor positivo de t), temos

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11\,250 + 196}}{9{,}8} \approx 21{,}74$$

Então $x \approx 75\sqrt{2}\,(21{,}74) \approx 2.306$, assim o projétil atinge o solo a uma distância de cerca de 2.306 m.

A velocidade do projétil é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9{,}8t\right)\mathbf{j}$$

Portanto, sua velocidade escalar no impacto é

$$|\mathbf{v}(21{,}74)| = \sqrt{(75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2} - 9{,}8 \cdot 21{,}74)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$ ■

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Quando estudamos o movimento de uma partícula, é frequentemente útil decompor a aceleração em duas componentes, uma na direção da tangente e outra na direção da normal. Se escrevemos $v = |\mathbf{v}|$ para a velocidade escalar da partícula, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

e, assim, $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$

Se derivarmos ambos os lados em relação a t, obteremos

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Se usarmos a expressão da curvatura dada pela Equação 13.3.9, temos

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \qquad \text{logo} \qquad |\mathbf{T}'| = \kappa v \tag{6}$$

O vetor normal unitário foi definido na seção anterior como $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, então $\boxed{6}$ fornece

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v \mathbf{N}$$

e a Equação 5 se torna

$$\boxed{\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}} \tag{7}$$

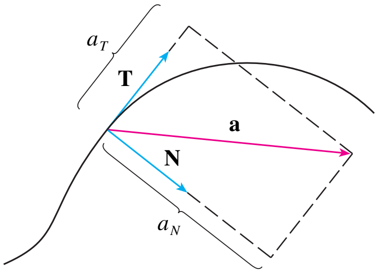


FIGURA 7

Escrevendo a_T e a_N para as componentes tangencial e normal da aceleração, temos

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

onde

$$a_T = v' \qquad \text{e} \qquad a_N = \kappa v^2 \tag{8}$$

Essa conclusão está ilustrada na Figura 7.

Vamos olhar agora o que a Fórmula 7 nos diz. A primeira coisa a observar é que o vetor binormal **B** não aparece. Independentemente de como o objeto se move no espaço, sua aceleração sempre está nos planos de **T** e **N** (o plano osculador). (Lembre-se de que **T** fornece a direção e sentido do movimento e **N** aponta a direção na qual a curva está se entortando.) Em seguida, observamos que a componente tangencial da aceleração é v', a taxa de variação da velocidade escalar, e a componente normal da aceleração é κv^2, a curvatura vezes o quadrado da velocidade escalar. Isso explica o que acontece com um passageiro em um carro — uma virada brusca em uma rua pode ser vista como um valor grande de curvatura κ, de forma que a componente da aceleração perpendicular ao movimento é grande e o passageiro é jogado contra a porta do carro. A alta velocidade em uma curva tem o mesmo efeito: de fato, se dobrarmos nossa velocidade escalar, a_N será aumentada por um fator de 4.

Apesar de termos uma expressão para as componentes tangencial e normal da aceleração na Equação 8, é desejável obter expressões que dependam somente de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$. Com essa finalidade, tomamos o produto escalar de $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ com $\mathbf{a}$ como dada na Equação 7:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}) \\
&= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3 \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \\
&= vv' && \text{(uma vez que } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ e } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Portanto

$$a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \tag{9}$$

Usando a fórmula da curvatura dada pelo Teorema 13.3.10, temos

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \tag{10}$$

EXEMPLO 7 Uma partícula se move com função posição $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$. Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

SOLUÇÃO

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$$

Portanto, da Equação 9 vem que a componente tangencial é

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Uma vez que

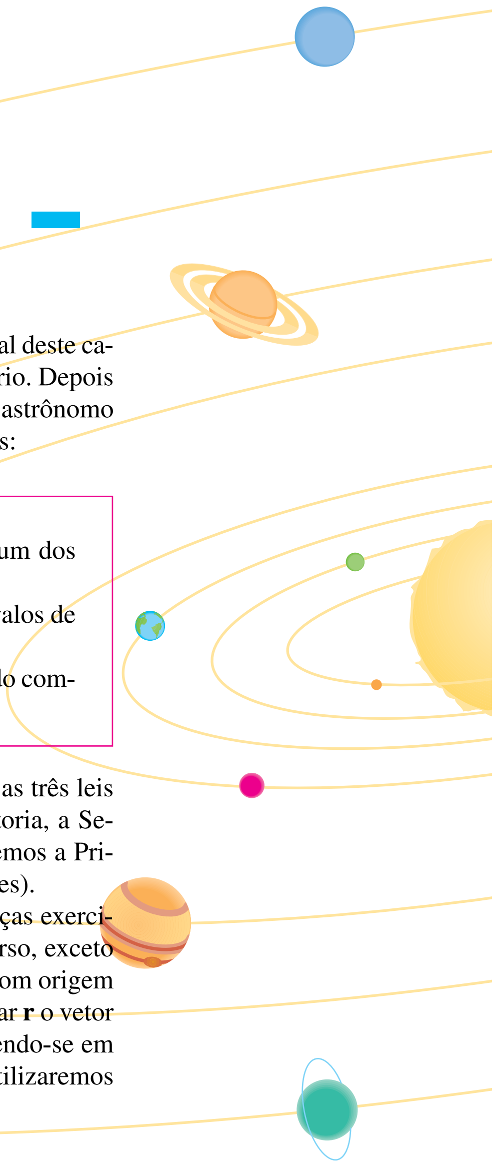
$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$$

da Equação 10 obtemos a componente normal

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Descreveremos agora um dos principais feitos do cálculo mostrando como o material deste capítulo pode ser usado para demonstrar as leis de Kepler para o movimento planetário. Depois de 20 anos estudando as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou as seguintes três leis:



Leis de Kepler

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Em seu livro *Principia Mathematica*, de 1687, sir Isaac Newton mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como consequências de outras duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. A seguir, demonstraremos a Primeira Lei de Kepler. As leis restantes são deixadas como exercícios (com sugestões).

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros corpos celestes, podemos ignorar todos os outros corpos do Universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o vetor posição do planeta. (Poderíamos igualmente considerar $\mathbf{r}$ o vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendo-se em torno de uma estrela.) O vetor velocidade é $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ e o vetor aceleração é $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

Segunda Lei do Movimento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Lei de Gravitação: $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\dfrac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$

onde $\mathbf{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$, e $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{r}$.

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para $\mathbf{F}$ nas duas leis de Newton, chegamos a

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\,\mathbf{r}$$

e, assim, **a** é paralelo a **r**. Segue que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Usamos a Fórmula 5 no Teorema 13.2.3 para escrever

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}'$$

$$= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Logo,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

onde **h** é um vetor constante. (Podemos assumir que $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$; isto é, **r** e **v** não são paralelos.) Isto significa que o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é perpendicular a **h** para todos os valores de t, de modo que o planeta sempre se situa no plano através da origem perpendicular de **h**. Assim, a órbita do planeta é uma curva plana.

Para demonstrarmos a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor **h** como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' \\ &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \\ &= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{h} &= \frac{-GM}{r^2}\,\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM\,\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \\ &= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \qquad \text{(pelo Teorema 12.4.11, Propriedade 6)} \end{aligned}$$

Mas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ e, uma vez que $|\mathbf{u}(t)| = 1$, segue-se a partir do Exemplo 4, na Seção 13.2, que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. Portanto

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

e

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\boxed{11} \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

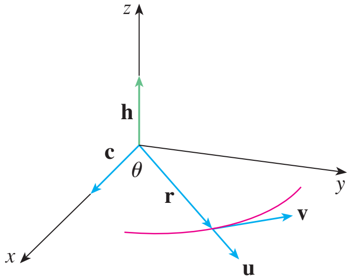


FIGURA 8

onde **c** é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica **k** aponte na direção do vetor **h**. Em seguida, o planeta se move no plano xy. Como ambos $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ e **u** são perpendiculares a **h**, a Equação 11 mostra que **c** pertence ao plano xy. Isso significa que podemos escolher os eixos x e y de forma que o vetor **i** esteja na direção de **c**, como mostrado na Figura 8.

Se θ é o ângulo entre **c** e **r**, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \\ &= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}|\cos\theta = GMr + rc\cos\theta \end{aligned}$$

onde $c = |\mathbf{c}|$. Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM}\,\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

onde $e = c/(GM)$. Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde $h = |\mathbf{h}|$. Logo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Escrevendo $d = h^2/c$, obtemos a equação

$$\boxed{12} \qquad r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade e. Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e assim a cônica deve ser uma elipse.

Isso completa a dedução da Primeira Lei de Kepler. Vamos orientá-lo através da derivação das Segunda e Terceira Leis do Projeto Aplicado. As demonstrações dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta poderosa na descrição de leis da natureza.

13.4 Exercícios

1. A tabela fornece coordenadas de uma partícula movendo-se no espaço ao longo de uma curva suave.

(a) Determine a velocidade média nos intervalos de tempo [0, 1], [0,5; 1], [1, 2] e [1; 1,5].

(b) Estime a velocidade e a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.

t	x	y	z
0	2,7	9,8	3,7
0,5	3,5	7,2	3,3
1,0	4,5	6,0	3,0
1,5	5,9	6,4	2,8
2,0	7,3	7,8	2,7

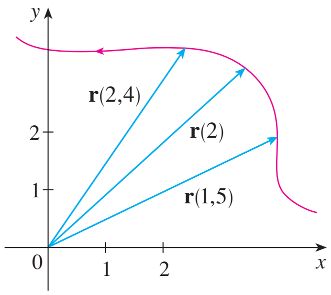
2. A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.

(a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $2 \leqslant t \leqslant 2{,}4$.

(b) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1{,}5 \leqslant t \leqslant 2$.

(c) Escreva uma expressão para o vetor velocidade $\mathbf{v}(2)$.

(d) Desenhe uma aproximação do vetor $\mathbf{v}(2)$ e estime a velocidade escalar da partícula em $t = 2$.



3–8 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle -\frac{1}{2}t^2, t \rangle, \quad t = 2$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 - t, 4\sqrt{t} \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{2t}\,\mathbf{j}, \quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

9–14 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 3t, 2\,\mathrm{sen}\,t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^{t}\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^{2}\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^{t}(\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j} + t^{2}\,\mathbf{k}$

15–16 Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

15. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

16. $\mathbf{a}(t) = 2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 12t^{2}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17–18

(a) Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração e suas velocidade e posição iniciais.

(b) Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\,\mathbf{i} + e^{t}\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. A função posição de uma partícula é dada por $\mathbf{r}(t) = \langle t^{2}, 5t, t^{2} - 16t\rangle$. Quando sua velocidade escalar é mínima?

20. Qual a força necessária para que uma partícula de massa m tenha a função posição $\mathbf{r}(t) = t^{3}\,\mathbf{i} + t^{2}\,\mathbf{j} + t^{3}\,\mathbf{k}$?

21. Uma força com magnitude 20 N atua diretamente para cima do plano xy em um objeto com massa de 4 kg. O objeto começa na origem com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Encontre a sua função posição e a sua velocidade no instante t.

22. Mostre que, se uma partícula se move com velocidade escalar constante, então os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

23. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 200 m/s e ângulo de elevação de 60º. Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escalar no impacto.

24. Repita o Exercício 23, considerando agora o projétil disparado de uma posição 100 m acima do solo.

25. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de 45º em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qual a velocidade escalar inicial da bola?

26. Uma arma é disparada com ângulo de elevação de 30º. Qual a velocidade de disparo se o máximo de altura que a bala atinge é de 500 m?

27. A velocidade de disparo de uma arma é 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância.

28. No beisebol, um batedor rebate uma bola, que está 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés/s e com ângulo de 50º acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)

29. Uma cidade medieval tem a forma de um quadrado e está protegida pelas muralhas com comprimento de 500 m de altura de 15 m. Você é o comandante de um exército de ataque e o mais próximo que você pode chegar da muralha é 100 m. Seu plano é incendiar à cidade catapultando rochas aquecidas sobre a parede (com uma velocidade inicial de 80 m/s). Em que intervalo de ângulos você deve dizer a seus homens para armar a catapulta? (Suponha que a trajetória das rochas seja perpendicular à muralha.)

30. Mostre que um projétil atinge três quartos da sua altura máxima em metade do tempo necessário para atingir a sua altura máxima.

31. Uma bola é lançada para o ar para leste a partir da origem (na direção do eixo x positivo). A velocidade inicial é $50\mathbf{i} + 80\,\mathbf{k}$, com a velocidade medida em pés por segundo. A rotação da bola resulta em uma aceleração em direção ao sul de 4 pés/s², de modo que o vetor aceleração é $\mathbf{a} = -4\mathbf{j} - 32\,\mathbf{k}$. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

32. Uma bola com massa 0,8 kg é arremessada ao ar em direção ao sul com velocidade escalar de 30 m/s e ângulo de 30º com o solo. Um vento do oeste aplica uma força constante de 4 N à bola na direção leste. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

33. A água, descendo por um trecho reto de um rio, em geral escoa mais rapidamente no meio e a velocidade escalar diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio escoando para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a velocidade máxima da água é de 3 m/s, pode-se utilizar uma função quadrática como um modelo básico para a taxa de fluxo de água x unidades de distância da margem oeste: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Um barco se move com uma velocidade escalar constante de 5 m/s a partir de um ponto de A na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a terra firme? Faça um gráfico da trajetória do barco.

(b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco para terra no ponto B na margem leste em frente A. Se mantivermos uma velocidade constante de 5 m/s, e uma direção constante, encontre o ângulo em que o barco deve dirigir. Depois, faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?

34. Outro modelo razoável para a velocidade escalar da água do rio no Exercício 33 é uma função senoidal: $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(\pi x/40)$. Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de A até B com direção constante e velocidade escalar constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

35. Uma partícula tem função posição $\mathbf{r}(t)$. Se $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t)$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante, descrevem o caminho da partícula.

36. (a) Se uma partícula se move ao longo de uma linha reta, o que você pode dizer sobre seu vetor aceleração?

(b) Se uma partícula se move com velocidade constante ao longo de uma curva, o que você pode dizer sobre seu vetor aceleração?

37–42 Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

37. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^{3})\,\mathbf{i} + 3t^{2}\,\mathbf{j}$

38. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + (t^{2} - 2t)\,\mathbf{j}$

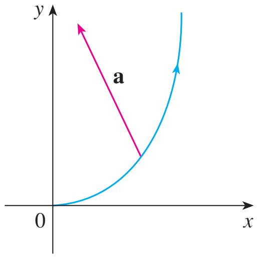
39. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^{2}\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = e^{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

42. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos^{2}t\,\mathbf{j} + \mathrm{sen}^{2}t\,\mathbf{k}$

43. O módulo do vetor aceleração **a** é 10 cm/s^2. Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de **a**.



44. Se uma partícula com massa m se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$, então seu **momento angular** é definido como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ e seu **torque** é definido como $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Mostre que $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$. Deduza que, se $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$ para todo t, então $\mathbf{L}(t)$ é constante. (Essa é a *lei de conservação do momento angular*.)

45. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

e as coordenadas de uma estação espacial são (6, 4, 9). O capitão quer que a nave atraque na estação espacial. Quando os motores da nave devem ser desligados?

46. Um foguete queimando seu combustível a bordo enquanto se move através do espaço tem velocidade $\mathbf{v}(t)$ e massa $m(t)$ no momento t. Se os gases de exaustão escapam com velocidade de $\mathbf{v}_e$ em relação ao foguete, pode deduzir-se a partir da Segunda Lei de Newton do Movimento que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Mostre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln \dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da velocidade escalar de escape de seus gases de combustão, que fração de sua massa inicial o foguete deverá queimar como combustível?

PROJETO APLICADO

LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento planetário, baseando-se em uma grande quantidade de dados relativos à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Kepler formulou essas leis, pois elas se ajustavam aos dados astronômicos. Ele não foi capaz de perceber por que elas eram válidas nem como se relacionavam umas com as outras. Mas sir Isaac Newton, em seu *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou como deduzir as três leis de Kepler de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. Na Seção 13.4 demontramos a Primeira Lei de Kepler usando o cálculo de funções vetoriais. Neste projeto, guiaremos você pela demonstração da Segunda e da Terceira Leis de Kepler e exploraremos suas consequências.

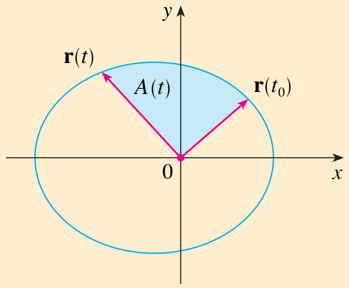
1. Utilize os seguintes passos para demonstrar a Segunda Lei de Kepler. A notação será a mesma que foi empregada na demonstração da Primeira Lei na Seção 13.4. Em particular, use coordenadas polares $\mathbf{r} = (r\cos\theta)\,\mathbf{i} + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{j}$.

(a) Mostre que $\mathbf{h} = r^2\dfrac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$.

(b) Deduza que $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = h$.

(c) Se $A = A(t)$ é a área varrida pelo vetor radical $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ no intervalo de tempo $[t_0, t]$ como na figura, mostre que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$



(d) Deduza que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}h = \text{constante}$$

Essa equação mostra que a taxa na qual A é percorrida é constante e demonstra a Segunda Lei de Kepler.

2. Seja T o período de um planeta em torno do Sol; ou seja, T é o tempo necessário para o planeta dar uma volta completa em torno do Sol, em sua órbita elíptica. Suponha que os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse sejam $2a$ e $2b$.

(a) Use a parte (d) do Problema 1 para mostrar que $T = 2\pi ab/h$.

(b) Mostre que $\dfrac{h^2}{GM} = ed = \dfrac{b^2}{a}$.

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}a^3$.
Isso demonstra a Terceira Lei de Kepler.
[Observe que a constante de proporcionalidade $4\pi^2/(GM)$ independe do planeta.]

3. O período da Terra girando em torno do Sol é de aproximadamente 365,25 dias. Utilize esse fato e a Terceira Lei de Kepler para determinar o eixo maior da órbita terrestre. Você precisará do valor da massa do Sol, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, e da constante gravitacional, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

4. É possível colocar um satélite em órbita em torno da Terra de modo que ele permaneça fixo em uma posição localizada sobre o equador. Calcule a altitude necessária para esse satélite. A massa da Terra é $5{,}98 \times 10^{24}$ kg; seu raio é $6{,}37 \times 10^{6}$ m. (Esta órbita é chamada Órbita Geoestacionária Clarke, em homenagem a Arthur C. Clarke, quem primeiro propôs a idéia, em 1945. O primeiro satélite, *Syncom II*, foi lançado em julho de 1963.)

13 Revisão

Verificação de Conceitos

1. O que é uma função vetorial? Como calcular sua derivada e sua integral?

2. Qual a relação entre funções vetoriais e curvas espaciais?

3. Como achar o vetor tangente a uma curva suave em um ponto? Como achar a reta tangente? Como determinar o vetor tangente unitário?

4. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são funções vetoriais diferenciáveis, c é um escalar e f é uma função real, escreva as regras para derivar as seguintes funções vetoriais:

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ (b) $c\mathbf{u}(t)$ (c) $f(t)\,\mathbf{u}(t)$
(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ (e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ (f) $\mathbf{u}(f(t))$

5. Como achar o comprimento de uma curva espacial dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$?

6. (a) Qual a definição de curvatura?
(b) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{T}'(t)$.
(c) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.
(d) Escreva a fórmula para curvatura de uma curva plana com equação $y = f(x)$.

7. (a) Escreva as fórmulas para os vetores normal e binormal de uma curva suave espacial $\mathbf{r}(t)$.
(b) O que é o plano normal de uma curva em um ponto? E o plano osculador? O que é o círculo osculador?

8. (a) Como determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva espacial?
(b) Escreva a aceleração em termos de suas componentes tangencial e normal.

9. Quais são as leis de Kepler?

Quiz Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. A curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$ é uma reta.

2. A curva $\mathbf{r}(t) = \langle 0, t^2, 4t\rangle$ é uma parábola.

3. A curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3 - t, 0\rangle$ é uma linha que passa através da origem.

4. A derivada da função vetorial é obtida derivando cada componente da função.

5. Se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são funções vetoriais diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

6. Se $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial diferenciável, então

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$

7. Se $\mathbf{T}(t)$ é o vetor tangente unitário de uma curva suave, então a curvatura é $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$.

8. O vetor binormal é $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$.

9. Suponha que f seja duas vezes continuamente diferenciável. Em um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$, a curvatura é 0.

10. Se $\kappa(t) = 0$ para todo t, a curva é uma reta.

11. Se $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todo t, então $|\mathbf{r}'(t)|$ é constante.

12. Se $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todo t, então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.

13. O círculo osculador de uma curva C em um ponto tem o mesmo vetor tangente, vetor normal e curvatura que C naquele ponto.

14. As parametrizações diferentes de uma mesma curva resultam em vetores tangentes idênticos em um mesmo ponto da curva.

Exercícios

1. (a) Esboce a curva com função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \qquad t \geqslant 0$$

(b) Encontre $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

2. Seja $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2 - t}, (e^t - 1)/t, \ln(t + 1) \rangle$.

(a) Determine o domínio de $\mathbf{r}$.

(b) Encontre $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$.

(c) Encontre $\mathbf{r}'(t)$.

3. Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $x + z = 5$.

4. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} 2t$, $z = 2 \operatorname{sen} 3t$ no ponto $(1, \sqrt{3}, 2)$. Desenhe a curva e a tangente em uma mesma tela.

5. Se $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}$, calcule $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt$.

6. Seja C a curva com equação $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln t$. Encontre (a) o ponto em que C intersecta o plano xz,

(b) as equações paramétricas da reta tangente em $(1, 1, 0)$, e

(c) uma equação do plano normal ao C em $(1, 1, 0)$.

7. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento do arco da curva com as equações $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 3$.

8. Determine o comprimento da curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

9. A hélice $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ intercepta a curva $\mathbf{r}_2(t) = (1 + t)\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ no ponto $(1, 0, 0)$. Determine o ângulo de intersecção dessas curvas.

10. Reparametrize a curva $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t \cos t\,\mathbf{k}$ com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto $(1, 0, 1)$ na direção crescente de t.

11. Para a curva dada por $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, t \right\rangle$, determine

(a) o vetor tangente unitário

(b) o vetor normal unitário e

(c) a curvatura.

12. Encontre a curvatura da elipse $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ no ponto $(3, 0)$ e $(0, 4)$.

13. Encontre a curvatura da curva $y = x^4$ no ponto $(1, 1)$.

14. Determine uma equação do círculo osculador da curva $y = x^4 - x^2$ na origem. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.

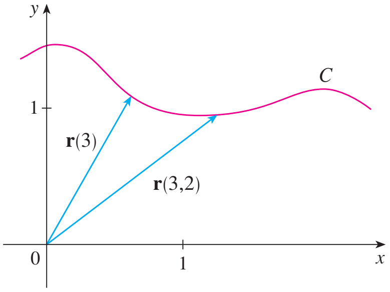
15. Determine uma equação do plano osculador da curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = t$, $z = \cos 2t$ no ponto $(0, \pi, 1)$.

16. A figura mostra a curva C traçada por uma partícula com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.

(a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $3 \leqslant t \leqslant 3{,}2$.

(b) Escreva a expressão para a velocidade $\mathbf{v}(3)$.

(c) Escreva uma expressão para o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(3)$ e desenhe-o.



17. Uma partícula se move com função posição $\mathbf{r}(t) = t \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$. Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da partícula.

18. Uma partícula começa na origem com velocidade inicial $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Sua aceleração é $\mathbf{a}(t) = 6t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$. Determine sua função posição.

19. Um atleta arremessa um disco em um ângulo de 45° em relação à horizontal com velocidade escalar inicial de 13 m/s. Ele deixa sua mão 2 m acima do solo.

(a) Onde está o disco 2 segundos depois?

(b) Qual a altura máxima que o disco atinge?

(c) Onde o disco atinge o chão?

20. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que se move com vetor posição

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$$

21. Um disco de raio está rodando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante ω. Uma partícula inicia no centro do disco e se move em direção às bordas em uma direção radial fixa de forma que sua posição no instante t, $t \geqslant 0$, é dada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{R}(t)$, onde

$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$

(a) Mostre que a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula é

$$\mathbf{v} = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} + t\mathbf{v}_d$$

onde $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$ é a velocidade do ponto na borda do disco.

(b) Mostre que a aceleração $\mathbf{a}$ da partícula é

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_d + t\,\mathbf{a}_d$$

onde $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$ é a aceleração na borda do disco. O termo extra $2\,\mathbf{v}_d$ é chamado *aceleração de Coriolis*; é o resultado da interação entre a rotação do disco e o movimento da partícula. Podemos obter uma demonstração física dessa aceleração andando em direção à borda de um carrossel.

(c) Determine a aceleração de Coriolis de uma partícula que se move em um disco rodando segundo a equação

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos \omega t\,\mathbf{i} + e^{-t} \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$

22. No projeto de *curvas de transferência*, usadas para para ligar trechos de ferrovia em trilhos retos, é importante perceber que a

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

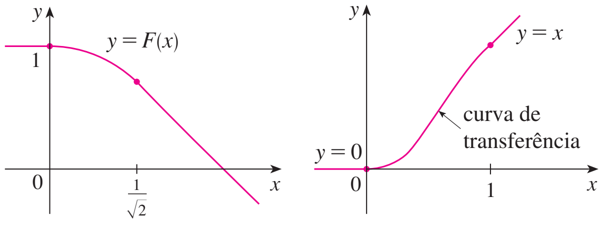
aceleração do trem deve ser contínua, de modo que a força de reação exercida pelo trem na pista também é contínua. Por causa das fórmulas para os componentes de aceleração na Seção 13.4, este só será o caso se a curvatura variar continuamente.

(a) Um candidato lógico à curva de transferência para juntar dois trilhos existentes dados por $y = 1$ para $x \leqslant 0$ e $y = \sqrt{2} - x$ para $x \geqslant 1/\sqrt{2}$ poderia ser a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 < x < 1/\sqrt{2}$, cujo gráfico é o arco de círculo mostrado na figura. À primeira vista, parece razoável. Demonstre que a função

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leqslant 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{sef } x \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua e tem derivada contínua, mas não tem curvatura contínua. Assim *f* não é uma curva de transferência adequada.

(b) Determine um polinômio de quinto grau para servir de curva de transferência entre os dois segmentos de reta: $y = 0$ para $x \leqslant 0$ e $y = x$ para $x \geqslant 1$. Poderíamos utilizar um polinômio de quarto grau? Use uma calculadora gráfica ou computador para esboçar o gráfico da função "conectada" e verifique que ele se assemelha ao da figura.



23. Uma partícula *P* move-se com velocidade angular constante ω em torno de um círculo com centro na origem e raio *R*. A partícula é considerada em *movimento circular uniforme*. Suponha que o movimento seja no sentido anti-horário e que a partícula esteja no ponto $(R, 0)$ quando $t = 0$. O vetor posição no instante $t \geqslant 0$ é $\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t\, \mathbf{i} + R \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$.

(a) Encontre o vetor velocidade **v** e mostre que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$. Conclua que **v** é tangente ao círculo e tem sentido igual ao do movimento.

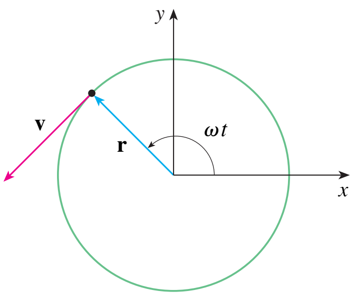
(b) Mostre que a velocidade $|\mathbf{v}|$ da partícula é a constante ωR. O *período T* da partícula é o tempo requerido para uma volta completa. Conclua que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Encontre o vetor aceleração **a**. Mostre que ele é proporcional a **r** e que aponta para a origem. Uma aceleração com essa propriedade é chamada *aceleração centrípeta*. Mostre que o módulo do vetor aceleração é $|\mathbf{a}| = R\omega^2$.

(d) Suponha que a partícula tenha uma massa *m*. Mostre que a magnitude da força **F** que é necessária para produzir esse movimento, denominada *força centrípeta*, é

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$



24. Uma curva circular de raio *R* em uma autoestrada é inclinada em um ângulo de θ de modo que um carro possa passar pela curva sem derrapar quando não existe atrito entre a estrada e os pneus. A perda de atrito ocorre, por exemplo, se a estrada está coberta com uma fina camada de água ou de gelo. A velocidade escalar nominal v_R associada a uma curva é a velocidade escalar máxima que o carro pode atingir sem derrapar. Suponha que um carro de massa *m* esteja transpondo a curva com a velocidade escalar nominal v_R. Duas forças que atuam sobre o carro: a força vertical, mg, devido ao peso do carro, e uma força **F** exercida pela estrada, perpendicular a ela (veja a figura).

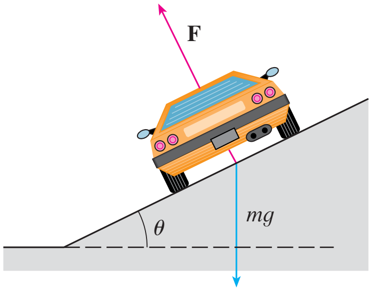
A componente vertical de **F** equilibra o peso do carro, de forma que $|\mathbf{F}| \cos \theta = mg$. A componente horizontal de **F** produz uma força centrípeta no carro de forma que, pela Segunda Lei de Newton e pela parte (d) do Problema 23,

$$|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta = \frac{m v_R^2}{R}$$

(a) Mostre que $v_R^2 = Rg \operatorname{tg} \theta$.

(b) Determine a velocidade escalar nominal associada a uma curva circular de raio 120 m que é inclinada em um ângulo de 12°.

(c) Suponha que os engenheiros projetistas queiram manter a inclinação em 12°, mas desejem aumentar a velocidade escalar nominal em 50%. Nesse caso, qual deve ser o raio da curva?



Problemas Quentes

1. Um projétil é disparado da origem com um ângulo de elevação α e velocidade inicial v_0. Supondo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força que age sobre o projétil seja a gravidade, g, foi mostrado no Exemplo 5 da Seção 13.4 que o vetor posição do projétil é $\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$. Também foi mostrado que o alcance máximo do projétil ocorre quando $\alpha = 45°$ e, nesse caso, o alcance é $R = v_0^2/g$.

(a) Qual é o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir a altura máxima e qual é essa altura?

(b) Fixe uma velocidade inicial v_0 e considere a parábola $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$, cujo gráfico é exposto na figura. Mostre que o projétil pode atingir qualquer alvo dentro ou na fronteira da região limitada pela parábola e pelo eixo x, e que o projétil não pode atingir nenhum alvo fora dessa região.

(c) Suponha que o lançador do projétil tenha um ângulo de inclinação α quando mirando um alvo que esteja suspenso a uma altura h diretamente acima de um ponto D unidades à frente. O alvo é solto no instante em que o projétil é lançado. Mostre que o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade v_0, desde que o projétil não atinja o solo "antes" de D.

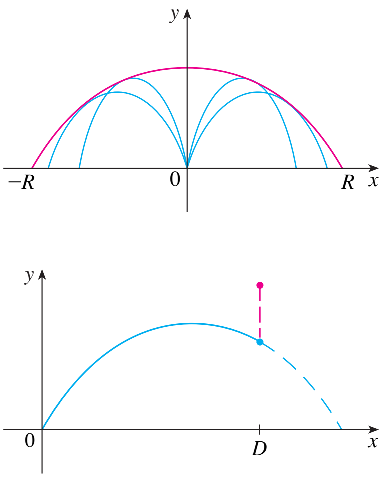


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

2. (a) Um projétil é disparado a partir da origem em direção a um plano inclinado para baixo em um ângulo θ com a horizontal. O ângulo de elevação do lançador e a velocidade escalar inicial do projétil são α e v_0, respectivamente. Encontre o vetor posição do projétil e as equações paramétricas da trajetória do projétil como funções do tempo t. (Ignore a resistência do ar.)

(b) Mostre que o ângulo α de elevação que vai maximizar o alcance do projétil no plano inclinado é a metade do ângulo entre o plano e a vertical.

(c) Suponha que o projétil seja lançado sobre um plano inclinado para cima cujo ângulo de inclinação é θ. Mostre que, a fim de maximizar o alcance (ladeira acima), o projétil deverá ser disparado em direção à metade do ângulo entre o plano e a vertical.

(d) Em um artigo apresentado em 1686, Edmond Halley resumiu as leis da gravitação e do movimento de projéteis e as aplicou à artilharia. Um dos problemas propostos por ele envolvia disparar um projétil para atingir um alvo a uma distância R em um plano inclinado para cima. Mostre que o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir o alvo, mas usando a menor quantidade de energia, é o mesmo que o ângulo da parte (c). (Use o fato de que a energia necessária para disparar o projétil é proporcional ao quadrado da velocidade inicial; assim, minimizar a energia equivale a minimizar a velocidade inicial.)

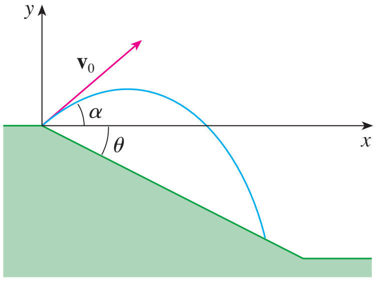


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

3. Uma bola rola de uma mesa com velocidade escalar de 0,5 m/s. A mesa tem 1,2 m de altura.

(a) Determine o ponto no qual a bola atinge o solo e encontre sua velocidade escalar no instante do impacto.

(b) Encontre o ângulo θ entre a trajetória da bola e a reta vertical que passa pelo ponto de impacto (veja a figura).

(c) Suponha que a bola repique no solo no mesmo ângulo com o qual ela o atinge, mas que perca 20% de sua velocidade escalar em virtude da energia absorvida no impacto. Onde a bola atinge o chão no segundo repique?

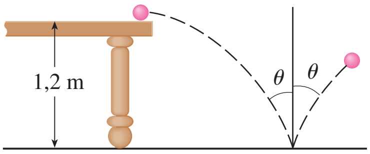


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

4. Determine a curvatura da curva com equações paramétricas

$$x = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right)d\theta \qquad y = \int_0^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right)d\theta$$

5. Se um projétil é disparado com ângulo de elevação α e velocidade escalar inicial v, as equações paramétricas de sua trajetória são $x = (v \cos \alpha)t$, $y = (v \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. (Veja o Exemplo 5, na Seção 13.4.) Sabemos que o alcance (distância horizontal percorrida) é maximizado quando $\alpha = 45°$. Qual valor de α maximiza a distância total percorrida pelo projétil? (Dê sua resposta com precisão de um grau.)

6. Um cabo tem raio r e comprimento L e é enrolado em torno de um carretel com raio R sem excesso de lapidação. Qual é o comprimento mais curto ao longo da bobina, que é coberta pelo cabo?

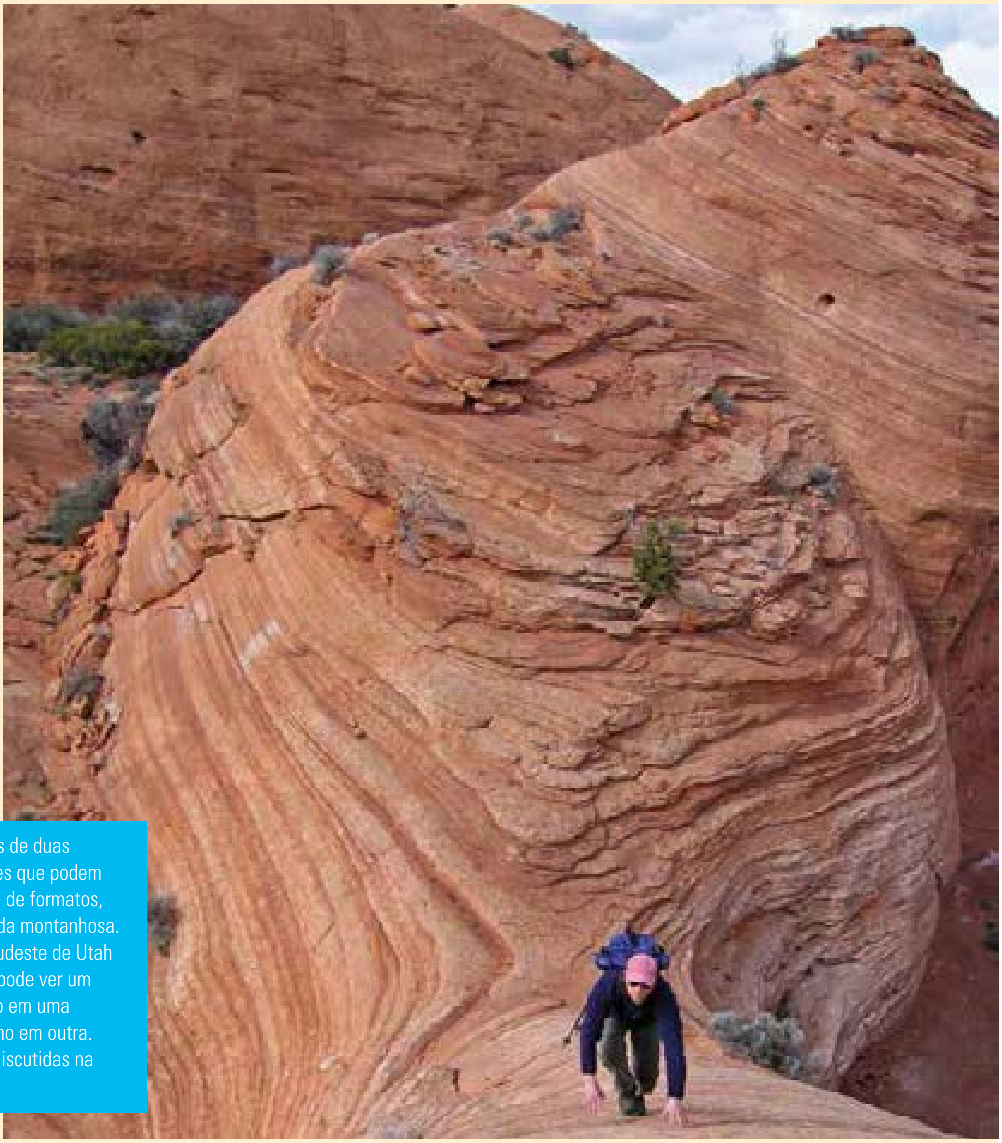
7. Mostre que a curva com equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3 \rangle$$

encontra-se em um plano e encontre uma equação do plano.

14

Derivadas Parciais



Os gráficos das funções de duas variáveis são superfícies que podem assumir uma variedade de formatos, incluindo sela ou estrada montanhosa. Nesta localização no sudeste de Utah (Arco de Phipps), você pode ver um ponto que é um mínimo em uma direção, mas um máximo em outra. Essas superfícies são discutidas na Seção 14.7.

Stan Wagon, Macalester College

Até aqui tratamos o cálculo de funções de uma única variável. No entanto, no mundo real, quantidades físicas frequentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em funções de várias variáveis e estenderemos nossas ideias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

14.1 Funções de Várias Variáveis

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

■ verbalmente	(pela descrição em palavras)
■ numericamente	(por uma tabela de valores)
■ algebricamente	(por uma fórmula explícita)
■ visualmente	(por um gráfico ou curvas de nível)

Funções de Duas Variáveis

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto. Podemos pensar em T como uma função de duas variáveis x e y, ou como uma função do par (x, y). Indicamos essa dependência funcional escrevendo $T = f(x, y)$.

O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h. De fato, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Podemos dizer que V é uma função de r e de h, e escrevemos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**. [Compare com a notação $y = f(x)$ para as funções de uma única variável.]

Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 1), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z. Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal chata com o formato de D, podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subentendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

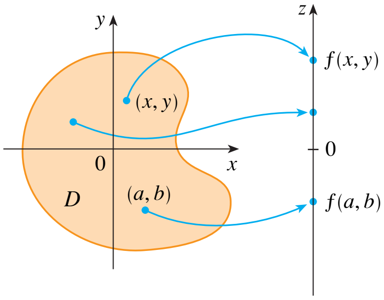


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUÇÃO

(a) $$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para f está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo. Portanto, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

A desigualdade $x + y + 1 \geqslant 0$, ou $y \geqslant -x - 1$, descreve os pontos que estão na linha $y = -x - 1$ ou acima dela, enquanto $x \neq 1$ significa que os pontos na linha $x = 1$ devem ser excluídos do domínio. (Veja a Figura 2.)

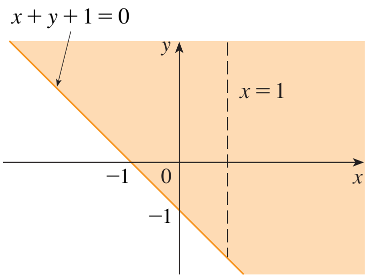


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

(b) $$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Já que $\ln(y^2 - x)$ é definido somente quando $y^2 - x > 0$, isto é, $x < y^2$, o domínio de f é $D = \{(x, y) | x < y^2\}$. Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola $x = y^2$. (Veja a Figura 3.)

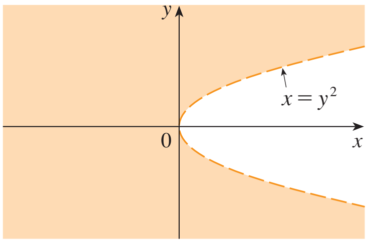


FIGURA 3
Domínio de $f(x, y) = x\ln(y^2 - x)$

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimativas numéricas de seus valores.

EXEMPLO 2 Em regiões com inverno severo, o *índice de sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v. Assim, W é uma função de T e de v, e podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

O Novo Índice de Sensação Térmica
Um novo índice de sensação térmica foi introduzido em novembro de 2001 e é muito mais preciso que o velho índice de medição de quanto frio se sente quando está ventando. O novo índice é baseado em um modelo de quão rápido um rosto humano perde calor. Foi desenvolvido por meio de ensaios clínicos nos quais voluntários eram expostos a uma variedade de temperaturas e velocidade do vento em um túnel de vento refrigerado.

TABELA 1 Índice de sensação térmica como função da temperatura do ar e velocidade do vento

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é −5 °C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de −15 °C sem vento. Portanto,

$$f(-5, 50) = -15$$

EXEMPLO 3 Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899–1922. Eles consideraram uma visão simplificada da economia em que a saída da produção é determinada pela quantidade de trabalho envolvido e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso. A função utilizada para modelar a produção era da forma

$$\boxed{1} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

onde P é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano); L, a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano); e K, a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios). Na Seção 14.3, mostraremos como obter a Equação 1 a partir de algumas hipóteses econômicas.

Cobb e Douglas usaram dados econômicos publicados pelo governo para construir a Tabela 2. Eles tomaram o ano de 1899 como base e P, L e K foram tomados valendo 100 nesse ano. Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens dos valores de 1899.

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da Tabela 2 à função

$$\boxed{2} \qquad P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

TABELA 2

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

(Veja o Exercício 79 para detalhes.)

Se usarmos o modelo dado pela função na Equação 2 para calcular a produção nos anos de 1910 e 1920, obteremos os valores

$$P(147, 208) = 1{,}01(147)^{0{,}75}(208)^{0{,}25} \approx 161{,}9$$

$$P(194, 407) = 1{,}01(194)^{0{,}75}(407)^{0{,}25} \approx 235{,}8$$

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção $\boxed{1}$ foi usada posteriormente em muitos contextos, de empresas individuais até questões globais de economia. Ela passou a ser conhecida como **função de produção de Cobb-Douglas**. Seu domínio é $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$, pois, como L e K representam mão de obra e capital, não podem ser negativos.

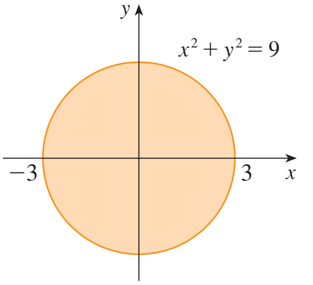


FIGURA 4
Domínio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EXEMPLO 4 Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUÇÃO O domínio de g é

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que é o disco com centro (0, 0) e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de g é

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

Como z é a raiz quadrada positiva, $z \geqslant 0$. Da mesma forma, por causa de $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, temos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

Assim, a imagem é

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$

Gráficos

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

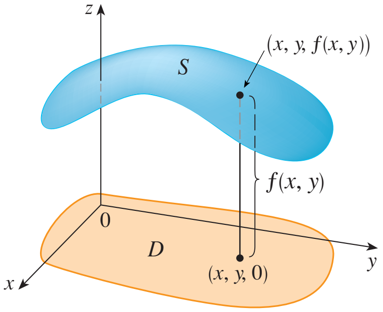


FIGURA 5

Assim como o gráfico de uma função f de uma única variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos visualizar o gráfico S de f como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy (veja a Figura 5).

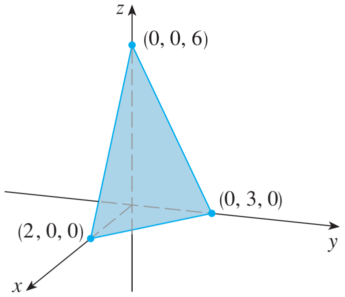


FIGURA 6

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUÇÃO O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano. Para desenharmos o plano, primeiro achamos as intersecções com os eixos. Colocando $y = z = 0$ na equação, obtemos $x = 2$ como a intersecção com o eixo x. Da mesma forma, a intersecção com y é 3 e a intersecção com z é 6. Isso nos permite esboçar a porção do gráfico pertencente ao primeiro octante na Figura 6.

A função do Exemplo 5 é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \qquad \text{ou} \qquad ax + by - z + c = 0$$

e, portanto, é um plano. Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

EXEMPLO 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUÇÃO O gráfico tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que reconhecemos como a equação da esfera de centro na origem e raio 3. Mas, como $z \geqslant 0$, o gráfico de g é somente a metade superior da esfera (veja a Figura 7).

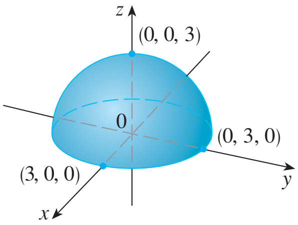


FIGURA 7
Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

OBSERVAÇÃO Uma esfera inteira não pode ser representada por uma única função de x e y. Como vimos no Exemplo 6, o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é representado pela função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O hemisfério inferior é representado pela função $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EXEMPLO 7 Utilize o computador para traçar o gráfico da função de produção de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de P para os valores de mão de obra L e capital K que estão entre 0 e 300. O computador utilizou os cortes verticais para desenhar a superfície. Vemos a partir desses cortes que o valor da produção P aumenta com o crescimento de L ou de K, como esperado.

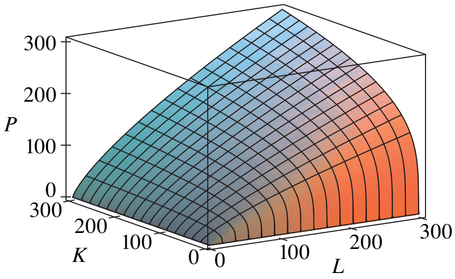


FIGURA 8

EXEMPLO 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO Observe que $h(x, y)$ é definida para todos os possíveis pares ordenados de números reais (x, y) e seu domínio é $\mathbb{R}^2$, o plano xy todo. A imagem de h é o conjunto $[0, \infty)$ de todos os reais não negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ e $y^2 \geqslant 0$, portanto $h(x, y) \geqslant 0$ para todo x e y.]

O gráfico de h tem a equação $z = 4x^2 + y^2$, que é o paraboloide elíptico que esboçamos no Exemplo 4 na Seção 12.6. Os cortes horizontais são elipses e os cortes verticas são parábolas (veja a Figura 9).

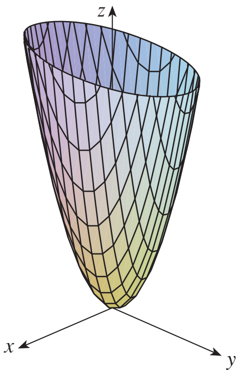
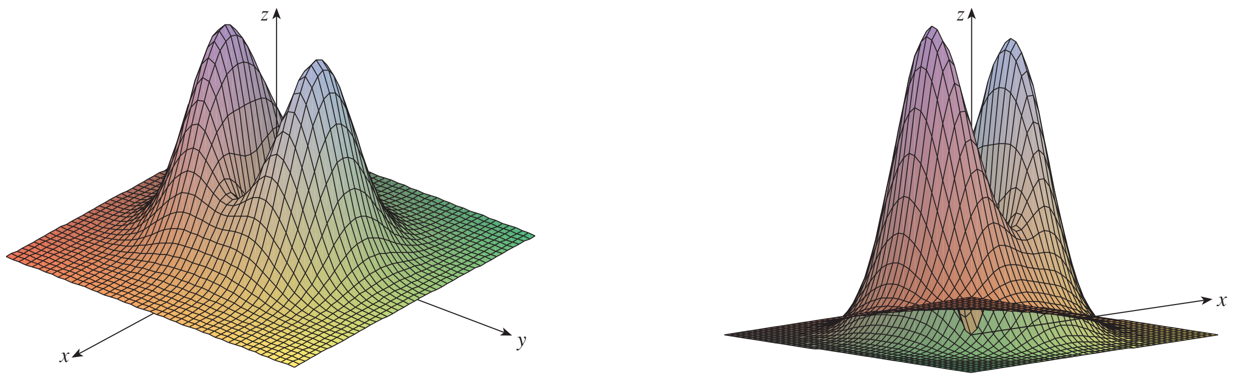


FIGURA 9
Gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

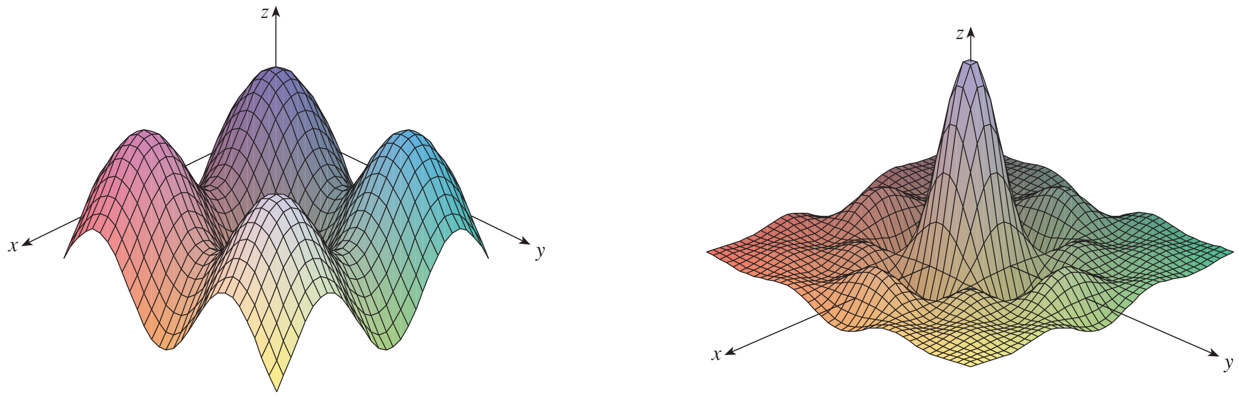
Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis. Na maioria desses programas, são desenhados os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

A Figura 10 mostra uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador. Observe que obtemos uma visão melhor da função quando a giramos de modo a olhá-la por diferentes pontos de vista. Nos itens (a) e (b) o gráfico de f é achatado e próximo do plano xy, exceto perto da origem; isso se dá porque $e^{-x^2-y^2}$ é muito pequeno quando x ou y é grande.



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

FIGURA 10

Curvas de Nível

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: diagramas de flechas e gráficos. Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível*.

Definição As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

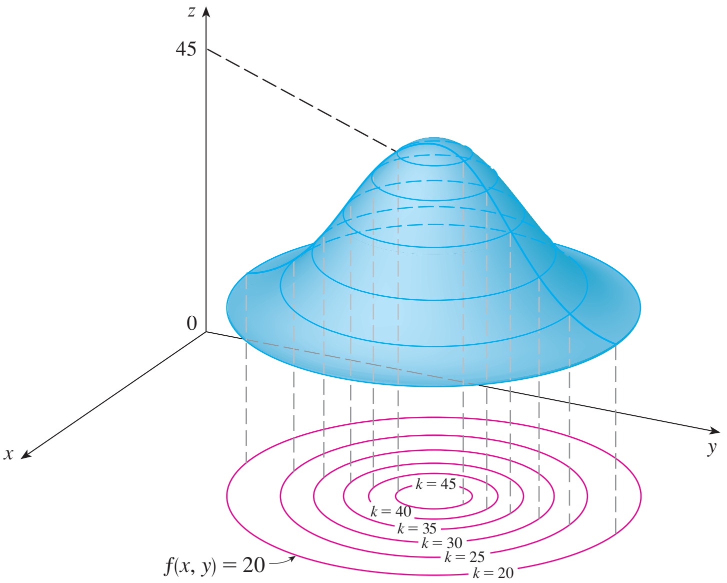

z
45
0
x
y
k = 45
k = 40
k = 35
k = 30
k = 25
k = 20
f(x, y) = 20

FIGURA 11

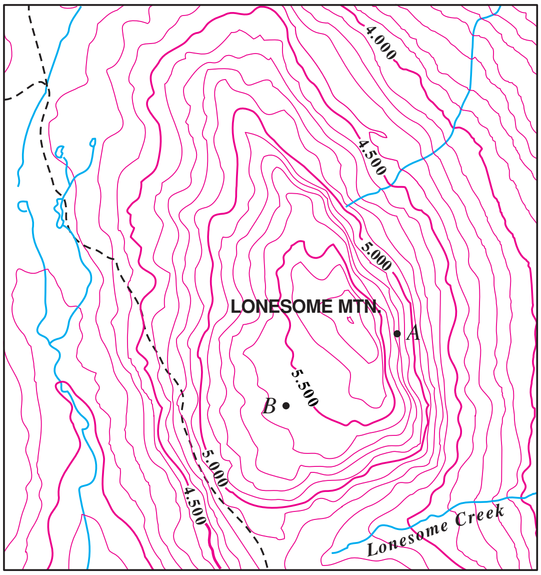

4.000
4.500
5.000
LONESOME MTN.
A
B
5.500
5.000
4.500
Lonesome Creek

FIGURA 12

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k. Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

Você pode ver na Figura 11 a relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais. As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy. Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras. Ela será um pouco mais achatada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras.

Um exemplo comum de curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 12. As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá. Outro exemplo comum é a função temperatura apresentada no parágrafo inicial desta seção. Aqui as curvas de nível são chamadas **curvas isotérmicas** e ligam localidades que têm a mesma temperatura. A Figura 13 mostra um mapa de clima indicando as temperaturas médias do mês de janeiro. Isotérmicas são as curvas que separam as bandas destacadas.

TEC *Visual 14.1 A* apresenta uma animação da Figura 11 ao mostrar as curvas de nível sendo elevadas para os gráficos das funções.

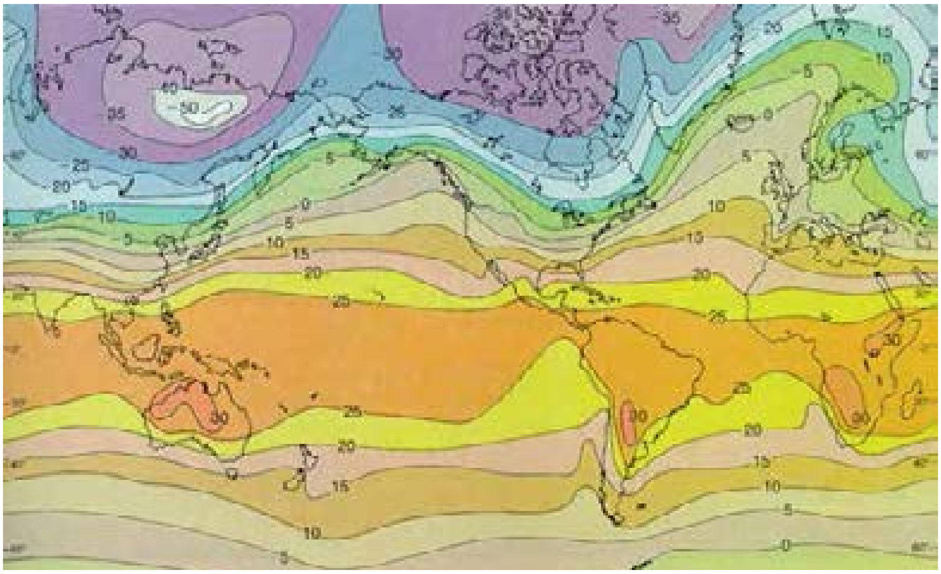


FIGURA 13

Temperaturas médias ao nível do mar no mês de janeiro, em graus Celsius

TARBUCK, EDWARD J.; TASA, DENNIS, *ATMOSPHERE, THE: AN INTRODUCTION TO METEOROLOGY*, 11. ed. © 2010. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ

EXEMPLO 9 Um mapa de contorno para uma função f é mostrado na Figura 14. Use-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.

SOLUÇÃO O ponto (1, 3) está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma, estimamos que $f(4, 5) \approx 56$

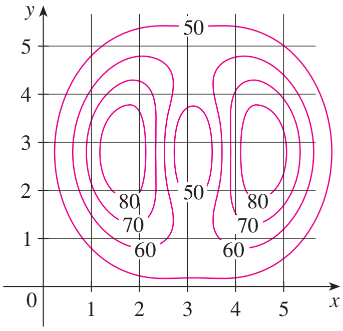


FIGURA 14

EXEMPLO 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Essa é uma família de retas com inclinação $-\frac{3}{2}$. As quatro curvas de nível particulares pedidas com $k = -6, 0, 6$ e 12 são $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ e $3x + 2y + 6 = 0$. Elas estão esboçadas na Figura 15. As curvas de nível são retas paralelas, igualmente espaçadas, porque o gráfico de f é um plano (veja a Figura 6).

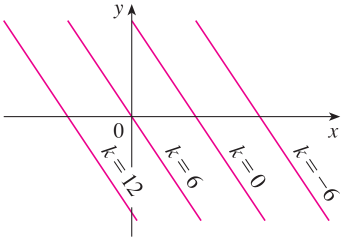


FIGURA 15

Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

EXEMPLO 11 Esboce as curvas de nível da função

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Essa é uma família de circunferências concêntricas com centro em (0, 0) e raio $\sqrt{9 - k^2}$. Os casos $k = 0, 1, 2, 3$ são mostrados na Figura 16. Tente visualizar essas curvas de nível elevadas para formar uma superfície e compare com o gráfico de g (um hemisfério) na Figura 7. (Veja a TEC Visual 14.1A.)

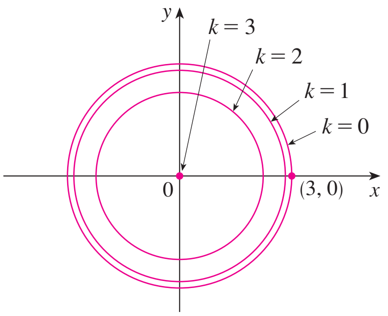


FIGURA 16
Mapa de contorno de
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

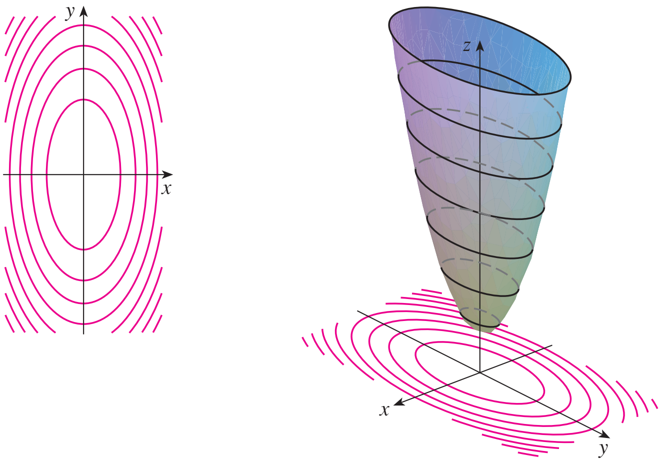
EXEMPLO 12 Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUÇÃO As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k - 1)} + \frac{y^2}{k - 1} = 1$$

que, para $k > 1$, descrevem uma família de elipses com semieixos $\frac{1}{2}\sqrt{k - 1}$ e $\sqrt{k - 1}$. A Figura 17(a) mostra um mapa de contorno de h desenhado por um computador. A Figura 17(b) apresenta essas curvas de nível elevadas para o gráfico de h (um paraboloide elíptico), onde elas se tornam os cortes horizontais. Vemos na Figura 17 como o gráfico de h é montado a partir de suas curvas de nível.

TEC *Visual 14.1B* demonstra a conexão entre as superfícies e seus mapas de contorno.



(a) Mapa de contorno

(b) Cortes horizontais são curvas de nível elevadas

FIGURA 17
O gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ é formado levantando-se as curvas de nível.

EXEMPLO 13 Trace as curvas de nível da função de produção de Cobb-Douglas do Exemplo 3.

SOLUÇÃO Na Figura 18 usamos o computador para desenhar um mapa de contorno da função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

As curvas de nível são rotuladas com o valor da produção P. Por exemplo, a curva de nível indicada com 140 mostra todos os valores da mão de obra L e do capital de investimento K que resultam em uma produção de $P = 140$. Vemos que, para um valor fixo de P, L aumenta e K decresce e vice-versa.

Para alguns propósitos, o mapa de contorno é mais útil que um gráfico. Certamente isto é verdadeiro no Exemplo 13. (Compare a Figura 18 com a Figura 8.) Isso também é verdadeiro na estimativa dos valores da função, como no Exemplo 9.

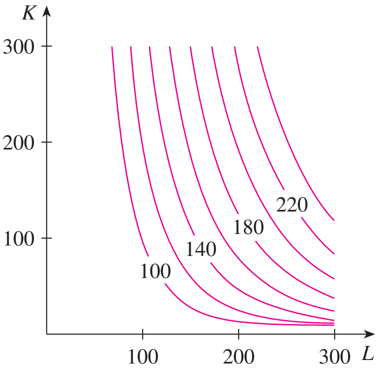
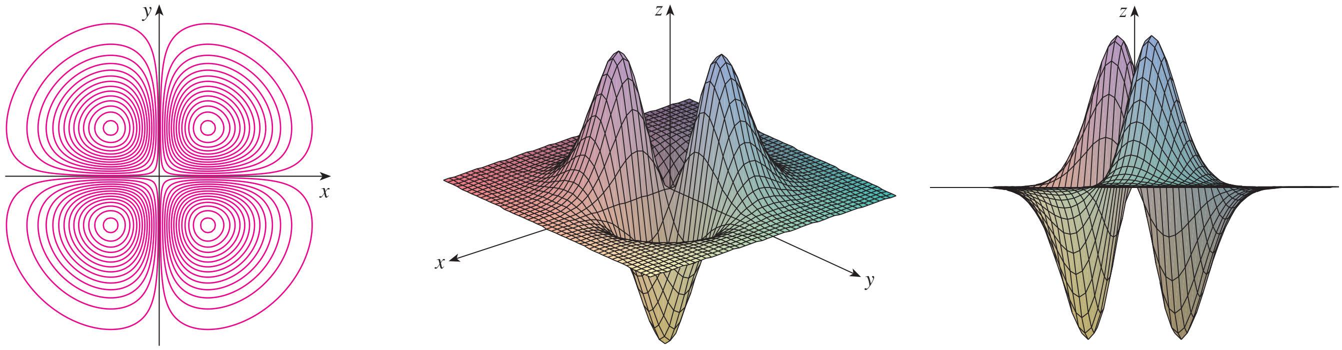


FIGURA 18

A Figura 19 apresenta algumas curvas de nível geradas por computador juntamente com os gráficos correspondentes. Observe que as curvas de nível na parte (c) da figura aparecem muito amontoadas perto da origem. Isso corresponde ao fato de o gráfico na parte (d) ser muito íngreme perto da origem.



(a) Curvas de nível de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

(b) Duas vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

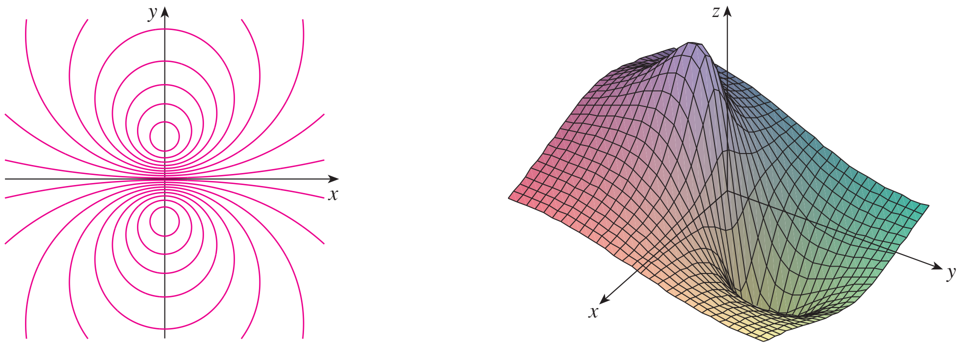


FIGURA 19

(c) Curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Funções de Três ou Mais Variáveis

Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$. Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

EXEMPLO 14 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUÇÃO A expressão para $f(x, y, z)$ é definida enquanto $z - y > 0$, assim, o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > y\}$$

Esse é um **semiespaço** que consiste em todos pontos que estão acima do plano $z = y$. ▬

É muito difícil visualizar uma função de f de três variáveis por seu gráfico, já que ele estaria em um espaço de quatro dimensões. No entanto, obtemos certo conhecimento de f ao examinar suas **superfícies de nível**, que são aquelas com equações $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante. Se o ponto (x, y, z) move-se ao longo de uma superfície de nível, o valor $f(x, y, z)$ permanece fixo.

EXEMPLO 15 Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

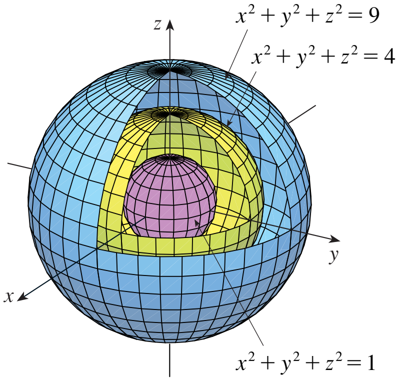


FIGURA 20

SOLUÇÃO As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geqslant 0$. Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio $\sqrt{k}$. (Veja a Figura 20.) Assim, enquanto (x, y, z) varia sobre qualquer esfera com centro O, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo.

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com *n* variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas essas n-uplas. Por exemplo, se uma companhia usa n ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício, c_i é o custo por unidade do i-ésimo ingrediente e x_i unidades do ingrediente são usadas; então o custo total C dos ingredientes é uma função das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

A função de f é de valor real cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de maneira mais compacta: Se $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, frequentemente escrevemos $f(\mathbf{x})$ no lugar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação, podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$ em V_n.

Em vista da correspondência de um-para-um entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e seus vetores posição $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ em V_n, temos três maneiras de ver uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como uma função de um único ponto n-dimensional $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como uma função de um único vetor n-dimensional $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.

14.1 Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica, T é a temperatura real, e v é a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
(a) Qual é o valor de $f(-15, 40)$? Qual é o seu significado?
(b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.
(c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T é verdade que $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.
(d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva seu comportamento.
(e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva seu comportamento.

2. O *índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3
Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa(%)

Temperatura real (°C)

T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
(b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
(c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
(d) Quais são os significados das funções $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas funções de h.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor monetário de toda a produção em milhões de dólares) como uma função de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Encontre $P(120, 20)$ e interprete-o.

4. Verifique se, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isso também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Um modelo para a área da superfície de um corpo humano é dado pela função

$$S = f(w, h) = 0{,}1091w^{0{,}425}h^{0{,}725}$$

onde w é o peso (em libras), h é a altura (em polegadas) e S é medida em pés quadrados.
(a) Encontre $f(160, 70)$ e interprete-a.
(b) Qual é sua própria área de superfície?

6. O indicador de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:

$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

7. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em metros, são apresentados na Tabela 4.
(a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

8. Uma empresa fabrica caixas de papelão de três tamanhos: pequena, média e grande. O custo é de \$ 2,50 para fabricar uma caixa pequena, \$ 4,00 para uma caixa média e \$ 4,50 para uma caixa grande. Os custos fixos são de \$ 8.000.
(a) Expresse o custo da fabricação de x caixas pequenas, y caixas médias e z caixas grandes como uma função de três variáveis: $C = f(x, y, z)$.
(b) Encontre $f(3\,000, 5\,000, 4\,000)$ e interprete-a.
(c) Qual o domínio de f?

9. Seja $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.
(a) Calcule $g(2, -1)$.
(b) Determine o domínio de g.
(c) Determine a imagem de g.

10. Seja $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
(a) Calcule $F(3,1)$.
(b) Determine e esboce o domínio de F.
(c) Determine a imagem de F.

11. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Calcule $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine o domínio de f.

12. Seja $g(x, y, z) = x^3 y^2 z \sqrt{10 - x - y - z}$.
(a) Calcule $g(1, 2, 3)$.
(b) Determine o domínio de g.

13–22 Determine e esboce o domínio da função.

13. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

23–31 Esboce o gráfico da função.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

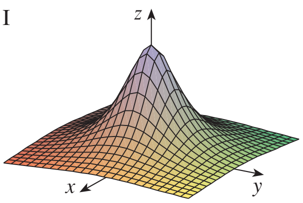
29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

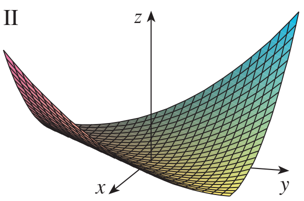
31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

32. Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.
(a) $f(x, y) = |x| + |y|$
(b) $f(x, y) = |xy|$
(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$
(f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$

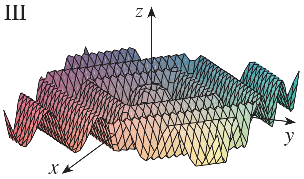
I



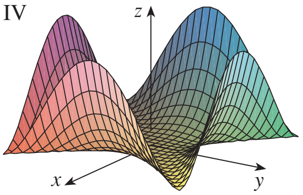
II



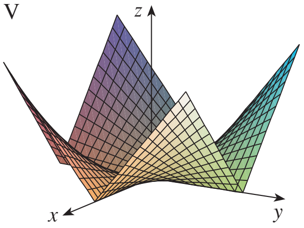
III



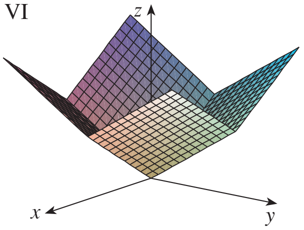
IV



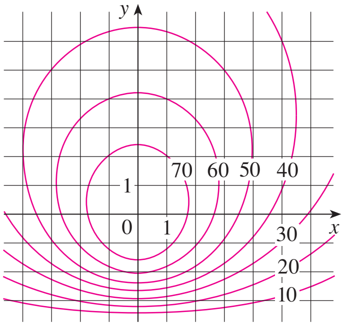
V



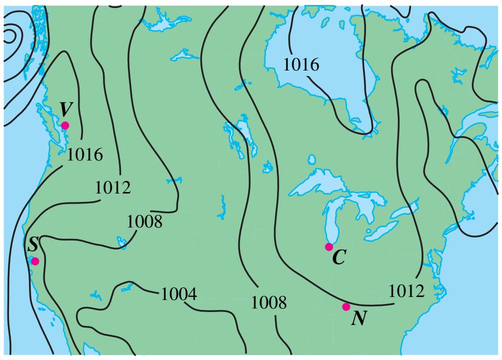
VI



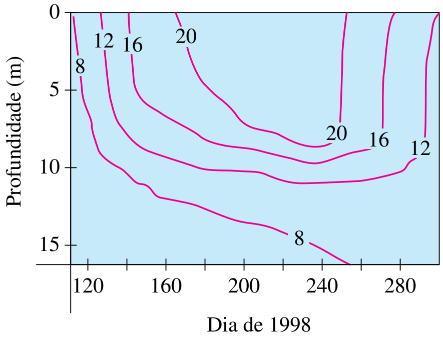
33. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para estimar os valores de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?



34. Um mapa de contorno da pressão atmosférica na América do Norte é mostrado em 12 de agosto de 2008. Nas curvas de nível (chamadas isobáricas) a pressão é indicada em milibares (mb).
(a) Estime a pressão em C (Chicago), N (Nashville), S (São Francisco) e V (Vancouver).
(b) Em quais desses lugares os ventos eram mais fortes?

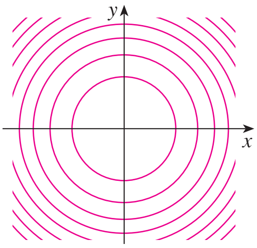


35. As curvas de nível (isotérmicas) são mostradas para a temperatura da água (em °C) em Long Lake (Minnesota) em 1998 como uma função de profundidade e da época do ano. Estime a temperatura do lago em 9 de junho (dia 160) em uma profundidade de 10 m e em 29 de junho (dia 180) em uma profundidade de 5 m.

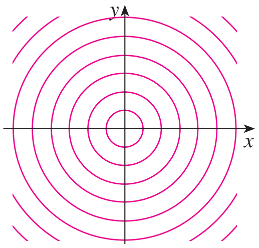


36. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?

I

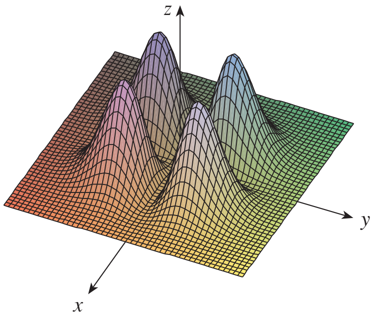


II



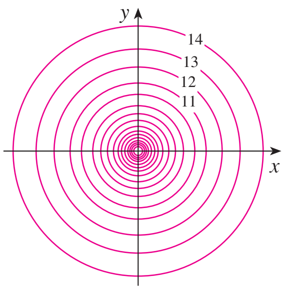
37. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? É perto de B?

38. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.

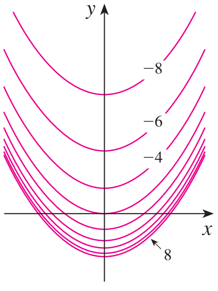


39–42 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

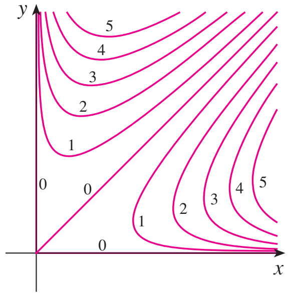
39.



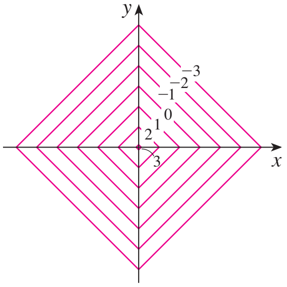
40.



41.



42.



43–50 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

44. $f(x, y) = x^3 - y$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

46. $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$

47. $f(x, y) = ye^x$

48. $f(x, y) = y \sec x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

50. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51–52 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

51. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

52. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma dessas curvas têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico em um ponto (x, y) no plano xy, então as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

55–58 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

55. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

56. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

57. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\text{sen}(x^2) + cos(y^2))$

58. $f(x, y) = \cos x \cos y$

59–64 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A–F a seguir), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I–VI). Justifique sua escolha.

59. $z = \text{sen}\,(xy)$

60. $z = e^x \cos y$

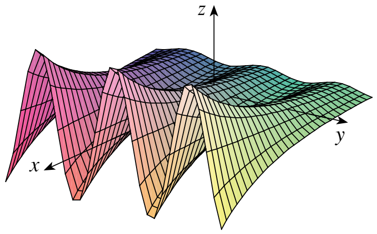
61. $z = \text{sen}\,(x - y)$

62. $z = \text{sen}\,x - \text{sen}\,y$

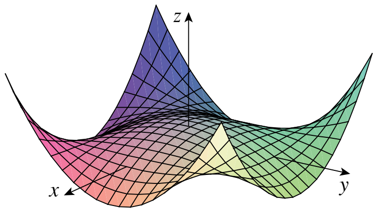
63. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

64. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

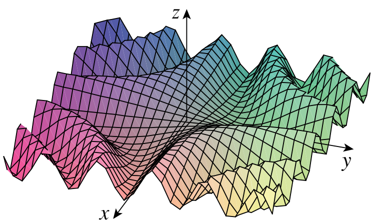
A



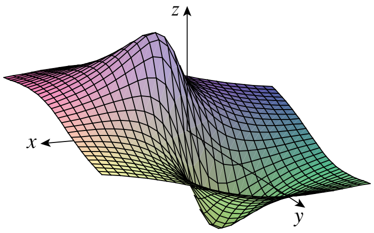
B



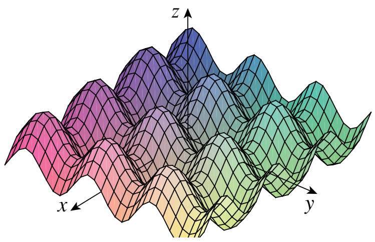
C



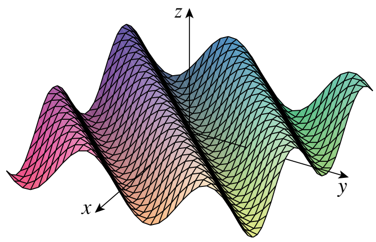
D



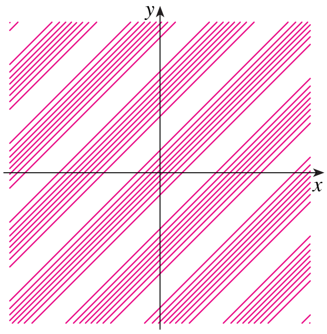
E



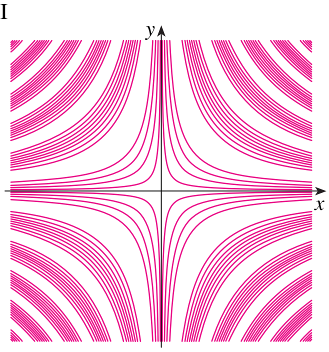
F



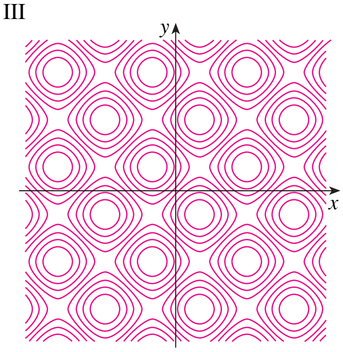
I



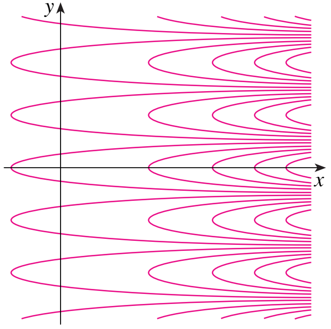
II



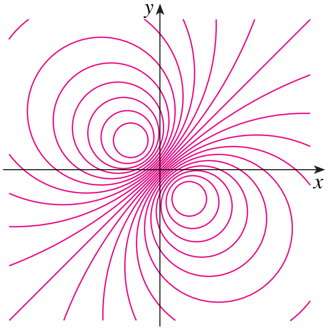
III



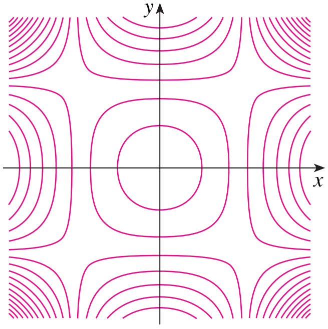
IV



V



VI



65–68 Descreva as superfícies de nível da função.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69–70 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

69. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71–72 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

71. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

73–74 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

73. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ **74.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Use um computador para investigar a família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. De que maneira a forma do gráfico depende de c?

76. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

77. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição de c para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

78. Faça o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se $g(t)$ é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

a partir do gráfico de g?

79. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Se deixarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação no item (a) torna-se a equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Use a Tabela 2 (no Exemplo 3) para fazer a tabela dos valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos 1899–1922. Em seguida, use uma calculadora gráfica ou o computador para encontrar a linha de regressão dos quadrado mínimos pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (x, y) se aproxima da origem].

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão de três casas decimais, para pontos (x, y) próximos da origem. (Observe que nenhuma das funções está definida na origem.)

TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

x \ y	$-1{,}0$	$-0{,}5$	$-0{,}2$	0	$0{,}2$	$0{,}5$	$1{,}0$
$-1{,}0$	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
$-0{,}5$	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
$-0{,}2$	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
$0{,}2$	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
$0{,}5$	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
$1{,}0$	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

x \ y	$-1{,}0$	$-0{,}5$	$-0{,}2$	0	$0{,}2$	$0{,}5$	$1{,}0$
$-1{,}0$	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
$-0{,}5$	$-0{,}600$	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	$-0{,}600$
$-0{,}2$	$-0{,}923$	$-0{,}724$	0,000	1,000	0,000	$-0{,}724$	$-0{,}923$
0	$-1{,}000$	$-1{,}000$	$-1{,}000$		$-1{,}000$	$-1{,}000$	$-1{,}000$
$0{,}2$	$-0{,}923$	$-0{,}724$	0,000	1,000	0,000	$-0{,}724$	$-0{,}923$
$0{,}5$	$-0{,}600$	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	$-0{,}600$
$1{,}0$	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

Parece que, quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$, os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, ao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrever

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{não existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L à medida que o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de f. Em outras palavras, podemos fazer os valores de $f(x, y)$ tão próximos de L quanto quisermos tornando o ponto (x, y) suficientemente próximo do ponto (a, b), mas não igual a (a, b). Uma definição mais precisa é a seguinte:

1 Definição Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

$$\text{se}(x, y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{e} \qquad f(x, y) \to L \ \text{ as } \ (x, y) \to (a, b)$$

Observe que $|f(x, y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L, e $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b). Assim, a Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a

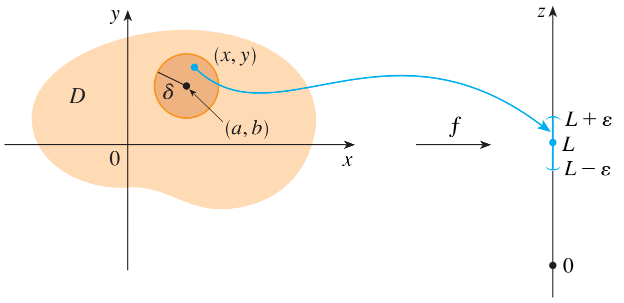


FIGURA 1

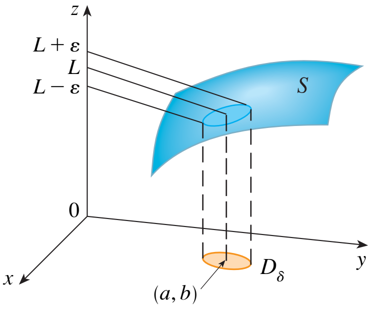


FIGURA 2

distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A Figura 1 ilustra a Definição 1 por meio de um diagrama de setas. Se qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ for dado em volta de L, poderemos encontrar um disco D_δ com o centro em (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que f mapeia todos os pontos em D_δ [exceto, possivelmente, (a, b)] no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Outra ilustração da Definição 1 é dada na Figura 2, onde a superfície S é o gráfico de f. Se $\varepsilon > 0$ for dado, podemos achar $\delta > 0$ tal que se (x, y) for restrito ao disco D_δ e $(x, y) \neq (a, b)$, então a parte correspondente de S fica entre os planos horizontais $z = L - \varepsilon$ e $z = L + \varepsilon$.

Para as funções de uma única variável, quando fazemos x tender a a, só existem duas direções possíveis de aproximação: pela esquerda ou pela direita. Lembremos a partir do Capítulo 2 que se $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f.

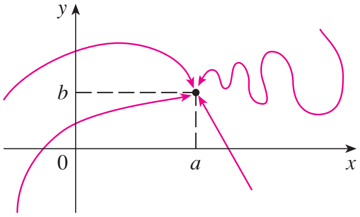


FIGURA 3

A Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) para (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A definição refere-se somente à *distância* entre (x, y) e (a, b). Ela não se refere à direção da abordagem. Portanto, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b). Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

> Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

EXEMPLO 1 Mostre que $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primeiro vamos considerar $(0, 0)$ ao longo do eixo x. Então $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

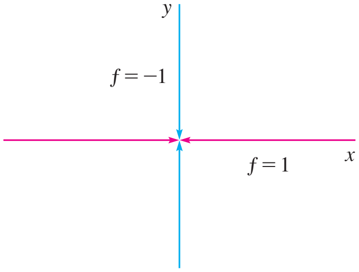


FIGURA 4

Agora vamos nos aproximar ao longo do eixo y, colocando $x = 0$. Então $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para todo $y \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to -1 \text{ quando } (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

(veja a Figura 4). Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numérica no início desta seção.)

EXEMPLO 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Se $y = 0$, então $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Portanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } x$$

Se $x = 0$, então $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, portanto

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{quando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

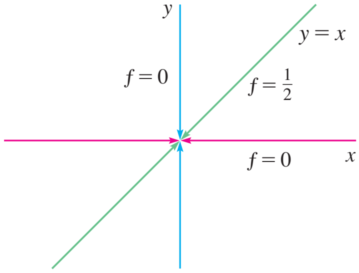


FIGURA 5

Apesar de termos encontrado valores idênticos ao longo dos eixos, não podemos afirmar que o limite exista e seja 0. Vamos agora nos aproximar de $(0, 0)$ ao longo de outra reta; por exemplo, $y = x$. Para todo $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto $\quad f(x, y) \to \frac{1}{2} \quad$ quando $\quad (x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = x$

(Veja a Figura 5.) Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, podemos afirmar que o limite dado não existe.

A Figura 6 nos dá uma ideia do que acontece no Exemplo 2. A cumeeira que ocorre acima da reta $y = x$ corresponde ao fato de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos os pontos (x, y) dessa reta, exceto na origem.

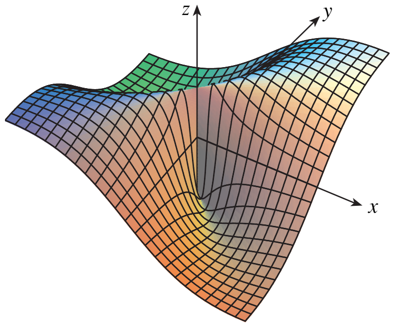


FIGURA 6

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, será que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ existe?

SOLUÇÃO Com a Solução do Exemplo 2 em mente, vamos tentar economizar tempo deixando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de qualquer reta não vertical através da origem. Tomemos $y = mx$, onde m é a inclinação da reta e

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Portanto $\quad f(x, y) \to 0 \quad$ quando $\quad (x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $y = mx$

A Figura 7 mostra o gráfico da função do Exemplo 3. Observe a cumeeira sobre a pa-

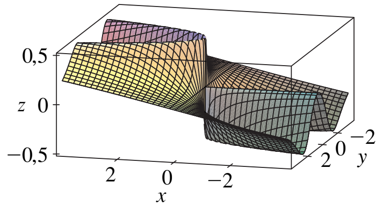


FIGURA 7

Logo, f tem o mesmo limite ao longo de qualquer reta não vertical que passe pela origem. Mas isso ainda não garante que o limite seja 0, pois, se tomarmos agora $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da parábola $x = y^2$, teremos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Portanto $f(x, y) \to \frac{1}{2} \quad$ quando $\quad (x, y) \to (0, 0)$ ao longo de $x = y^2$

Como caminhos diferentes levaram a resultados diferentes, o limite não existe.

Vamos agora olhar o caso em que o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções com duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Propriedades do Limite listadas na Seção 2.3, no Volume I, podem ser estendidas para as funções de duas variáveis: o limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\boxed{2} \qquad \lim_{(x, y) \to (a, b)} x = a \qquad \lim_{(x, y) \to (a, b)} y = b \qquad \lim_{(x, y) \to (a, b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

EXEMPLO 4 Ache $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ se existir.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0. Isso não prova que o limite seja 0, mas o limite ao longo das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ também obtemos o limite 0, portanto começamos a suspeitar que o limite existe e é igual a 0.

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

ou seja,
$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Mas $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geqslant 0$, portanto $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ e, assim,

$$\boxed{3} \qquad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dessa forma, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, teremos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Logo, pela Definição 1,

$$\lim_{(x,\,y) \to (0,\,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Outro modo de resolver o Exemplo 4 é pelo Teorema do Confronto em vez de usar a Definição 1. De $\boxed{2}$ segue que

$$\lim_{(x,\,y) \to (0,\,0)} 3|y| = 0$$

e, portanto, a primeira desigualdade em $\boxed{3}$ mostra que o limite dado é 0.

Continuidade

Lembremo-nos de que o cálculo de limites de funções *contínuas* de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

$\boxed{4}$ **Definição** Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x,\,y) \to (a,\,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia por uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará por uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma cx^my^n, onde c é uma constante e m e n são números inteiros não negativos. Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Os limites em $\boxed{2}$ mostram que as funções $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ e $h(x, y) = c$ são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f, g e h por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em* $\mathbb{R}^2$. Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\lim_{(x,\,y) \to (1,\,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUÇÃO Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

EXEMPLO 6 Onde a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

SOLUÇÃO A função f é descontínua em $(0, 0)$, pois ela não está definida nesse ponto. Como f é uma função racional, ela é contínua em seu domínio, o que corresponde ao conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

EXEMPLO 7 Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aqui g está definida em $(0, 0)$, mas g ainda é descontínua porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ não existe (veja o Exemplo 1).

EXEMPLO 8 Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que f é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$, uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Do Exemplo 4, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Portanto f é contínua em $(0, 0)$ e, consequentemente, contínua em $\mathbb{R}^2$.

A Figura 8 mostra o gráfico da função contínua do Exemplo 8.

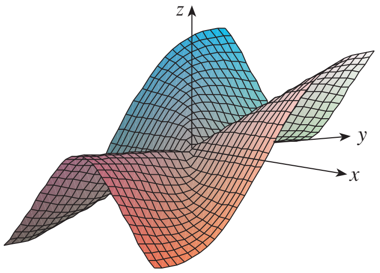


FIGURA 8

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f, a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ também é contínua.

EXEMPLO 9 Onde a função $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$ é contínua?

SOLUÇÃO A função $f(x, y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$. A função $g(t) = \text{arctg}\, t$ é contínua em toda parte. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \text{arctg}(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde $x = 0$. O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função h acima do eixo y.

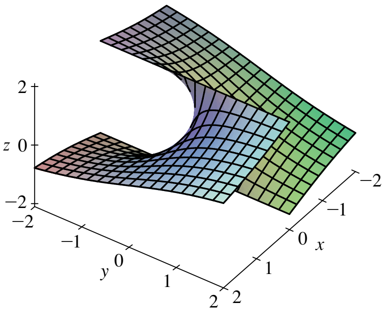


FIGURA 9
A função $h(x, y) = \text{arctg}\,(y/x)$ é descontínua, onde $x = 0$.

Funções de Três ou Mais Variáveis

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de $f(x, y, z)$ se aproximam do número L à medida que o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de f. Como a distância entre dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$ é dada por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, podemos escrever a definição precisa da seguinte forma: para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } (x, y, z) \text{ está no domínio de } f \text{ e } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{então} \quad |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

A função f é **contínua** em (a, b, c) se

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Em outras palavras, é descontínua na esfera com o centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no fim da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

> $\boxed{5}$ Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que
>
> $$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$ e $\boxed{5}$ é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, de modo que $\boxed{5}$ se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, e $\boxed{5}$ é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Exercícios

1. Suponha que $\lim_{(x, y) \to (3, 1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
- (a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
- (b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
- (c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3–4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$

4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 2)} (5x^3 - x^2y^2)$

6. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, -1)} e^{-xy} \cos(x + y)$

7. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (2, 1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

8. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^4 - {}^4y^4}{x^2 + 2y^2}$

10. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$

12. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$

13. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

16. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

18. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (\pi, \theta, 1)} e^{y^2} \operatorname{tg}(xz)$

20. $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23–24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

24. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

25–26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t, \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27–28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29–38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

30. $F(x, y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

32. $H(x, y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 + z^2)$

36. $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}\,\ln z$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39–41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y) com $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leqslant 0 \text{ or } y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Independentemente do item (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Dica*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Desse modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

TABELA 1
Índice de calor I como função da temperatura e umidade

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de H. Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$. Então, $g(T)$ descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é 60%. A derivada de g quando $T = 30$ ºC é a taxa de variação de I com relação a T quando $T = 30$ ºC:

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Podemos aproximar seu valor usando a Tabela 1 e tomando $h = 2$ e -2:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

Calculando a média desses valores, podemos dizer que a derivada $g'(30)$ é aproximadamente 1,75. Isso significa que, quando a temperatura real é 30 ºC e a umidade relativa é 60%, a temperatura aparente (humidex) aumenta cerca de 1,75 ºC para cada grau que a temperatura real sobe.

Olhemos agora para a linha sombreada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de $T = 30$ ºC. Os números nesta linha são valores da função $G(H) = f(30, H)$, que descreve como o humidex aumenta à medida que a umidade relativa H aumenta quando a temperatura real é $T = 30$ ºC. A derivada dessa função quando $H = 60\%$ é a taxa de variação de I com relação a H quando $T = 60\%$:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Tomando $h = 5$ e -5, aproximamos o valor de $G'(60)$ usando os valores tabelados:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

Ao calcularmos média desses valores, obtemos a estimativa $G'(60) \approx 0{,}3$. Isso nos diz que, quando a temperatura é de 30 ºC e a umidade relativa é de 60%, o humidex aumenta em cerca de 0,3 ºC para cada ponto percentual que a umidade relativa aumenta.

Em geral, se f é uma função de duas variáveis x e y, suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y, por exemplo, fazendo $y = b$, onde b é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x, a saber, $g(x) = f(x, b)$. Se g tem derivada em a, nós a chamaremos **derivada parcial de *f* em relação a *x* em (*a*, *b*)** e a denotaremos por $f_x(a, b)$. Assim,

1

$$\boxed{f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x, b)}$$

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 torna-se

2

$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y em (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, é obtida mantendo-se x fixo ($x = a$) e determinando-se a derivada em b da função $G(y) = f(a, y)$:

3

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do humidex I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando $T = 30$ ºC e $H = 60\%$ como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1{,}75 \qquad f_H(30, 60) \approx 0{,}3$$

Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3, f_x e f_y se tornam funções de duas variáveis.

4 Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x, podemos escrever f_1 ou $D_1 f$ (para indicar a derivação em relação à *primeira* variável) ou $\partial f/\partial x$. Mas aqui $\partial f/\partial x$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

Notações para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcularmos as derivadas parciais, tudo o que temos a fazer é nos lembrarmos, a partir da Equação 1, que a derivada parcial com relação a x é a derivada *ordinária* da função g de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de y. Então, temos a seguinte regra.

Regra para Determinar as Derivadas Parciais de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.
2. Para determinar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

EXEMPLO 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

SOLUÇÃO Mantendo y constante e derivando em relação a x, obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

e, assim,

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Mantendo x constante e derivando em relação a y, obtemos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Interpretações das Derivadas Parciais

Para darmos uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície S (o gráfico de f). Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ está em S. Ao fixar $y = b$, estamos restringindo nossa atenção à curva C_1, na qual o plano vertical $y = b$ intersecciona S. (Em outras palavras, C_1 é o corte de S no plano $y = b$.) Dessa maneira, o plano vertical $x = a$ intersecciona S em uma curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P (Veja a Figura 1.)

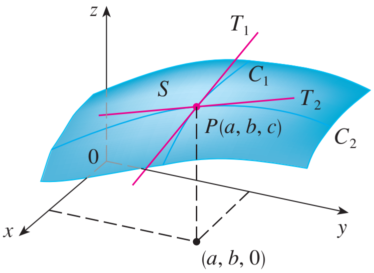


FIGURA 1
As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_1 e C_2.

Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$.

Então, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.

Como vimos no caso da função humidex, as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*. Se $z = f(x, y)$, então $\partial z/\partial x$ representa a taxa de variação de z com relação a x quando y é mantido fixo. Da mesma forma, $\partial z/\partial y$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

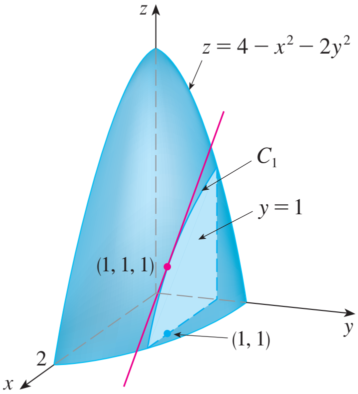


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO Temos

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$
$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$, e o plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Como na discussão anterior, rotulamos C_1 na Figura 2.) A inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto (1, 1, 1) é $f_x(1, 1) = -2$. Da mesma forma, a curva C_2 na qual o plano $x = 1$ intercepta o paraboloide é a parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$, e a inclinação da reta tangente em (1, 1, 1) é $f_y(1, 1) = -4$. (Veja a Figura 3.)

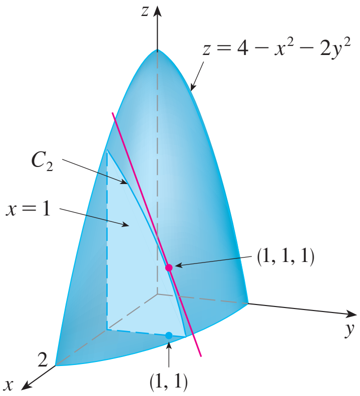


FIGURA 3

A Figura 4 nos mostra o gráfico desenhado pelo computador correspondente à Figura 2. O item (a) exibe o plano $y = 1$ interceptando a superfície para formar a curva C_1, e o item (b) mostra C_1 e T_1. [Usamos as equações vetoriais $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 e $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.] Do mesmo modo, a Figura 5 corresponde à Figura 3.

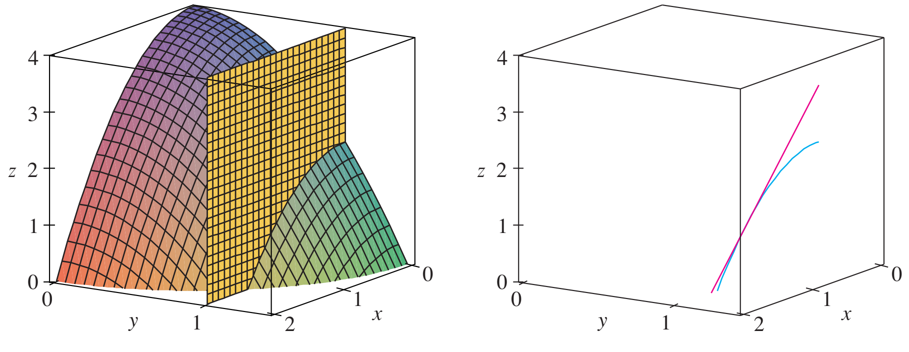


FIGURA 4

(a) (b)

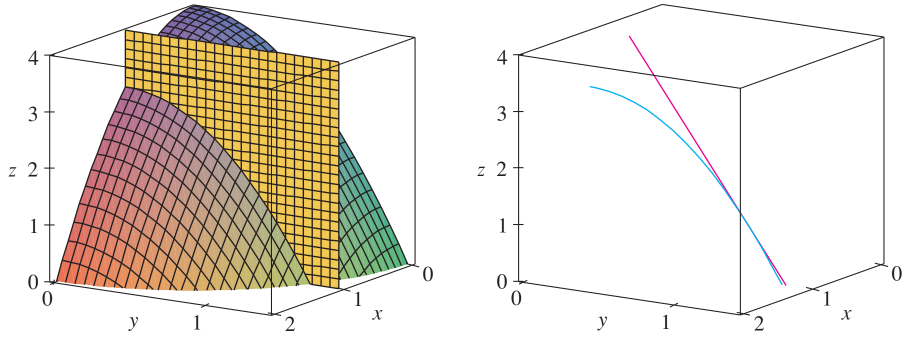


FIGURA 5

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

SOLUÇÃO Usando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$

EXEMPLO 4 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUÇÃO Para determinarmos $\partial z/\partial x$, diferenciando implicitamente em relação a x, tomando o cuidado de tratar y como constante:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Resolvendo essa equação para $\partial z/\partial x$, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a y, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar superfícies definidas por equações implícitas com três variáveis. A Figura 6 mostra o desenho da superfície definida implicitamente pela equação do Exemplo 4.

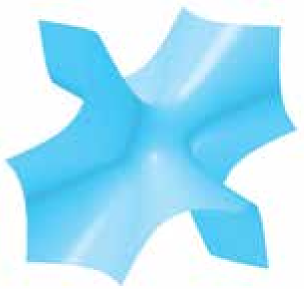


FIGURA 6

Funções de Mais de Duas Variáveis

As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis x, y e z, então sua derivada parcial em relação a x é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

e é determinada olhando-se y e z como constantes e derivando $f(x, y, z)$ em relação a x. Se $w = f(x, y, z)$, então $f_x = \partial w/\partial x$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w com relação a x quando y e z são mantidos fixos. Entretanto, não podemos interpretá-la geometricamente porque o gráfico de f pertence ao espaço de dimensão quatro.

Em geral, se u é uma função de n variáveis, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sua derivada parcial em relação à i-ésima variável x_i é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

e podemos também escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EXEMPLO 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUÇÃO Mantendo y e z constantes e derivando em relação a x, temos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Da mesma forma, $\quad f_y = xe^{xy} \ln z \quad$ e $\quad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$

Derivadas de Ordem Superior

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f. Se $z = f(x, y)$, usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Portanto, a notação f_{xy} (ou $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$) significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y, ao passo que no cálculo de f_{yx} a ordem é invertida.

EXEMPLO 6 Determine as derivadas parciais de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUÇÃO No Exemplo 1, descobrimos que

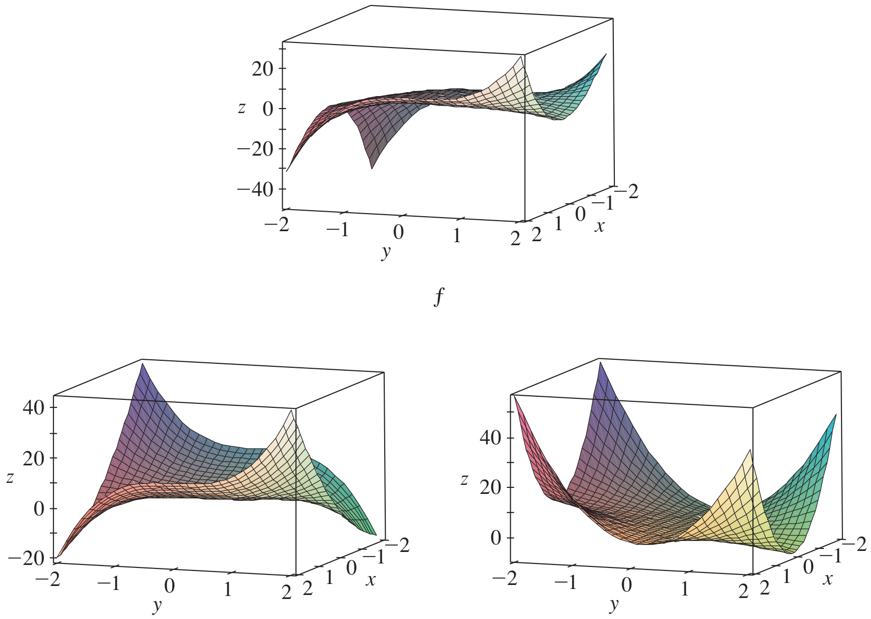
$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Portanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

A Figura 7 mostra o gráfico da função f do Exemplo 6 e os gráficos de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Observe que esses gráficos são consistentes com nossas interpretações de f_x e f_y como inclinações das linhas das tangentes para os cortes do gráfico de f. Por exemplo, o gráfico de f decresce se começarmos em $(0, -2)$ e nos movemos na direção x positiva. Isso é refletido nos valores negativos de f_x. Você deveria comparar os gráficos de f_{yx} e f_{yy} com f_y para ver as relações.

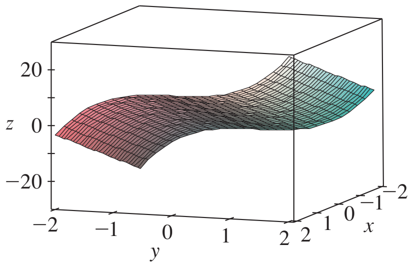


f

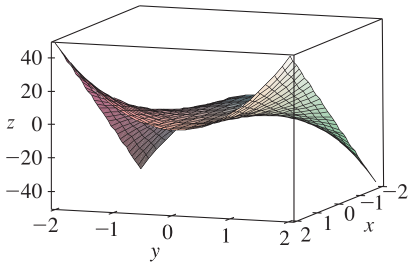
FIGURA 7

f_x

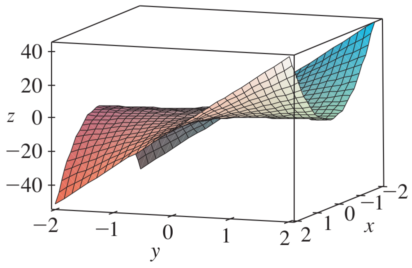
f_y



f_{xx}



$f_{xy} = f_{yx}$



f_{yy}

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. A demonstração é feita no Apêndice F.

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Clairaut

Alexis Clairaut foi uma criança prodígio na área da matemática: aos 10 anos leu o texto de cálculo de l'Hôspital, e aos 13 apresentou um artigo sobre geometria na Academia Francesa de Ciências. Aos 18 anos, Clairaut publicou *Recherches sur les courbes à double courbure*, o primeiro tratado sistemático em geometria analítica tridimensional, em que incluiu o cálculo de curvas espaciais.

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ se essas funções forem contínuas.

EXEMPLO 7 Calcule f_{xxyz} se $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(3x + yz)$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} f_x &= 3\cos(3x + yz) \\ f_{xx} &= -9\operatorname{sen}(3x + yz) \\ f_{xxy} &= -9z\cos(3x + yz) \\ f_{xxyz} &= -9\cos(3x + yz) + 9yz\operatorname{sen}(3x + yz) \end{aligned}$$

Equações Diferenciais Parciais

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

EXEMPLO 8 Mostre que a função $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ é solução da equação de Laplace.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos as derivadas parciais necessárias de segunda ordem:

$$u_x = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$$

Assim,

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Portanto u satisfaz a equação de Laplace.

A **equação da onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante. Por exemplo, se $u(x, t)$ representa o deslocamento da corda vibran-

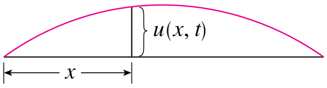


FIGURA 8

te de violino no instante t e à distância x de uma das extremidades da corda (como na Figura 8), então $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.

EXEMPLO 9 Verifique se a função $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - at)$ satisfaz a equação de onda.

SOLUÇÃO $u_x = \cos(x - at) \qquad u_t = -a\cos(x - at)$

$u_{xx} = -\operatorname{sen}(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2\operatorname{sen}(x - at) = a^2u_{xx}$

Então u satisfaz a equação de onda.

As equações diferenciais parciais que envolvem as funções de três variáveis também são muito importantes na ciência e na engenharia. A equação tridimensional de Laplace é

$$\boxed{5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

e um lugar em que ocorre é na geofísica. Se $u(x, y, z)$ representa a força do campo magnético na posição (x, y, z), então ela satisfaz a Equação 5. A força do campo magnético indica a distribuição de minerais ricos em ferro e reflete diferentes tipos de rochas e a localização de falhas. A Figura 9 mostra um mapa de contorno do campo magnético da Terra, que foi registrado de uma aeronave transportando um magnetômetro que voava a 200 m acima da superfície do solo. O mapa de contorno é intensificado pela codificação por cores das regiões entre as curvas de nível.

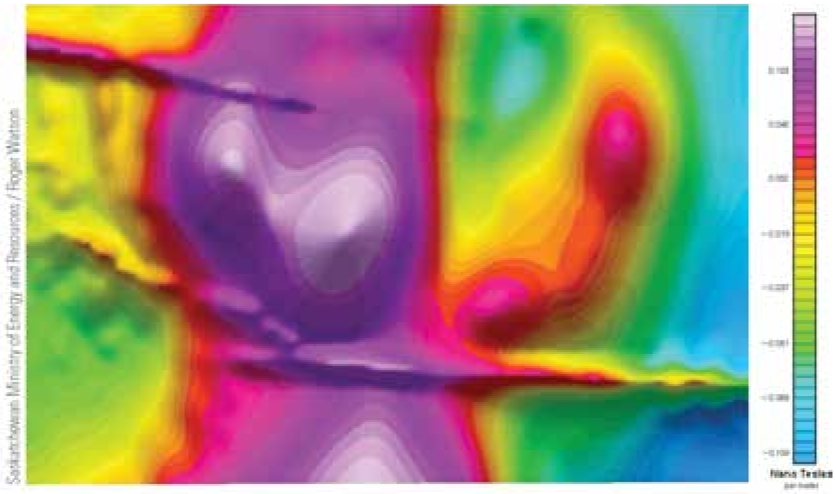

Saskatchewan Ministry of Energy and Resources / Roger Watson

FIGURA 9
Força do campo magnético da Terra

A Figura 10 mostra um mapa de contorno para a derivada parcial de segunda ordem de u na direção vertical, ou seja, u_{zz}. Verifica-se que os valores das derivadas parciais u_{xx} e u_{yy} são mensurados de maneira relativamente fácil a partir de um mapa do campo magnético. Então os valores de u_{zz} podem ser calculados a partir da equação de Laplace $\boxed{5}$.

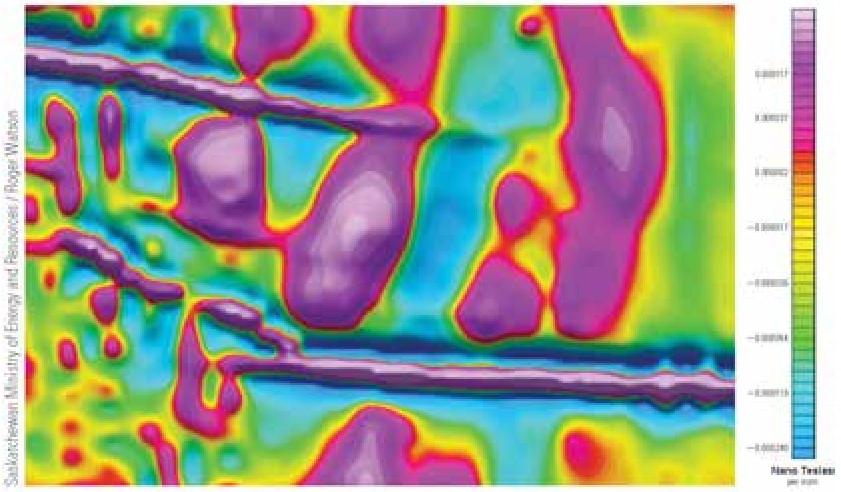

Saskatchewan Ministry of Energy and Resources / Roger Watson

FIGURA 10
Segunda derivada vertical do campo magnético

A Função de Produção de Cobb-Douglas

No Exemplo 3 da Seção 14.1 descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas na modelagem da produção total P de um sistema econômico como função da quantidade de trabalho L e do capital investido K. Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular desse modelo deriva de certas hipóteses que eles fizeram sobre a economia.

Se a função de produção é denotada por $P = P(L, K)$, a derivada parcial $\partial P/\partial L$ é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho. Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho, ou **produtividade marginal do trabalho**. Da mesma forma, a derivada parcial $\partial P/\partial K$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido, e é denominada **produtividade marginal do capital**. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser enunciadas da seguinte forma:

(i) Se ou o trabalho ou o capital se anulam, o mesmo acontece com a produção.

(ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.

(iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

Como a produção por unidade de trabalho é P/L, a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguma constante α. Se mantivermos K constante ($K = K_0$), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\boxed{6} \qquad \frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Se resolvermos essa equação diferencial separável pelos métodos da Seção 9.3 (veja também o Exercício 85), obteremos

$$\boxed{7} \qquad P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

Observe que escrevemos a constante C_1 como função de K_0 porque ela pode depender do valor de K_0.

Analogamente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

e podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$\boxed{8} \qquad P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$$

Comparando as Equações 7 e 8, temos

$$\boxed{9} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

onde b é uma constante independente de L e K. A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Observe que, pela Equação 9, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$, portanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.

14.3 Exercícios

1. A temperatura T (em °C)de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.

(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulu tem longitude de 158º W e latitude de 21º N. Suponha que às 9 horas em 1º de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a Oeste e a Sul o ar esteja quente e a Norte e Leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivos ou negativos? Explique.

2. No início desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o humidex; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)	T \ v	20	30	40	50	60	70
	−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
	−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
	−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
	−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)	v \ t	5	10	15	20	30	40	50
	20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
	30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
	40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
	60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
	80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
	100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
	120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

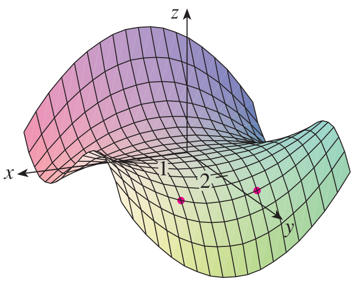
(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?

(b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5–8 Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



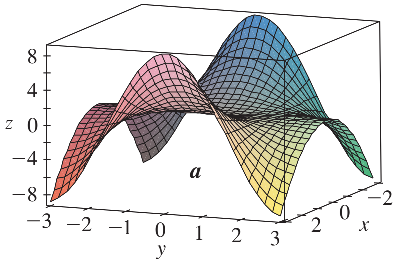
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

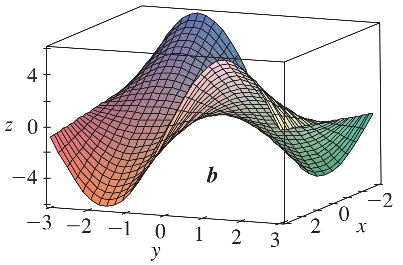
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

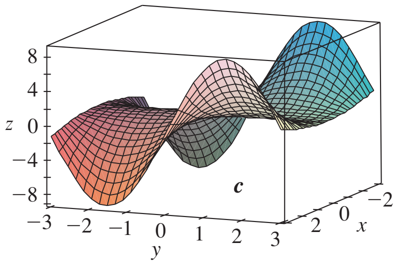
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

9. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c, são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.





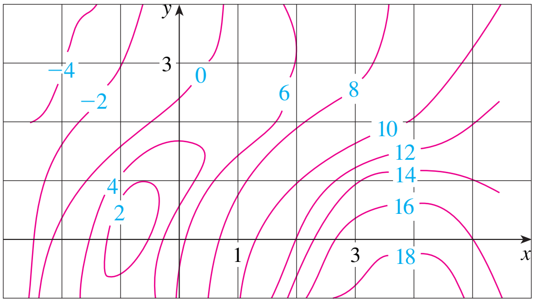


É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

10. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Utilize-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



11. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13–14 Determine f_x e f_y e faça os gráficos f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13. $f(x, y) = x^2y^3$ **14.** $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

15–40 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$ **16.** $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

17. $f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$ **18.** $f(x, t) = \sqrt{x}\ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$ **20.** $z = \operatorname{tg} xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ **22.** $f(x, y) = \dfrac{x}{(x + y)^2}$

23. $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$ **24.** $w = \dfrac{e^v}{u + v^2}$

25. $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$ **26.** $f(x, t) = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{t}\right)$

27. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$ **28.** $f(x, y) = x^y$

29. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t)\, dt$ **30.** $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

31. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ **32.** $f(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z)$

33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **34.** $w = ze^{xyz}$

35. $u = xy\operatorname{sen}^{-1}(yz)$ **36.** $u = x^{y/z}$

37. $h(x, y, z, t) = x^2y\cos(z/t)$

38. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta y^2}$

39. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

40. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

41–44 Determine as derivadas parciais indicadas.

41. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

42. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$; $f_x(2, 3)$

43. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

44. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

45–46 Use a definição de derivadas parciais como limites $\boxed{4}$ para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

45. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$ **46.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

47–50 Use a derivação implícita para encontrar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ **48.** $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

49. $e^z = xyz$ **50.** $yz + x\ln y = z^2$

51–52 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

51. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

52. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

53–58 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

53. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ **54.** $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

55. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ **56.** $v = \dfrac{xy}{x - y}$

57. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$ **58.** $v = e^{xe^y}$

59–62 Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$ **60.** $u = e^{xy}\operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$ **62.** $u = \ln(x + 2y)$

63–70 Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s).

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; f_{xxx}, f_{xyx}

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$; f_{yxy}

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

66. $g(r, s, t) = e^r\operatorname{sen}(st)$; g_{rst}

67. $u = e^{r\theta}\operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$

68. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

69. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$

70. $u = x^ay^bz^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z^3}$

71. Se $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}(x\sqrt{z})$, determine f_{xzy}. [*Dica*: Qual ordem de diferenciação é a mais fácil?]

72. Se $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, determine g_{xyz}. [*Dica*: Use uma ordem de diferenciação diferente para cada termo.]

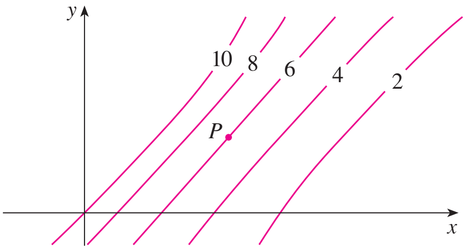
73. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

74. As curvas de nível são mostradas para uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}

(d) f_{xy} (e) f_{yy}



75. Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t}$ sen kx é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

76. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$

(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$

(f) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

77. Verifique se a função u $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

78. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

(a) $u = \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(akt)$

(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$

(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$

(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 78.

80. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

82. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em ºC e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(2, 1)$ em (a) a direção x e (b) a direção y.

83. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

84. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 6.)

86. Cobb e Douglas usaram a equação $P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$ para o modelo de economia norte-americana de 1899 a 1922, onde L é a quantidade de trabalho e K, a quantidade de capital. (Veja o Exemplo 3 na Seção 14.1.)

(a) Calcule P_L e P_K.

(b) Encontre a produtividade marginal de trabalho e a produtividade marginal de capital no ano de 1920, quando $L = 194$ e $K = 407$ (em comparação com os valores atribuídos $L = 100$ e $K = 100$ em 1899). Interprete os resultados.

(c) No ano de 1920, o que trouxe mais benefícios para a produção: um aumento no capital de investimento ou um aumento nos gastos com mão de obra?

87. A *equação de van der Waals* para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante universal de gás e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Calcule $\partial T/\partial P$ e $\partial P/\partial V$.

88. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. Para o gás ideal do Exercício 88, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. O índice de sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (ºC) e v, a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ ºC e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente W caia se a temperatura real decrescer em 1 ºC? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

91. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

92. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

93. Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$. Você deve acreditar nisso?

94. O paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do paraboloide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

95. O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

96. No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em metros) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?
(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?
(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k.
(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.
(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

97. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de f forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

98. (a) Quantas derivadas parciais de n-ésima ordem têm uma função de duas variáveis?
(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?
(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis?

99. (a) Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$, determine $f_x(1, 0)$.
[*Dica*: Em vez de determinar $f_x(x, y)$ primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

100. (a) Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

101. (a) . Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f.
(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.
(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.
(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I.) Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

Planos Tangentes

Suponha que uma superfície S tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Como na seção anterior, sejam C_1 e C_2 as curvas obtidas pela intersecção dos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$ com a superfície S. Então o ponto P fica em C_1 e C_2. Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes à curva C_1 e C_2 no ponto P. Então o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as retas da tangente T_1 e T_2 (veja a Figura 1.)

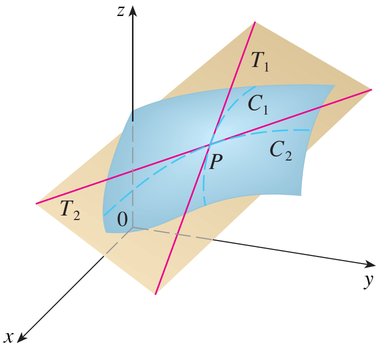


FIGURA 1
O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2.

Veremos na Seção 14.6 que, se C é outra curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passe pelo ponto P, então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Portanto, podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P. O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P.

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como

$$\boxed{1} \qquad z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Se a Equação 1 representa o plano tangente em P, sua intersecção com o plano $y = y_0$ precisa ser a reta T_1. Impondo $y = y_0$ na Equação 1, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \text{onde} \quad y = y_0$$

e reconhecemos isso como a equação (na forma ponto-inclinação) de uma linha com a inclinação a. Mas a partir da Seção 14.3 sabemos que a inclinação da tangente T_1 é $f_x(x_0, y_0)$. Portanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

Da mesma forma, tomando $x = x_0$ na Equação 1, obtemos $z - z_0 = b(y - y_0)$, que precisa representar a reta tangente T_2 e, portanto, $b = f_y(x_0, y_0)$.

$\boxed{2}$ Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Observe a semelhança entre a equação do plano tangente e a equação da reta tangente

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

EXEMPLO 1 Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

SOLUÇÃO Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Portanto, por $\boxed{2}$ temos a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ como

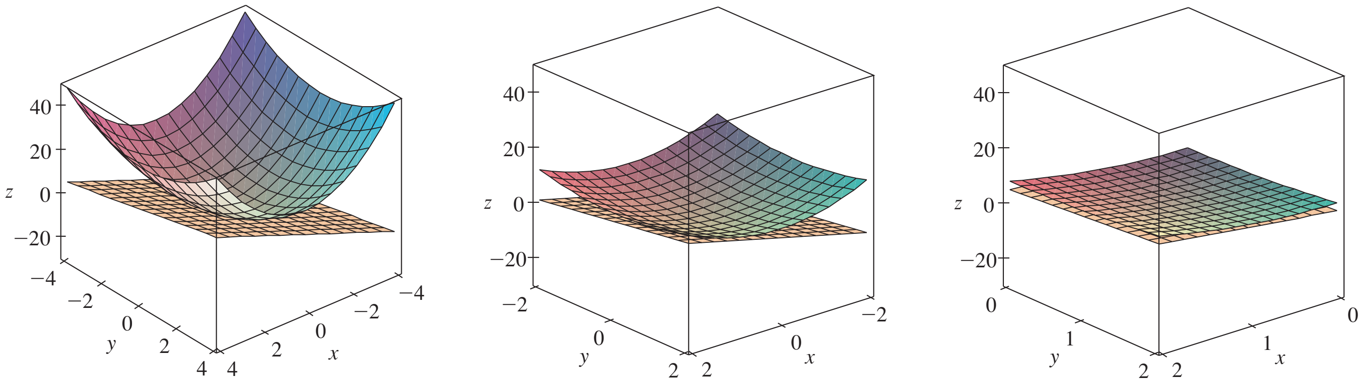
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou

$$z = 4x + 2y - 3$$

TEC O *Visual 14.4A* mostra uma animação das Figuras 2 e 3.

A Figura 2(a) mostra o paraboloide elíptico e seu plano tangente em (1, 1, 3) que encontramos no Exemplo 1. Nas partes (b) e (c) damos *zoom* em direção ao ponto (1, 1, 3) restringindo o domínio da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que, quanto mais ampliamos a região próxima ao ponto, mais plano parece o gráfico da superfície e mais se parece com o plano tangente.



(a) (b) (c)

FIGURA 2 O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de. (1, 1, 3).

Na Figura 3 reforçamos essa impressão dando *zoom* em torno de (1, 1) no mapa de contorno da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que, quanto mais ampliamos, mais as curvas de nível parecem retas igualmente espaçadas, o que caracteriza uma região plana.

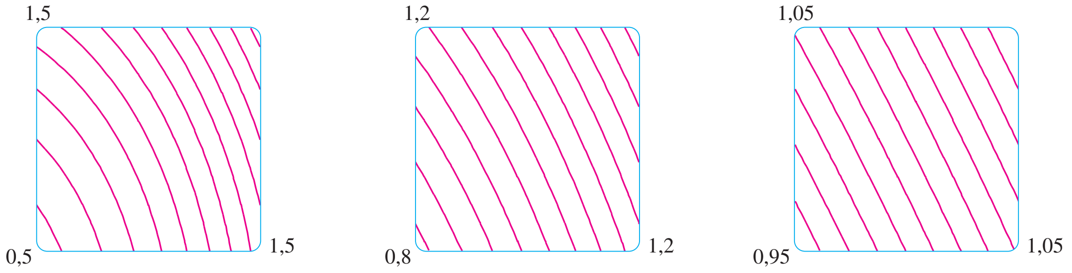


FIGURA 3

Dando *zoom* em torno do ponto (1, 1) no mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Aproximações Lineares

No Exemplo 1 descobrimos que uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$. Portanto, em vista da evidência visual nas Figuras 2 e 3, a função linear de duas variáveis

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação de $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (1, 1). A função L é chamada *linearização* de f em (1, 1), e a aproximação

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

é denominada *aproximação linear* ou *aproximação pelo plano tangente* de f em (1, 1).

Por exemplo, no ponto (1,1, 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) \approx 4(1{,}1) + 2(0{,}95) - 3 = 3{,}3$$

que está bastante próximo do valor verdadeiro de $f(1{,}1,\ 0{,}95) = 2(1{,}1)^2 + (0{,}95)^2 = 3{,}3225$. Se, entretanto, tomarmos um ponto longe de (1, 1), como (2, 3), não teremos mais uma boa aproximação. De fato, $L(2, 3) = 11$, ao passo que $f(2, 3) = 17$.

Em geral, sabemos de $\boxed{2}$ que uma equação do plano tangente ao gráfico de uma função f de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$\boxed{3} \qquad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é denominada **linearização** de f em (a, b), e a aproximação

$$\boxed{4} \qquad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada **aproximação linear** ou **aproximação pelo plano tangente** de f em (a, b).

Definimos o plano tangente para as superfícies $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se f_x e f_y não são contínuas? A Figura 4 apresenta uma tal função. Sua equação é

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

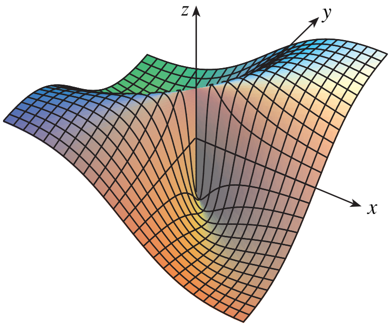


FIGURA 4

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

Podemos verificar (veja o Exercício 46) que suas derivadas parciais existem na origem e são $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$, mas f_x e f_y não são contínuas. A aproximação linear seria $f(x, y) \approx 0$, mas $f(x, y) = \frac{1}{2}$ em todos os pontos na reta $y = x$. Portanto a função de duas variáveis pode comportar-se mal mesmo se ambas as derivadas parciais existirem. Para evitar esse comportamento, introduzimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.

Lembremo-nos de que para uma função de uma variável, $y = f(x)$, se x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

No Capítulo 3, no Volume I, mostramos que, se f é diferenciável em a, então

$$\boxed{5} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x \qquad \text{onde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0$$

Esta é a Equação 3.4.7.

Considere agora uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, e suponha que x varie de a para $a + \Delta x$ e y varie de b para $b + \Delta y$. Então, o **incremento** correspondente de z é

$$\boxed{6} \qquad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Portanto, o incremento Δz representa a variação de valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogia a $\boxed{5}$, definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como segue.

$\boxed{7}$ **Definição** Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

A Definição 7 diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear $\boxed{4}$ é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (a, b). Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Algumas vezes é difícil usar a Definição 7 diretamente para verificar a diferenciabilidade da função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficientemente conveniente para a diferenciabilidade.

O Teorema 8 está demonstrado no Apêndice F.

$\boxed{8}$ **Teorema** Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

A Figura 5 mostra o gráfico da função f e sua linearização L no Exemplo 2.

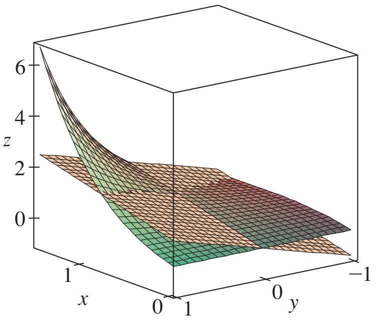


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em (1, 0) e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1{,}1, -0{,}1)$.

SOLUÇÃO As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$
$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x quanto f_y são funções contínuas; portanto, f é diferenciável pelo Teorema 8. A linearização é dada por

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

A aproximação linear correspondente é

$$xe^{xy} \approx x + y$$

Assim, $$f(1{,}1, -0{,}1) \approx 1{,}1 - 0{,}1 = 1$$

Compare esse valor com o valor real de $f(1{,}1, -0{,}1) = 1{,}1\,e^{-0{,}11} \approx 0{,}98542$. ■

EXEMPLO 3 No início da Seção 14.3 discutimos o humidex (temperatura aparente) I como uma função da temperatura real T e da umidade relativa H e fornecemos a seguinte tabela de valores:

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Determine uma aproximação linear para o humidex $I = f(T, H)$ quando T está próximo de 30 °C e H está próximo de 60%. Use essa estimativa do humidex quando a temperatura estiver a 31 °C e a umidade relativa for 62%.

SOLUÇÃO Lemos na tabela que $f(30, 60) = 38$. Na Seção 14.3 usamos os valores tabelados para estimar $f_T(30, 60) \approx 1{,}75$ e $f_H(30, 60) \approx 0{,}3$. Assim, a aproximação linear é

$$\begin{aligned} f(T, H) &\approx f(30, 60) + f_T(30, 60)(T - 30) + f_H(30, 60)(H - 60) \\ &\approx 38 + 1{,}75(T - 30) + 0{,}3(H - 60) \end{aligned}$$

Em particular,

$$f(31, 62) \approx 38 + 1{,}75(1) + 0{,}3(2) = 40{,}35$$

Portanto, quando $T = 31$ ºC e $H = 62\%$, o humidex é

$$I \approx 40{,}4\ ºC$$

Diferenciais

Para uma função de uma única variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer qualquer número real. A diferencial de y é definida como

9
$$dy = f'(x)\, dx$$

(Veja a Seção 3.10.) A Figura 6 mostra as relações entre o incremento Δy e a diferencial dy: Δy representa a variação de altura da curva $y = f(x)$ e dy representa a variação de altura da reta tangente quando x varia da quantidade $dx = \Delta x$.

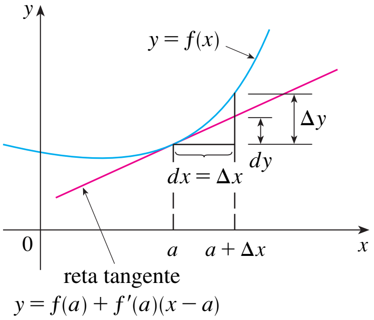


FIGURA 6

Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as **diferenciais** dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a **diferencial** dz também chamada de **diferenciação total**, é definida por

10
$$\boxed{dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy}$$

(Compare com a Equação 9.) Algumas vezes a notação df é usada no lugar de dz.

Se tomamos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$ na Equação 10, então a diferencial de z é

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear $\boxed{4}$ pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

A Figura 7 é uma correspondente tridimensional da Figura 6 e mostra a interpretação geométrica da diferencial dz e o incremento Δz:dz representa a alteração da altura do plano tangente, ao passo que Δz representa a alteração da altura da superfície $z = f(x, y)$ quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

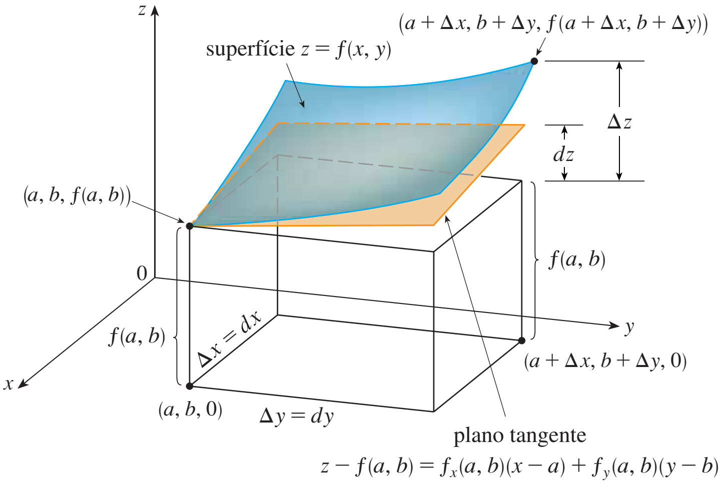


FIGURA 7

EXEMPLO 4

(a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

(b) Se x varia de 2 para 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

No Exemplo 4, dz está próximo de Δz porque o plano tangente é uma boa aproximação da superfície $z = x^2 + 3xy - y^2$ perto do ponto (2, 3, 13). (Veja a Figura 8.)

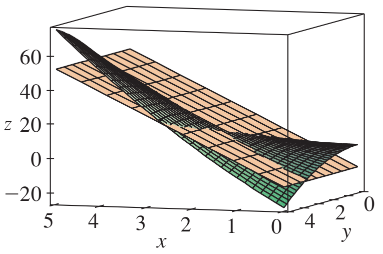


FIGURA 8

SOLUÇÃO
(a) Da Definição 10 vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$, obtemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04) = 0{,}65$$

O incremento de z é

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2{,}05,\ 2{,}96) - f(2,\ 3) \\ &= [(2{,}05)^2 + 3(2{,}05)(2{,}96) - (2{,}96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= 0{,}6449 \end{aligned}$$

Observe que $\Delta z \approx dz$, mas dz é mais simples de calcular.

EXEMPLO 5 Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

SOLUÇÃO O volume V do cone com raio da base r e altura h é $V = \pi r^2 h/3$. Logo, a diferencial de V é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Como cada erro é de, no máximo, 0,1 cm, temos $|\Delta r| \leqslant 0{,}1$, $|\Delta h| \leqslant 0{,}1$. Para estimarmos o maior erro no volume, tomamos o maior erro na mensuração de r e de h; portanto, tomamos $dr = 0{,}1$ e $dh = 0{,}1$ para $r = 10$, $h = 25$. Isso dá

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0{,}1) + \frac{100\pi}{3}(0{,}1) = 20\pi$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de cerca de $20\pi\ \text{cm}^3 \approx 63\ \text{cm}^3$.

Funções de Três ou Mais Variáveis

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis. Uma função diferenciável é definida por uma expressão semelhante àquela da Definição 7. Para essas funções a **aproximação linear** é

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e a linearização $L(x, y, z)$ é o lado direito dessa expressão.

Se $w = f(x, y, z)$, então o **incremento** de w é

$$\Delta w = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

A **diferencial** dw é definida em termos das diferenciais dx, dy e dz das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EXEMPLO 6 As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

SOLUÇÃO Se as dimensões da caixa são x, y e z, seu volume é $V = xyz$; portanto,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$. Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos, portanto, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ junto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm³ no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa. ■

14.4 Exercícios

1–6 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 3y^2 - 2x^2 + x, \quad (2, -1, -3)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7, \quad (2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}, \quad (1, 1, 1)$

4. $z = xe^{xy}, \quad (2, 0, 2)$

5. $z = x\,\text{sen}(x + y), \quad (-1, 1, 0)$

6. $z = \ln(x - 2y), \quad (3, 1, 0)$

▦ **7–8** Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2, \quad (1, 1, 5)$

8. $z = \text{arctg}(xy^2), \quad (1, 1, \pi/4)$

SCA **9–10** Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy\,\text{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}, \quad (1, 1, 0) \qquad (1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right), \quad (1, 1, 3e^{-0,1})$

11–16 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

11. $f(x, y) = 1 + x\ln(xy - 5), \quad (2, 3)$

12. $f(x, y) = x^3y^4, \quad (1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}, \quad (2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y, \quad (\pi, 0)$

16. $f(x, y) = y + \text{sen}(x/y), \quad (0, 3)$

17–18 Verifique a aproximação linear em (0, 0).

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Dado que f é uma função diferenciável $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$ e $f_y(2, 5) = -1$, use uma aproximação linear para estimar $f(2{,}2; 4{,}9)$.

▦ **20.** Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = 1 - xy\cos \pi y$ em (1, 1) e use-a para aproximar o número $f(1{,}02; 0{,}97)$. Ilustre, traçando o gráfico de f e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em (3, 2, 6) e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

22. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela. Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 ºC e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 ºC e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1. Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a -15 ºC e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a -17 ºC e a velocidade do vento for de 55 km/h.

▦ É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

v T	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

25–30 Determine a diferencial da função.

25. $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$

26. $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \lambda$

30. $L = xze^{-y^2-z^2}$

31. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de (1, 2) a (1,05, 2,1), compare os valores de Δz e dz.

32. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

33. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

34. Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

35. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

36. O índice de sensação térmica é modelado pela função

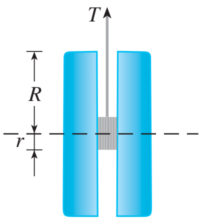
$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (em °C) e v, a velocidade do vento (em km/h). A velocidade do vento é medida como 26 km/h, com uma possibilidade de erro de ±2 km/h, e a temperatura é medida como −11 °C, com a possibilidade de erro de ±1 °C. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no valor calculado de W em decorrência dos erros de medida em T e v.

37. A tensão T no cordel do ioiô na figura é

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

onde m é a massa do ioiô e g é a aceleração pela gravidade. Utilize as diferenciais para estimar a variação na tensão se R aumentar de 3 cm para 3,1 cm e r aumentar de 0,7 cm para 0,8 cm. A tensão aumenta ou decresce?



38. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura decresce de 310 K para 305 K.

39. Se R é a resistência equivalente de três resistores conectados em paralelo, com resistências R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências são medidas em ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

40. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

41. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por $S = 72{,}09w^{0{,}425}\, h^{0{,}725}$, onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de w e h forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

42. Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2, 1, 3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t,\ 1 - t^2,\ 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2,\ 2u^3 - 1,\ 2u + 1 \rangle$$

ambas estão em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

43–44 Mostre que a função é diferenciável achando valores de ε_1 e ε_2 que satisfaçam à Definição 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demonstre que se f é uma função de duas variáveis diferenciáveis em (a, b), então f é contínua em (a, b).
Dica: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

foi representada em um gráfico na Figura 4. Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em (0, 0). [*Dica*: Utilize o resultado do Exercício 45.]
(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em (0, 0).

14.5 Regra da Cadeia

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para derivar uma função composta: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então y é uma função indiretamente diferenciável de t e

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta. A primeira versão (Teorema 2) lida com o caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, uma função de uma variável t. Isso significa que z é indiretamente uma função de t, $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar z como uma função de t. Presumimos que f seja diferenciável (Definição 14.4.7.) Lembremo-nos de que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas (Teorema 14.4.8).

$\boxed{2}$ **A Regra da Cadeia (Caso 1)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DEMONSTRAÇÃO Uma variação de Δt em t produz variações de Δx em x e Δy em y. Essas, por sua vez, produzem uma variação de Δz em z e, da Definição 14.4.7, temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. [Se as funções ε_1 e ε_2 não estão definidas em (0, 0), podemos defini-las como 0.] Dividindo ambos os lados desta equação por Δt, temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se fizermos $\Delta t \to 0$, então $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ porque g é diferenciável e, portanto, contínua. Da mesma forma, $\Delta y \to 0$. Isso, por sua vez, implica que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$, portanto

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

Como frequentemente escrevemos $\partial z/\partial x$ no lugar de $\partial f/\partial x$, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

Observe a semelhança com a definição da diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

EXEMPLO 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen}\ 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

SOLUÇÃO A Regra da Cadeia fornece

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen}\ t)\end{aligned}$$

Não é necessário substituir as expressões por x e y em termos de t. Nós simplesmente observamos que quando $t = 0$, temos $x = \text{sen}\ 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$. Portanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\text{sen}\ 0) = 6$$

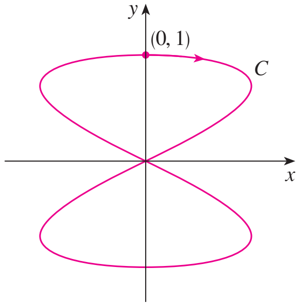


FIGURA 1
A curva $x = \text{sen}\ 2t$, $y = \cos t$

A derivada no Exemplo 1 pode ser interpretada como a taxa de variação de z com relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C com equações paramétricas $x = \text{sen}\ 2t$, $y = \cos t$ (Veja a Figura 1.) Em particular, quando $t = 0$, o ponto (x, y) é $(0, 1)$, e $dz/dt = 6$ é a taxa de aumento quando nos movemos ao longo da curva C por $(0, 1)$. Se, por exemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representar a temperatura no ponto (x, y), então a função composta $z = T(\text{sen}\ 2t, \cos t)$ representa a temperatura dos pontos da curva C e sua derivada dz/dt corresponde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva C.

EXEMPLO 2 A pressão em P (em kilopascals), volume V (em litros) e temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação $PV = 8{,}31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de 0,1 K/s e o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de 0,2 L/s.

SOLUÇÃO Se t representa o tempo decorrido, medido em segundos, então em um dado instante temos $T = 300$, $dT/dt = 0{,}1$, $V = 100$, $dV/dt = 0{,}2$. Como

$$P = 8{,}31\frac{T}{V}$$

pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8{,}31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8{,}31T}{V^2}\frac{dV}{dt}\\ &= \frac{8{,}31}{100}(0{,}1) - \frac{8{,}31(300)}{100^2}(0{,}2) = -0{,}04155\end{aligned}$$

A pressão está decrescendo com a taxa de 0,042 kPa/s.

Vamos considerar agora a situação onde $z = f(x, y)$, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Então z é indiretamente uma função de s e t e desejamos determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$. Lembre-se de que para calcular $\partial z/\partial t$ mantemos s fixo e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t. Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Argumento análogo serve para $\partial z/\partial s$, e assim demonstramos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

3 **A Regra da Cadeia (Caso 2)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EXEMPLO 3 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

SOLUÇÃO Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2e^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis: s e t são variáveis **independentes**, x e y são chamadas de variáveis **intermediárias**, e z é a variável **dependente**. Observe que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia unidimensional da Equação 1.

Para lembrar a Regra da Cadeia, é útil desenhar o **diagrama em árvore** da Figura 2. Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente z para as variáveis intermediárias x e y a fim de indicar que z é uma função de x e y. Então desenhamos os ramos saindo de x e y para as variáveis independentes s e t. Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente. Para determinar $\partial z/\partial s$, nós determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de z a s e somamos esses produtos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

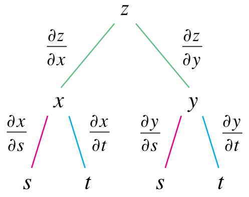

z
$\frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial z}{\partial y}$
x
y
$\frac{\partial x}{\partial s}$
$\frac{\partial x}{\partial t}$
$\frac{\partial y}{\partial s}$
$\frac{\partial y}{\partial t}$
s
t
s
t

FIGURA 2

Da mesma forma, para determinar $\partial z/\partial t$ usamos os caminhos de z a t.

Consideremos agora uma situação mais geral, na qual a variável dependente u é uma função de n variáveis intermediárias $x_1, \dots, x_n$, cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes $t_1, \dots, t_m$. Observe que existem n termos, um para cada variável intermediária. A demonstração é semelhante à do Caso 1.

4 **A Regra da Cadeia (Versão Geral)** Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \dots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \dots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

EXEMPLO 4 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

SOLUÇÃO Aplicamos o Teorema 4 com $n = 4$ e $m = 2$. A Figura 3 mostra o diagrama em árvore. Apesar de não termos escrito as derivadas nos ramos, entendemos que se um ramo liga y e u, então a derivada parcial para este ramo é $\partial y/\partial u$. Com a ajuda do diagrama em árvore, podemos escrever as expressões pedidas:

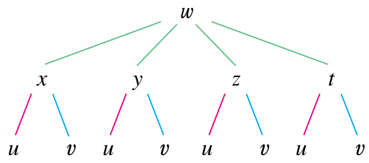


FIGURA 3

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v} \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 5 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

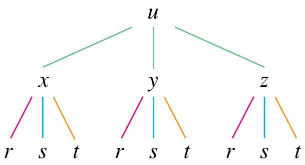


FIGURA 4

SOLUÇÃO Com o auxílio do diagrama em árvore da Figura 4, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)\end{aligned}$$

Quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$, temos $x = 2$, $y = 2$ e $z = 0$, portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192 \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 6 Se $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUÇÃO Seja $x = s^2 - t^2$ e $y = t^2 - s^2$. Então $g(s, t) = f(x, y)$ e a Regra da Cadeia nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Portanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 7 Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine (a) $\partial z/\partial r$ e (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUÇÃO

(a) A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

(b) Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), obtemos

$$\boxed{5} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Mas, usando a Regra da Cadeia novamente (veja a Figura 5), temos

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

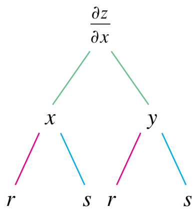


FIGURA 5

Colocando essas expressões na Equação 5 e usando a igualdade das derivadas parciais de segunda ordem mistas, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Diferenciação Implícita

A Regra da Cadeia pode ser usada para dar uma descrição mais completa do processo de derivação implícita introduzida nas Seções 3.5, no Volume I, e 14.3. Supomos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar o Casa 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x. Já que x e y são funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

No entanto, $dx/dx = 1$, então se $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx e obtemos

6

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Para deduzir essa equação, presumimos que $F(x, y) = 0$ define y implicitamente como função de x. O **Teorema da Função Implícita**, demonstrado em cálculo avançado, fornece condições sob as quais essa suposição é válida: Ele afirma que se F é definida em uma bola aberta contendo (a, b), onde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas nessa bola, então a equação $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x perto do ponto (a, b) e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

EXEMPLO 8 Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUÇÃO A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ da seguinte forma:

A solução do Exemplo 8 deve ser comparada com a do Exemplo 2 da Seção 3.5, no Volume I.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Mas, $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad$ e $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de uma maneira semelhante.

$$\boxed{7} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** estipula condições sob as quais nossa suposição é válida: se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais dessa função são dadas por $\boxed{7}$.

EXEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUÇÃO Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então, das Equações 7, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

14.5 Exercícios

1–6 Use a Regra da Cadeia para achar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \text{sen}\, t, \quad y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,, $\quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

4. $z = \text{tg}^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \text{sen}\, t, \quad y = \cos t, \quad z = \text{tg}\, t$

7–12 Use a Regra da Cadeia para achar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s\,\text{sen}\, t$

8. $z = \text{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

9. $z = \text{sen}\,\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

11. $z = e^r\cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \text{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$$\begin{array}{ll} x = g(t) & y = h(t) \\ g(3) = 2 & h(3) = 7 \\ g'(3) = 5 & h'(3) = -4, \\ f_x(2, 7) = 6 & f_y(2, 7) = -8 \end{array}$$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u e v são diferenciáveis, e

$$\begin{array}{ll} u(1, 0) = 2 & v(1, 0) = 3 \\ u_s(1, 0) = -2 & v_s(1, 0) = 5 \\ u_t(1, 0) = 6 & v_t(1, 0) = 4 \\ F_u(2, 3) = -1 & F_v(2, 3) = 10 \end{array}$$

Encontre $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \text{sen}\, v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ve^w;$

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w} \quad \text{quando } u = 2, \quad v = 1, \quad w = 0$$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad r = y + x\cos t, \quad s = x + y\,\text{sen}\, t;$

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{quando } x = 1, \quad y = 2, \quad t = 0$$

23. $w = xy + yz + zx, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = r\theta;$

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad \text{quando } r = 2,\ \theta = \pi/2$$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad u = xe^y, \quad v = ye^x, \quad w = e^{xy};$

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{quando } x = 0, \quad y = 2$$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}, \quad p = u + vw, \quad q = v + uw, \quad r = w + uv;$

$$\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial w} \quad \text{quando } u = 2, \quad v = 3, \quad w = 4$$

26. $u = xe^{ty}, \quad x = \alpha^2\beta, \quad y = \beta^2\gamma, \quad t = \gamma^2\alpha;$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma} \quad \text{quando } \alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1$$

27–30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \text{sen}\, y$

29. $\text{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y\,\text{sen}\, x = x + xy$

31–34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual das chuvas R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.

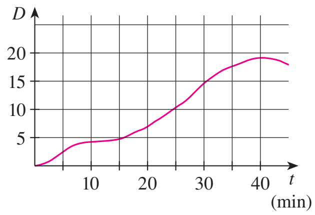
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?

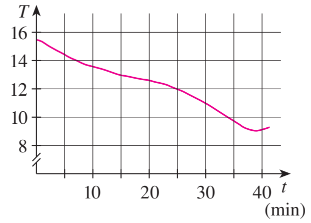
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?





38. O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura está decrescendo em uma taxa de 6,5 cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w estão aumentando em uma taxa de 2 m/s enquanto h está decrescendo em uma taxa de 3 m/s. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.

(a) O volume

(b) A área da superfície

(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de 0,15 K/s. Use a equação no Exemplo 2 para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320 K.

42. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor de toda essa produção em milhões de dólares) como uma função Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47\, L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Suponha que quando $L = 30$ e $K = 8$, a força de trabalho esteja decrescendo em uma taxa de 2.000 horas trabalhadas por ano e o capital esteja aumentando em uma taxa de \$ 500.000 por ano. Encontre a taxa de variação da produção.

43. Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de 3cm/s e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

44. Se um som com frequência f_s for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade v_s e um observador estiver se movendo com velocidade v_o ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

onde c é a velocidade do som, cerca de 332m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um dado momento, você esteja em um trem que se move a 34 m/s e acelera a 1,2 m/s^2. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s^2, e toca seu apito, com frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45–48 Suponha que todas as funções dadas sejam diferenciáveis.

45. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \operatorname{sen} t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49–54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Dica*: Seja $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \operatorname{sen} t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Uma função f é chamada **homogênea de *n*-ésimo grau** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t, onde n é um inteiro positivo e f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

(a) Verifique se $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Dica*: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

56. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1)f(x, y)$$

57. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como funções das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. A Equação 6 é uma fórmula para a derivada $dy/\,dx$ de uma função definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, sendo que F é diferenciável e $F_y \neq 0$. Comprove que se F tem derivadas contínuas de segunda ordem, então uma fórmula para a segunda derivada de y é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

A Figura 1 mostra um mapa de contorno da função temperatura $T(x, y)$ para a China às 15 horas em 28 de dezembro de 2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam-se às localidades que têm a mesma temperatura. A derivada parcial T_x em um local como Chongqing é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Chongqing; T_y é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte. Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção? Nesta seção, introduziremos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

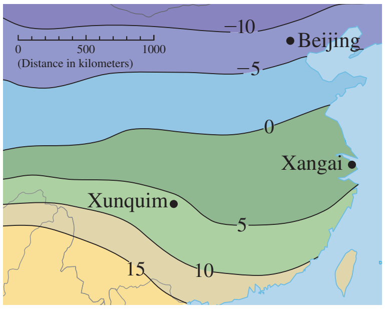


FIGURA 1

Derivadas Direcionais

Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

$$\boxed{1} \qquad \begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\[2ex] f_y(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

e representam as taxas de mudança de z nas direções x e y, ou seja, na direção dos vetores de unidade **i** e **j**.

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Veja a Figura 2.) Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. Então o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ está em S. O plano vertical que passa por P na direção de **u** intercepta S em uma curva C. (Veja a Figura 3.) A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de **u**.

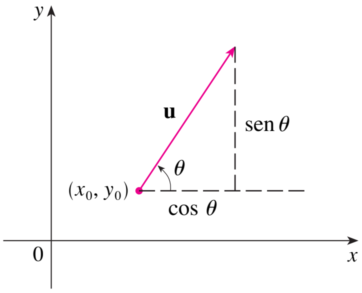


FIGURA 2
Um vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$

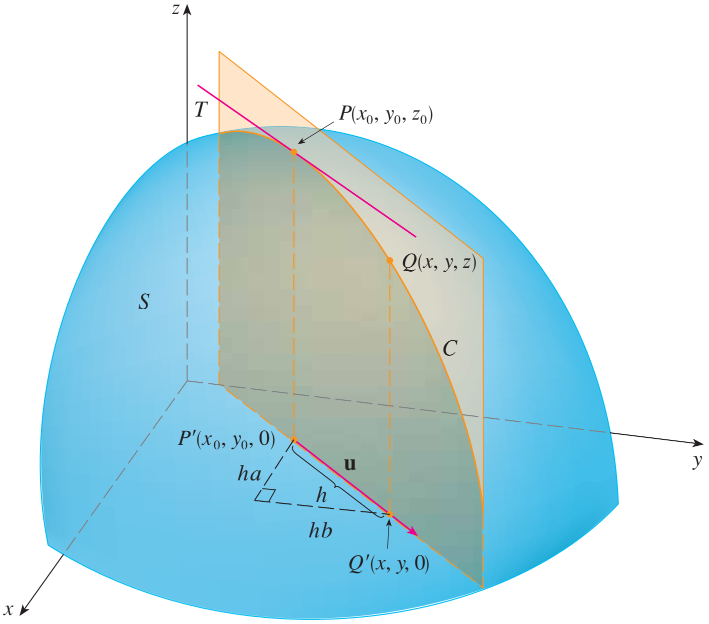


FIGURA 3

TEC *Visual 14.6A* mostra uma animação da Figura 3 ao rotacionar **u** e, portanto T.

Se $Q(x, y, z)$ é outro ponto sobre C e P', Q' são as projeções de P, Q sobre o plano xy, então o vetor $\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a **u** e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para alguma escalar h. Logo, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, portanto $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$, que é chamada derivada direcional de f na direção e sentido de $\mathbf{u}$.

$\boxed{2}$ **Definição** A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Comparando a Definição 2 com as Equações $\boxed{1}$, vemos que, se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. Em outras palavras, as derivadas parciais de f relacionadas a x e y são apenas casos especiais da derivada direcional.

EXEMPLO 1 Use o mapa climático na Figura 1 para estimar o valor da derivada direcional da função da em Chongqing na direção Sudoeste.

SOLUÇÃO O vetor unitário na direção Sudeste é dado por $\mathbf{u} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$, mas não necessitaremos dessa expressão. Em vez disso, inicialmente traçamos uma reta que passa por Chongqing na direção sudeste. (Veja a Figura 4.)

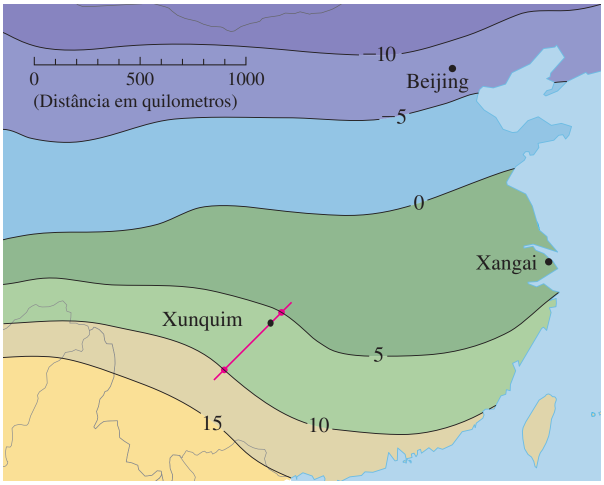


FIGURA 4

Aproximamos a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}T$ pela taxa média da variação da temperatura entre os pontos onde essa linha intercepta as isotérmicas $T = 5$ e $T = 10$. A temperatura no ponto sudoeste de Chongqing é $T = 10$ °C e a temperatura no ponto nordeste de Chongqing é $T = 5$ °C. A distância entre esses pontos parece ser aproximadamente de 380 km. Portanto a taxa de variação da temperatura na direção sudoeste é

$$D_{\mathbf{u}} T \approx \frac{10 - 5}{380} = \frac{5}{380} \approx 0{,}013 \text{ °C/km}$$

Quando calculamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema:

$\boxed{3}$ **Teorema** Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

DEMONSTRAÇÃO Se definirmos uma função g de uma única variável h por

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$\boxed{4}\qquad \begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,\, y_0+hb)-f(x_0,\, y_0)}{h} \\ &= D_{\mathbf{u}}f(x_0,\, y_0) \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever $g(h) = f(x, y)$, onde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$ e, pela Regra da Cadeia (Teorema 14.5.2), vem

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b$$

Se tomarmos $h = 0$, então $x = x_0$, $y = y_0$, e

$$\boxed{5}\qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

Comparando as Equações 4 e 5, vemos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

Se o vetor unitário **u** faz um ângulo θ com o eixo x positivo (como na Figura 2), então podemos escrever $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$\boxed{6}\qquad D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

EXEMPLO 2 Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

e **u** é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?

SOLUÇÃO A Fórmula 6 dá

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

A derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ no Exemplo 2 representa a taxa de variação de z na direção de **u**. Isso é a inclinação da reta da tangente para a curva de intersecção da superfície $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ e o plano vertical por $(1, 2, 0)$ na direção de **u** mostrado na Figura 5.

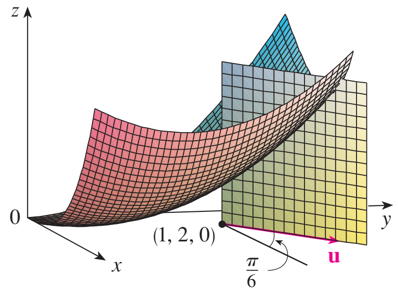


FIGURA 5

O Vetor Gradiente

Observe no Teorema 3 que a derivada direcional de uma função diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\boxed{7}\qquad \begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \langle a, b\rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações. Assim, daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de f) e uma notação especial (**grad** f ou ∇f, que lemos "del f").

$\boxed{8}$ **Definição** Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \text{sen}\, x + e^{xy}$, então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

e
$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a Equação 7 para a derivada direcional de uma função diferenciável como

$$\boxed{9} \qquad \boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

Isso expressa a derivada direcional na direção de **u** como a projeção escalar do vetor gradiente sobre **u**.

O vetor gradiente $\nabla f(2, -1)$ do Exemplo 4 é mostrado na Figura 6 com ponto inicial $(2, -1)$. Também é mostrado o vetor **v**, que dá a direção da derivada direcional. Ambos os vetores estão sobrepostos ao mapa de contorno do gráfico de f.

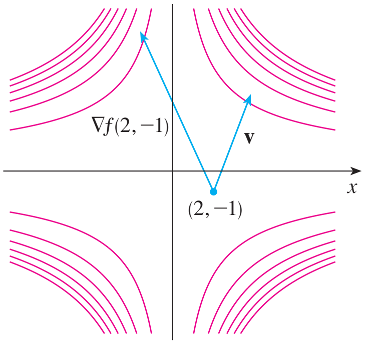


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

SOLUÇÃO Primeiramente, vamos calcular o vetor gradiente em $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Observe que **v** não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de **v** é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j} \right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Funções de Três Variáveis

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de modo semelhante. Novamente $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção de um vetor unitário **u**.

$\boxed{10}$ **Definição** A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Se usarmos a notação vetorial, poderemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

$$\boxed{11} \qquad \boxed{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}}$$

onde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ se $n = 2$ e $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ se $n = 3$. Isso era esperado, porque a equação vetorial da reta que passa por $\mathbf{x}_0$ na direção do vetor **u** é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ (Equação 12.5.1), e, portanto, $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa o valor de f em um ponto dessa reta.

Se $f(x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, então o mesmo método usado na demonstração do Teorema 3 pode ser usado para mostrar que

12 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** f, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$$

ou, de modo mais abreviado,

13 $$\boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}}$$

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

14 $$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}}$$

EXEMPLO 5 Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine o gradiente de f e (b) determine a derivada direcional de f em $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO

(a) O gradiente de f é

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz\rangle\end{aligned}$$

(b) No ponto $(1, 3, 0)$ temos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3\rangle$. O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Portanto, da Equação 14, vem

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

■

Maximizando a Derivada Direcional

Suponha que tenhamos uma função f de duas ou três variáveis e consideremos todas as derivadas direcionais possíveis de f em um ponto determinado. Isso nos dará a taxa de variação de f em todas as direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções f varia mais rapidamente e qual a taxa máxima de variação? A resposta a essas perguntas é dada pelo seguinte teorema.

15 **Teorema** Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

TEC *Visual 14.6B* realiza uma confirmação visual do Teorema 15.

DEMONSTRAÇÃO Da Equação 9 ou 14 temos

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$. O valor máximo de $\cos\theta$ é 1 e isso ocorre quando $\theta = 0$. Logo, o valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ é $|\nabla f|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção que ∇f.

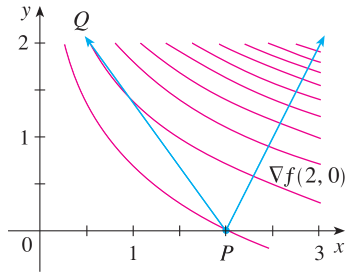


FIGURA 7

Em (2, 0) a função no Exemplo 6 aumenta mais rápido na direção do vetor gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$. Na Figura 7 observe que esse vetor parece ser perpendicular à curva de nível que passa por (2, 0). A Figura 8 mostra o gráfico de f e o vetor gradiente.

EXEMPLO 6

(a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO

(a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e, xe^y\rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$$

O vetor unitário na direção $\overrightarrow{PQ} = \langle -1{,}5,\ 2\rangle$ é $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$, logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$. A taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2\rangle| = \sqrt{5}$$

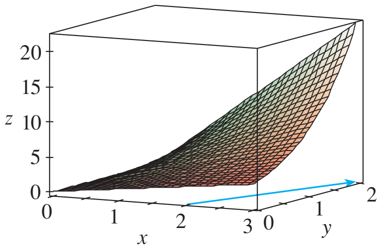


FIGURA 8

EXEMPLO 7 Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

SOLUÇÃO O gradiente de T é

$$\begin{aligned}\nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}\\ &= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}\\ &= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})\end{aligned}$$

No ponto $(1, 1, -2)$, o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k})$$

Pelo Teorema 15, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vetor gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ ou, de forma equivalente, na direção de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ou o vetor unitário $(-\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k})/\sqrt{41}$. A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4$°C/m.

Planos Tangente às Superfícies de Nível

Suponha que S seja a superfície com a equação $F(x, y, z) = k$, ou seja, uma superfície de nível de uma função F de três variáveis, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Seja C qualquer curva na superfície S e que passe pelo ponto P. Lembremo-nos da Seção 13.1 que a curva C é descrita por uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Seja t_0 o valor do parâmetro correspondente ao ponto P; ou seja, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Como C pertence a S, qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S, ou seja,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k \tag{16}$$

Se x, y e z são funções diferenciáveis de t e F também diferenciável, então podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da Equação 16 como segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{17}$$

Mas, já que $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$ e $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$, a Equação 17 pode ser escrita em termos de produto notável como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, quando $t = t_0$, temos $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, e assim

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \tag{18}$$

A Equação 18 nos diz que *o vetor gradiente em P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, é perpendicular ao vetor tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a qualquer curva C em S que passe por P*. (Veja Figura 9.) Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, é natural definir o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ **em** $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Utilizando a equação geral do plano (Equação 12.5.7), podemos escrever a equação do plano tangente como

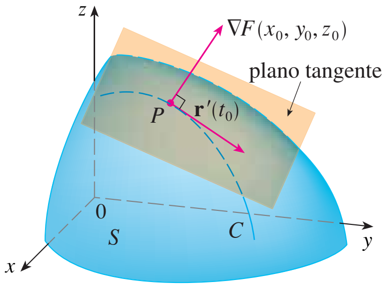


FIGURA 9

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0} \tag{19}$$

A **reta normal** a S em P é a reta passando através de P e perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e, assim, pela Equação 12.5.3, suas equações simétricas são

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{20}$$

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma $z = f(x, y)$ (ou seja, S é o gráfico da função f de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

e considerar S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F. Então

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de modo que a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que é equivalente à Equação 14.4.2. Então, nossa nova, mais geral, definição de plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso especial da Seção 14.4.

EXEMPLO 8 Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUÇÃO O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

A Figura 10 mostra o elipsoide, o plano tangente e a reta normal do Exemplo 8.

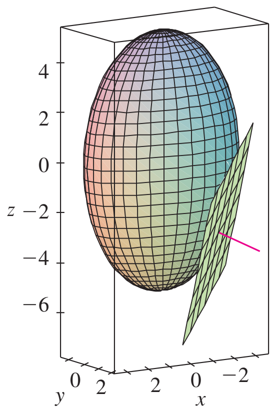


FIGURA 10

Portanto, temos

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Então, da Equação 19, temos que a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

que pode ser simplificada para $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\tfrac{2}{3}}$$

Importância do Vetor Gradiente

Vamos resumir agora as maneiras pelas quais o vetor gradiente é importante. Primeiro, consideramos uma função f de três variáveis e um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f. Por outro, sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal à superfície de nível S de f em P. (Consulte a Figura 9.) Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos afastamos de P em uma superfície de nível S, o valor da função f não se altera. Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

De maneira semelhante, consideramos uma função f de duas variáveis e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio. Novamente, o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f. Da mesma forma, pelas considerações semelhantes à nossa discussão dos planos tangente, pode ser mostrado que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P. Mais uma vez, isso é intuitivamente plausível porque os valores de f continuam constantes à medida que movemos ao longo da curva. (Veja a Figura 11.)

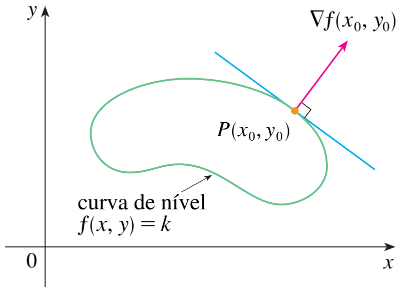


FIGURA 11

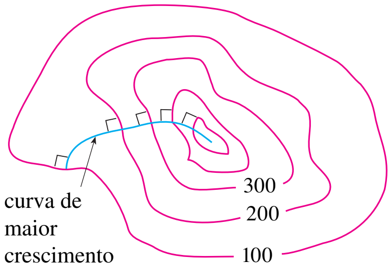


FIGURA 12

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Lonesome Creek segue a curva de declive máximo.

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b). A Figura 13 mostra esse gráfico (chamado *campo de vetor gradiente*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobreimposto a um mapa de contornos de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção "ladeira acima" e são perpendiculares às curvas de nível.

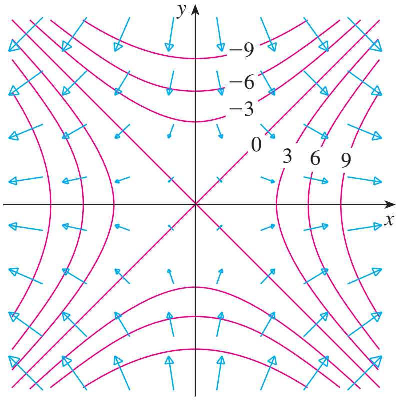
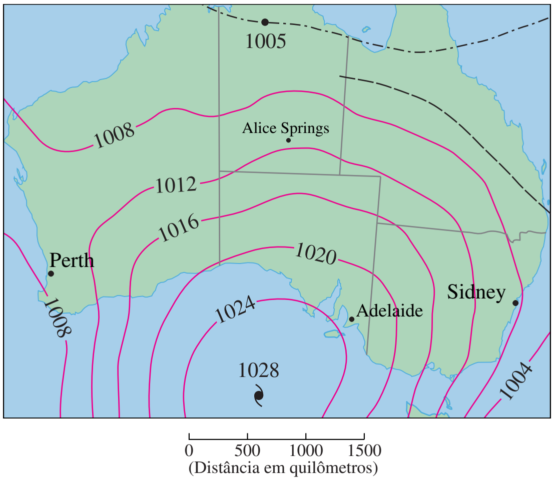


FIGURA 13

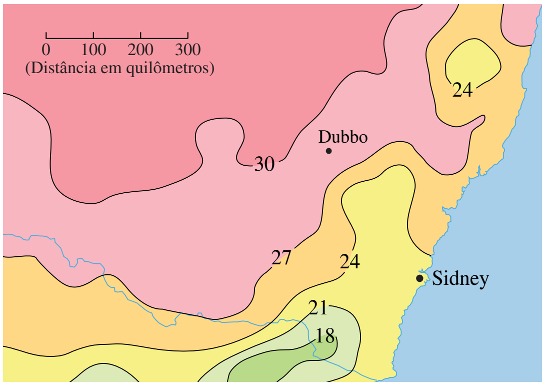
14.6 Exercícios

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascais (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quais são as unidades da derivada direcional?



Baseado em dados de Bureau of Meteorology, Commonwealth of Australia.

2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em °C). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



Reimpresso com a permissão de Commonwealth of Australia.

3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4–6 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 - x^4y^3, \quad (1, 1), \quad \theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}, \quad (0, 4), \quad \theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x \cos y, \quad (0, 0), \quad \theta = \pi/4$

7–10

(a) Determine o gradiente de f.
(b) Calcule o gradiente no ponto P.
(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \text{sen}(2x + 3y), \quad P(-6, 4), \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

8. $f(x, y) = y^2/x, \quad P(1, 2), \quad \mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j})$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}, \quad P(3, 0, 2), \quad \mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}, \quad P(1, 3, 1), \quad \mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11–17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \,\text{sen}\, y, \quad (0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

12. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad (1, 2), \quad \mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3, \quad (2, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

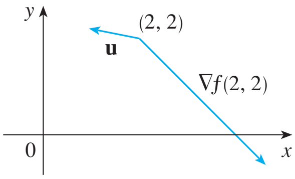
14. $g(r, s) = \text{tg}^{-1}(rs), \quad (1, 2), \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x, \quad (0, 0, 0), \quad \mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}, \quad (3, 2, 6), \quad \mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t), \quad (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ em $P(1, -1, 3)$ na direção de $Q(2, 4, 5)$.

21–26 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(s, t) = te^{st}$, $(0, 2)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1,1,-1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(p, q, r) = \operatorname{arctg}(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Utilize o resultado do item (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, onde x, y, e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 120º.
(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.
(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

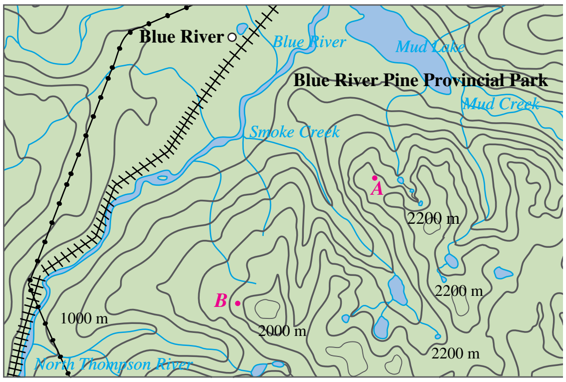
onde T é medido em ºC e x, y, z em metros.
(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.
(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?
(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?
(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1\,000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas $(60, 40, 966)$. O eixo x positivo aponta para o leste e o eixo y positivo aponta para o norte.
(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

36. Um mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park em British Columbia é mostrado. Desenhe as curvas da descida mais íngreme do ponto A (descendo até o Mud Lake) e do ponto B.



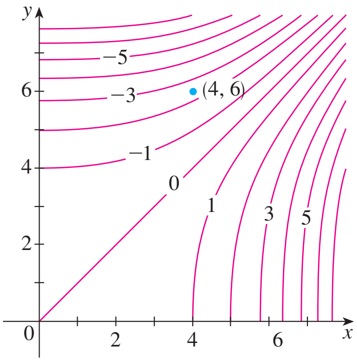
© Department of Natural Resources Canada. Todos os direitos reservados.

37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções diferenciáveis de x e y e que a, b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39. A **segunda derivada direcional** de $f(x, y)$ é

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x, y)]$$

Se $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ e $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, calcule $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$.

40. (a) Se $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é uma unidade vetorial e f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx} a^2 + 2f_{xy} ab + f_{yy} b^2$$

(b) Determine a derivada direcional de $f(x, y) = xe^{2y}$ na direção de $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$.

41–46 Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

41. $[2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$

42. $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$

43. $xyz^2 = 6$, $(3, 2, 1)$

44. $xy + yz + zx = 5$, $(1, 2, 1)$

45. $x + y + z = e^{xyz}$, $(0, 0, 1)$

46. $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2z^2$, $(1, 1, 1)$

47–48 Utilize um computador para traçar o gráfico da superfície, do plano tangente e da reta normal na mesma tela. Escolha o domínio com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

47. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

48. $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

49. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto (3, 2). Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

50. Se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, encontre o vetor gradiente $\nabla g(1, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ no ponto (1, 2). Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

51. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 51.

53. Mostre que a equação do plano tangente ao paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. Em qual ponto do paraboloide $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$?

55. Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

56. Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto (1, 1, 2). (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

57. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

58. Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

59. Onde a reta normal à parábola $z = x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 2) intercepta o paraboloide uma segunda vez?

60. Em quais pontos a reta normal que passa pelo ponto (1, 2, 1) no elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

61. Mostre que a soma das intersecções x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.

62. Mostre que as pirâmides cortadas do primeiro octante por qualquer plano tangente à superfície $xyz = 1$ em pontos do primeiro octante têm o mesmo volume.

63. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

64. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto (1, 2, 1).

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

65. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais no ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0 \text{ em } P$$

(b) Use o item (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

66. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma o item (a).

67. Suponha que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por vetores unitários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. É possível determinar ∇f nesse ponto? Em caso afirmativo, como fazê-lo?

68. Mostre que, se $z = f(x, y)$ for diferenciável em $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, então

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

. [*Dica*: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

14.7 Valores Máximo e Mínimo

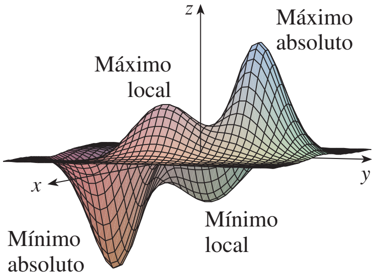


FIGURA 1

Como vimos no Capítulo 4, no Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo (valores extremos). Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade limitada de cartolina para trabalhar.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na Figura 1. Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um *máximo local*, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$. O maior destes dois valores é o *máximo absoluto*. Do mesmo modo, f tem dois *mínimos locais* onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos. O maior destes dois valores é o *mínimo absoluto*.

$\boxed{1}$ **Definição** Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de $(a, b.)$ [Isso significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) em alguma bola aberta com centro (a, b).] O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Se as inequações da Definição 1 valerem para *todos* os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

Observe que a conclusão do Teorema 2 pode ser enunciada na notação de vetores gradientes como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

$\boxed{2}$ **Teorema** Se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = f(x, b)$. Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b), então g tem um máximo (ou mínimo) local em a, portanto $g'(a) = 0$ pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4). Mas $g'(a) = f_x(a, b)$ (veja a Equação 14.3.1) e, portanto, $f_x(a, b) = 0$. Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função $G(y) = f(a, y)$, obtemos $f_y(a, b) = 0$. ■

Se impusermos $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ na equação do plano tangente (Equação 14.4.2), obteremos $z = z_0$. Assim, a interpretação geométrica do Teorema 2 é que o gráfico de f tem um plano tangente em um máximo ou mínimo local, portanto, o plano tangente deve ser horizontal.

Um ponto (a, b) é chamado **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir. O Teorema 2 diz que se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f. No entanto, como no cálculo variável único, nem todos os pontos críticos originam máximos ou mínimos. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

EXEMPLO 1 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$. Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Já que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$, temos $f(x, y) \geqslant 4$ para todos os valores de x e y. Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local e, de fato, é o mínimo absoluto de f. Isso pode ser confirmado geometricamente a partir do gráfico de f, que é o paraboloide elíptico com vértice $(1, 3, 4)$ mostrado na Figura 2. ■

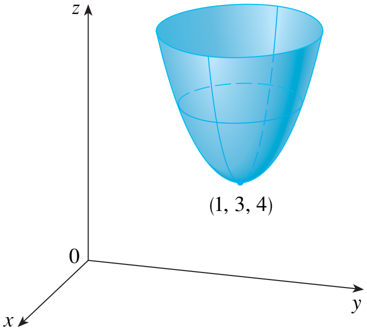


FIGURA 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EXEMPLO 2 Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUÇÃO Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é (0, 0). Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$, portanto $f(x, y) = -x^2 < 0$ (se $x \neq 0$). Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$, portanto $f(x, y) = y^2 > 0$ (se $y \neq 0$). Logo, todo disco com centro (0, 0) contém pontos onde a função tem valores positivos, assim como pontos onde f tem valores negativos. Então, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f, portanto f não tem valor extremo.

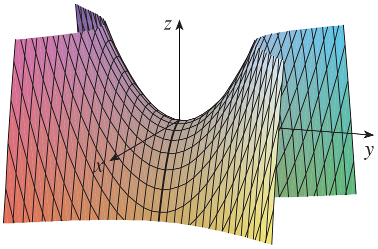


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$

O Exemplo 2 ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico. A Figura 3 mostra como isso é possível. O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tem plano horizontal tangente ($z = 0$) na origem. É possível observar que $f(0, 0) = 0$ é um máximo na direção do eixo x, mas um mínimo na direção do eixo y. Próximo à origem do gráfico existe o formato de uma sela e, portanto, (0, 0) é chamado *ponto de sela* de f.

Uma montanha tem um formato de sela. Conforme a fotografia da formação geológica ilustra, para as pessoas que escalam em uma direção, o ponto de sela é o ponto mais baixo na rota, enquanto para aqueles que viajam em uma direção diferente, o ponto de sela é o ponto mais alto.

Stan Wagon, Macalester College

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. O teste a seguir, que será demonstrado no fim desta seção, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.

3 **Teste da Segunda Derivada** Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

OBSERVAÇÃ0 1 No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

OBSERVAÇÃ0 2 Se $D = 0$, não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

OBSERVAÇÃO 3 Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

EXEMPLO 3 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUÇÃO Primeiro localizamos os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolvê-las, substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Os três pontos críticos são (0, 0), (1, 1) e (−1, −1). Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

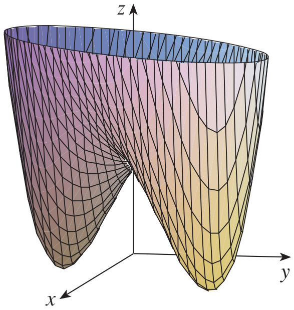


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, segue do caso (*c*) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela; ou seja, f não tem nem máximo local nem mínimo local em $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, vemos do caso (a) do teste que $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local. Da mesma forma, temos $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, portanto $f(-1, -1) = -1$ é também um mínimo local.

O gráfico de f é mostrado na Figura 4.

Um mapa de contorno da função f do Exemplo 3 é mostrado na Figura 5. As curvas de nível perto de $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ têm forma oval e indicam que, quando nos movemos para longe de $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$ em qualquer direção, os valores de f crescem. As curvas de nível perto de $(0, 0)$, por outro lado, parecem hipérboles. Elas revelam que, quando nos movemos para longe da origem (onde o valor de f é 1), os valores de f decrescem em algumas direções, mas crescem em outras. Portanto, o mapa de contornos sugere a presença dos mínimos e do ponto de sela que encontramos no Exemplo 3.

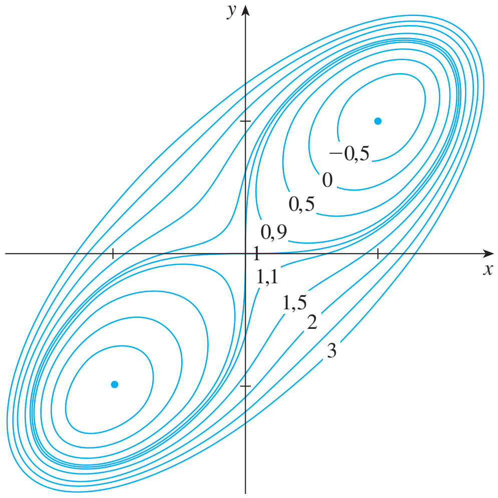


FIGURA 5

TEC Em *Module 14.7*, é possível utilizar os mapas de contorno para estimar as localizações dos pontos críticos

EXEMPLO 4 Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine também o ponto mais alto do gráfico de f.

SOLUÇÃO As derivadas parciais de primeira ordem são

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

Para acharmos os pontos críticos precisamos resolver as equações

$$\boxed{4} \qquad 2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$\boxed{5} \qquad 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

Da Equação 4, vemos que

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

No primeiro caso ($x = 0$), a Equação 5 fica $-4y(1 + y^2) = 0$, assim, $y = 0$ e temos um ponto crítico $(0, 0)$.

No segundo caso ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), temos

$$\boxed{6} \qquad x^2 = 5y - 2{,}5$$

e, substituindo na Equação 5, temos $25y - 12{,}5 - 4y - 4y^3 = 0$. Logo, temos de resolver a equação cúbica

$$\boxed{7} \qquad 4y^3 - 21y + 12{,}5 = 0$$

Utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico da função

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12{,}5$$

como na Figura 6, vemos que a Equação 7 tem três raízes reais. Dando *zoom* podemos achar as raízes com quatro casas decimais:

$$y \approx -2{,}5452 \qquad y \approx 0{,}6468 \qquad y \approx 1{,}8984$$

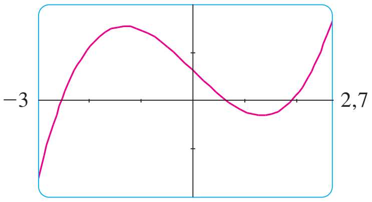


FIGURA 6

(Como alternativa, podemos usar o método de Newton ou um programa para localizar raízes para determiná-las.) Da Equação 6, os valores x correspondentes são dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2.5}$$

Se $y \approx -2{,}5452$, então x não tem valor real correspondente. Se $y \approx 0{,}6468$, então $x \approx \pm 0{,}8567$. Se $y \approx 1{,}8984$, então $x \approx \pm 2{,}6442$. Assim, temos o total de cinco pontos críticos, que são analisados na tabela a seguir. Todos os valores estão arredondados para duas casas decimais.

Ponto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusões
$(0, 0)$	0,00	−10,00	80,00	máximo local
$(\pm 2{,}64, 1{,}90)$	8,50	−55,93	2.488,72	máximo local
$(\pm 0{,}86, 0{,}65)$	−1,48	−5,87	−187,64	ponto de sela

As Figuras 7 e 8 mostram o gráfico de f sob dois pontos de vista diferentes, e vemos que a superfície se abre para baixo. [Isso pode ser visto da expressão de $f(x, y)$: os termos dominantes são $-x^4 - 2y^4$ quando $|x|$ e $|y|$ são grandes.] Comparando os valores de f nos máximos locais, vemos que o máximo absoluto de f é $f(\pm 2{,}64, 1{,}90) \approx 8{,}50$. Em outras palavras, os pontos mais altos do gráfico de f são $(\pm 2{,}64, 1{,}90, 8{,}50)$.

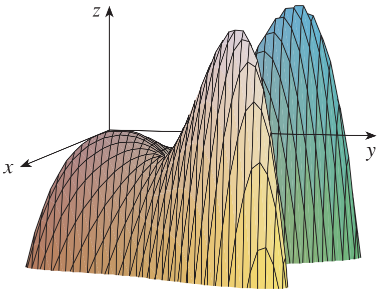


FIGURA 7

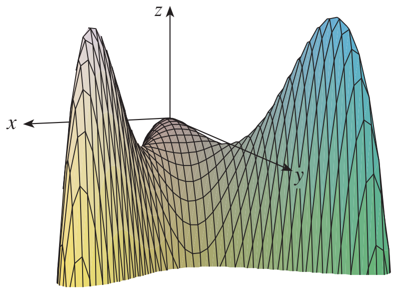


FIGURA 8

TEC *Visual 14.7* mostra diversas famílias de superfícies. A superfície nas Figuras 7 e 8 é um membro de uma dessas famílias.

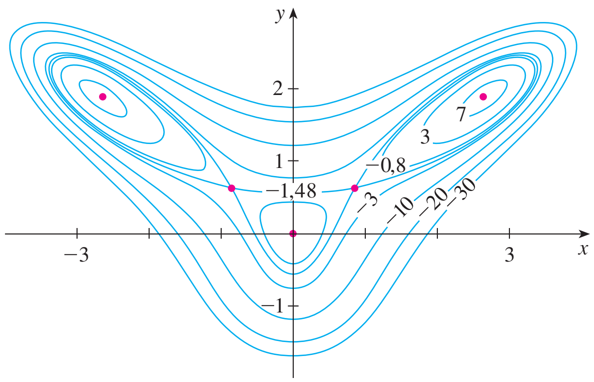


FIGURA 9

Os cinco pontos críticos da função f do Exemplo 4 estão destacados em azul no mapa de contorno de f na Figura 9.

EXEMPLO 5 Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUÇÃO A distância entre um ponto qualquer (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

Mas, se (x, y, z) pertence ao plano $x + 2y + z = 4$, então $z = 4 - x - 2y$ e assim temos $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$. Podemos minimizar d minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Resolvendo as equações

$$f_x = 2(x-1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

achamos que o único ponto crítico é $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Como $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ e $f_{yy} = 10$, temos $D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ e $f_{xx} > 0$, portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de $(1, 0, -2)$. Se $x = \frac{11}{6}$ e $y = \frac{5}{3}$, então

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$

A menor distância de $(1, 0, -2)$ ao plano $x + 2y + z = 4$ é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

O Exemplo 5 poderia ser resolvido utilizando-se vetores. Compare com os métodos da Seção 12.5.

EXEMPLO 6 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

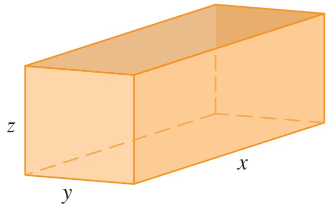


FIGURA 10

SOLUÇÃO Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) como mostrado na Figura 10. Então, o volume da caixa é

$$V = xyz$$

Podemos expressar V como função só de x e y usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Isolando z nessa equação, obtemos $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, e V fica

$$V = xy\,\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Se V é um máximo, então $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, mas $x = 0$ ou $y = 0$ dá $V = 0$, de modo que precisamos resolver as equações

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Isso implica que $x^2 = y^2$ e, portanto, $x = y$. (Observe que ambos devem ser positivos neste problema.) Se colocarmos $x = y$ em qualquer uma das equações obtemos $12 - 3x^2 = 0$, o que dá $x = 2$, $y = 2$ e $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V, ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V, portanto, esse máximo pode ocorrer quando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Assim, $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, e o volume máximo da caixa é 4 m^3.

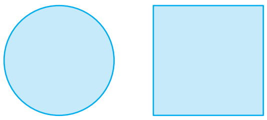
Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Para uma função f de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que, se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto. De acordo com o Método dos Intervalos Fechados da Seção 4.1, no Volume I, achamos esses valores calculando f não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.

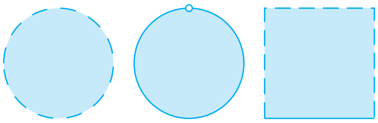
Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante. Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um **conjunto fechado** de $\mathbb{R}^2$ contém todos os seus pontos da fronteira. [Um ponto da fronteira de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta com centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D.] Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto fechado porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$). Mas se um único ponto da fronteira for omitido, o conjunto deixa de ser fechado (veja a Figura 11.)



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos que não são fechados

FIGURA 11

Um **conjunto limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em alguma bola aberta. Em outras palavras, ele é finito em extensão. Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos enunciar o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para duas dimensões.

$\boxed{8}$ **Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis** Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Para acharmos os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo Teorema 8, observamos que, pelo Teorema 2, se f tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f, ou um ponto da fronteira de D. Portanto, temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados.

$\boxed{9}$ Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 7 Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUÇÃO Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, portanto o Teorema 8 nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto. De acordo com o passo 1 de $\boxed{9}$, inicialmente devemos calcular os pontos críticos. Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

e, assim, o único ponto crítico existente é (1, 1), e o valor de f aí é $f(1, 1) = 1$.

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3 e L_4 mostrados na Figura 12. Em L_1, temos $y = 0$ e

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Isso corresponde a uma função crescente de x, que tem valor mínimo $f(0, 0) = 0$ e máximo $f(3, 0) = 9$. Em L_2, temos $x = 3$ e

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Essa é uma função decrescente de y, portanto seu máximo é $f(3, 0) = 9$ e seu mínimo é $f(3, 2) = 1$. Em L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Pelos métodos do Capítulo 4, no Volume I, ou simplesmente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que o mínimo valor dessa função é $f(2, 2) = 0$, e seu valor máximo é $f(0, 2) = 4$. Finalmente, em L_4, temos $x = 0$ e

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

com valor máximo $f(0, 2) = 4$ e valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Portanto, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1, 1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3,0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. A Figura 13 mostra o gráfico de f. ■

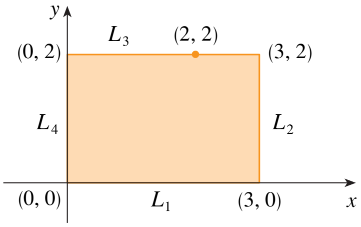


FIGURA 12

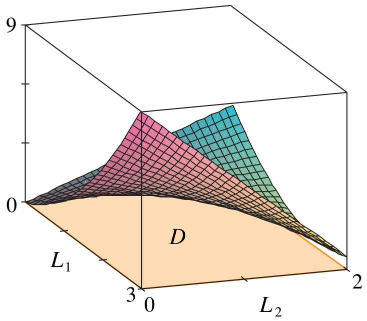


FIGURA 13

$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Concluímos esta seção com a demonstração da primeira parte do Teste da Segunda Derivada. As partes (b) e (c) têm demonstrações semelhantes.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3, PARTE (a) Vamos calcular a derivada direcional de segunda ordem de f na direção de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. A derivada de primeira ordem é dada pelo Teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}} f = f_x h + f_y k$$

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) &= \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k \\
&= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\
&= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(pelo Teorema de Clairaut)}
\end{aligned}
$$

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$
\boxed{10} \qquad D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)
$$

Foi-nos dado que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, portanto há uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) está em B. Logo, ao olhar na Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Isso significa que se C é a curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C é côncava para cima no intervalo do comprimento 2δ. Isso é verdadeiro na direção de cada vetor $\mathbf{u}$, portanto se restringirmos (x, y) para ficar em B, o gráfico de f fica acima de seu plano horizontal tangente em P. Assim, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local. ■

14.7 Exercícios

1. Suponha que (1, 1) seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

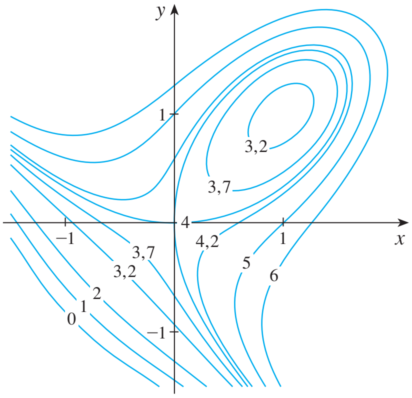
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

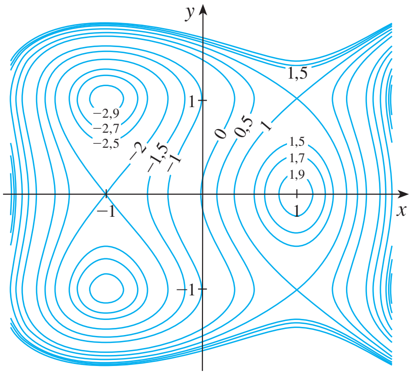
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio convenientes para mostrar os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

8. $f(x, y) = xe^{-2x^2-2y^2}$

9. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

10. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

---

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ em um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2 y e^{-x^2 - y^2}$ tem valores máximos em $\left(\pm 1, 1/\sqrt{2}\right)$ e valores máximos em $\left(\pm 1, -1/\sqrt{2}\right)$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

21–24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$

23. $f(x, y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y + \text{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25–28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico, se houver.

25. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2y + 2y$

26. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

27. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

28. $f(x, y) = 20e^{-x^2 - y^2}\, \text{sen}\, 3x \cos 3y, \quad |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$

29–36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D é a região triangular fechada com vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$

30. $f(x, y) = x + y - xy$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 0)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

---

37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 0, -3)$ e o plano $x + y + z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - 2y + 3z = 6$ que está mais próximo do ponto $(0, 1, 1)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1.000 cm³ que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm^2.

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m^2 por dia; as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m^2 por dia; o piso, a uma taxa de 1 unidade/m^2 por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m^2 por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m^3.

(a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.

(b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)

(c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?

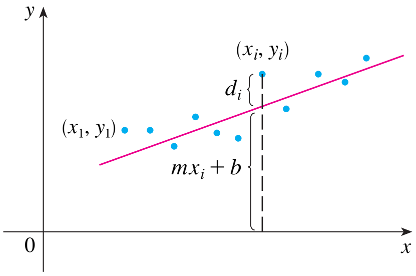
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L, qual é o maior volume possível?

54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e de b. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "ajuste" os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Dessa forma, a reta é determinada ao resolver essas duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2, no Volume I, para mais discussões e aplicações do método dos quadrados mínimos.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e que corta o menor volume do primeiro octante.

PROJETO APLICADO

PROJETO DE UMA CAÇAMBA

Para esse projeto, inicialmente localizamos uma caçamba de entulho retangular para estudar sua forma e construção. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar e que minimize o custo de construção.

1. Primeiro localize uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.
2. Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
   - Os lados, a parte de trás e a da frente devem ser feitos com folhas de aço de tipo 12 (2,657 mm de espessura), que custam \$ 8,00 por metro quadrado (incluindo quaisquer cortes ou dobras necessários).
   - A base deve ser feita de uma folha de aço de tipo 10 (3,416 mm de espessura), que custa \$ 10,00 por metro quadrado.
   - As tampas custam aproximadamente \$ 50,00 cada, independentemente das dimensões.
   - A soldagem custa aproximadamente \$ 0,60 por metro para material e serviço combinados.

   Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.
3. Descreva como qualquer hipótese ou simplificação feita pode afetar o resultado.
4. Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração do projeto da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

PROJETO DE DESCOBERTA

APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA E PONTOS CRÍTICOS

A aproximação por polinômio de Taylor de uma função de uma variável discutida no Capítulo 11 pode ser estendida para as funções de duas ou mais variáveis. Estudaremos aqui a aproximação quadrática para as funções de duas variáveis e usaremos esse estudo para melhor entender o Teste da Segunda Derivada para classificar pontos críticos.

Na Seção 14.4 discutimos a linearização de uma função f de duas variáveis em um ponto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Lembre-se de que o gráfico de L é o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em $(a, b, f(a, b))$, e a aproximação linear correspondente é $f(x, y) \approx L(x, y)$. A linearização L também é chamada **polinômio de Taylor de primeiro grau** de f em (a, b).

1. Se f tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em (a, b), então o **polinômio de Taylor de segundo grau** de f em (a, b) é

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

e a aproximação $f(x, y) \approx Q(x, y)$ é denominada **aproximação quadrática** de f em (a, b). Verifique que Q tem as mesmas derivadas parciais de primeira e segunda ordens que f em (a, b).

2. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ em (0, 0).

📈 (b) Esboce o gráfico de f, L e Q. Comente o quanto L e Q se aproximam de f.

3. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = xe^y$ em (1, 0).

(b) Compare os valores de L, Q e f em (0,9, 0,1).

📈 (c) Esboce o gráfico de f, L e Q. Comente o quanto L e Q se aproximam de f.

4. Nesse problema analisaremos o comportamento do polinômio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sem utilizar o Teste da Segunda Derivada) identificando o gráfico como um paraboloide.

(a) Completando os quadrados, mostre que, se $a \neq 0$, então

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

(b) Seja $D = 4ac - b^2$. Mostre que se $D > 0$ e $a > 0$, então f tem um mínimo local em (0, 0).

(c) Demonstre que se $D > 0$ e $a < 0$, então f tem um máximo local em (0, 0).

(d) Demonstre que se $D < 0$, então (0, 0) é um ponto de sela.

5. (a) Suponha que f seja uma função qualquer com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tal que $f(0, 0) = 0$ e que (0, 0) seja um ponto crítico de f. Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de segundo grau Q de f em (0, 0).

(b) O que você conclui sobre Q usando os resultados do Problema 4?

(c) Em vista da aproximação quadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, o que a parte (b) sugere sobre f?

📈 É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

14.8 Multiplicadores de Lagrange

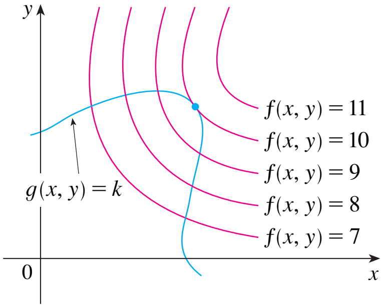


FIGURA 1

TEC *Visual 14.8* mostra uma animação da Figura 1 para as curvas de nível e superfícies de nível.

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy = 12$, que expressa a condição de a área da superfície ser de 12 m². Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então, vamos começar tentando determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y) = k$. Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$. A Figura 1 mostra essa curva junto de diversas curvas de nível de f. Estas têm as equações $f(x, y) = c$ onde $c = 7$, 8, 9, 10, 11. Para maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é preciso determinar o maior valor de c, tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$. Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de c.) Isso significa que as retas normais ao ponto (x_0, y_0) onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo, os vetores gradientes são paralelos, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ.

Esse tipo de argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação $g(x, y, z) = k$. Em vez das curvas de nível na Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível $f(x, y, z) = c$ e argumentar que, se o valor máximo de f é $f(x_0, y_0, z_0) = c$, então a superfície de nível $f(x, y, z) = c$ é tangente à superfície de nível $g(x, y, z) = k$, e então os correspondentes gradientes são paralelos.

Esse argumento intuitivo pode se tornar preciso da seguinte forma. Suponha que uma função f tenha um valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre a superfície S e seja C uma curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ que pertença a S e passe pelo ponto P. Se t_0 é o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, então $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. A função composta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ representa os valores que f assume sobre a curva C. Como f tem um valor extremo em (x_0, y_0, z_0), segue que h tem um valor extremo em t_0, portanto, $h'(t_0) = 0$. Porém, se f for diferenciável, usando a Regra da Cadeia, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Isso mostra que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal ao vetor da tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ para todas as curvas C. Mas já sabemos da Seção 14.6 que o vetor gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$, também é ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ para todas as curvas. (Veja a Equação 14.6.18.) Isso significa que os vetores $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ precisam ser paralelos. Logo, se $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe um número λ tal que

Multiplicadores de Lagrange têm esse nome em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)}$$

O número λ na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**. O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

Ao deduzirmos o Método de Lagrange, supusemos que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Em cada um de nossos exemplos, você pode verificar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em todos os pontos onde $g(x, y, z) = k$. Veja o Exercício 23 para descobrir o que pode sair errado se $\nabla g = \mathbf{0}$.

Método dos Multiplicadores de Lagrange Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ em termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficarão

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Isso é um sistema de quatro equações a quatro incógnitas, x, y, z e λ. Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para λ.

Para as funções de duas variáveis, o método dos multiplicadores de Lagrange é análogo àquele que acabamos de descrever. Para acharmos os valores extremos de $f(x, y)$ sujeitos à restrição $g(x, y) = k$, olhamos para todos os valores de x, y e λ, tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = k$$

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

EXEMPLO 1 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 6 na Seção 14.7, sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z e λ, tais que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 12$. Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x, \qquad V_y = \lambda g_y, \qquad V_z = \lambda g_z, \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

ou seja:

$$\boxed{2} \qquad yz = \lambda(2z + y)$$

$$\boxed{3} \qquad xz = \lambda(2z + x)$$

$$\boxed{4} \qquad xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$\boxed{5} \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso, você pode observar que, se multiplicarmos $\boxed{2}$ por x, $\boxed{3}$ por y, e $\boxed{4}$ por z, os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

$$\boxed{6} \qquad xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$\boxed{7} \qquad xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$\boxed{8} \qquad xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Outro método de resolver o sistema de Equações (2–5) é isolar λ em cada uma das Equações 2, 3 e 4 para λ e depois igualar as expressões resultantes.

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaria $yz = xz = xy = 0$ de $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$, e isso contradiz $\boxed{5}$. Logo, de $\boxed{6}$ e $\boxed{7}$, temos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

que nos fornece $xz = yz$. Mas $z \neq 0$ (uma vez que $z = 0$ daria $V = 0$), portanto $x = y$. De $\boxed{7}$ e $\boxed{8}$ temos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

que dá $2xz = xy$ e assim (como $x \neq 0$), $y = 2z$. Se colocarmos $x = y = 2z$ em $\boxed{5}$, obtemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x, y e z todos são positivos, teremos $z = 1$ e, portanto, $x = 2$ e $y = 2$. Isso concorda com nossa resposta na Seção 14.7.

Em termos geométricos, o Exemplo 2 pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva C da Figura 2 que pertence ao paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ e que está diretamente acima do círculo de restrição $x^2 + y^2 = 1$.

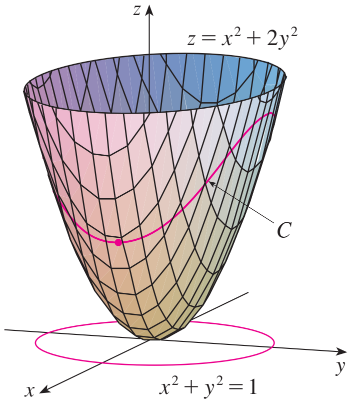


FIGURA 2

A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ correspondem às curvas de nível que tocam a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

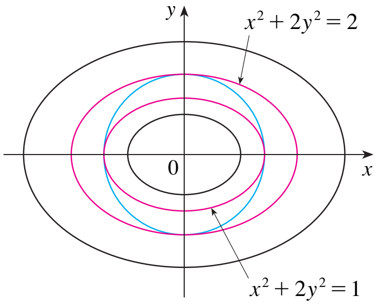


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 1$, que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

ou

$$\boxed{9} \qquad 2x = 2x\lambda$$

$$\boxed{10} \qquad 4y = 2y\lambda$$

$$\boxed{11} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

De $\boxed{9}$ temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$, então $\boxed{11}$ leva a $y = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ de $\boxed{10}$, e assim $\boxed{11}$ dá $x = \pm 1$. Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$. Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis.

EXEMPLO 3 Determine os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Uma vez que $f_x = 2x$ e $f_y = 4y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Comparamos o valor de f no ponto com os valores extremos no limite do Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$.

EXEMPLO 4 Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(3, 1, -1)$ é

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Isso dá

$$\boxed{12} \qquad 2(x - 3) = 2x\lambda$$

$$\boxed{13} \qquad 2(y - 1) = 2y\lambda$$

$$\boxed{14} \qquad 2(z + 1) = 2z\lambda$$

$$\boxed{15} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y e z em termos de λ de $\boxed{12}$, $\boxed{13}$ e $\boxed{14}$, e substituir esses valores em $\boxed{15}$. De $\boxed{12}$ temos

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{ou} \qquad x(1-\lambda) = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{3}{1-\lambda}$$

[Observe $1 - \lambda \neq 0$ porque $\lambda = 1$ é impossível a partir de $\boxed{12}$.] Da mesma forma, $\boxed{13}$ e $\boxed{14}$ dão

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

Portanto, de $\boxed{15}$ temos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

que nos dá $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Esses valores de λ então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z)

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

É fácil ver que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é $\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$ e o mais distante é $\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$.

A Figura 4 mostra a esfera e o ponto mais próximo P do Exemplo 4. Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de P sem usar o cálculo?

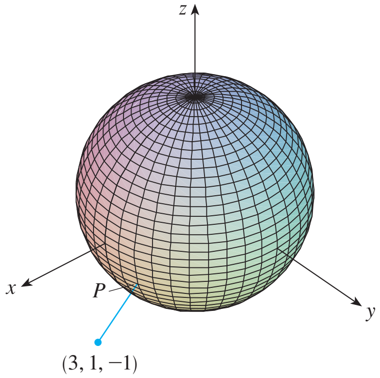


FIGURA 4

Duas Restrições

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições (vínculos) da forma $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrito a pertencer à curva C, obtida pela intersecção das superfícies de nível $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. (Veja a Figura 5.) Suponha que f tenha um tal valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$. Sabemos que do início dessa seção que ∇f é ortogonal a C em P. Mas também sabemos que ∇g é ortogonal a $g(x, y, z) = k$ e ∇h é ortogonal a $h(x, y, z) = c$, portanto ∇g e ∇h são ortogonais a C. Isso significa que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está no plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Presumimos que esses vetores gradientes não são nulos nem paralelos.) Portanto, existem números λ e μ (chamados multiplicadores de Lagrange) tais que

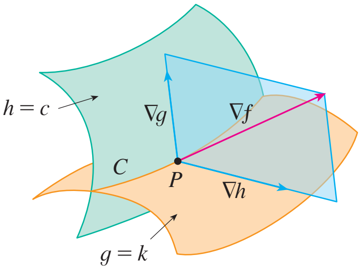


FIGURA 5

16
$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)}$$

Nesse caso o método de Lagrange nos leva a procurar por valores extremos ao resolver cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z, λ e μ. Essas equações são obtidas ao escrever a Equação 16 em termos de seus componentes e ao utilizar as equações de restrição :

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

EXEMPLO 5 Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 questiona o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

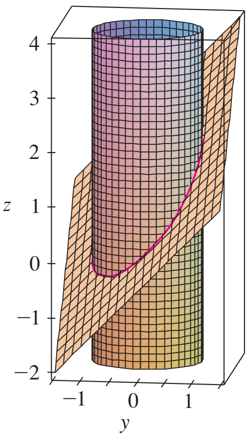


FIGURA 6

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$\boxed{17} \qquad 1 = \lambda + 2x\mu$$

$$\boxed{18} \qquad 2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$\boxed{19} \qquad 3 = \lambda$$

$$\boxed{20} \qquad x - y + z = 1$$

$$\boxed{21} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de $\boxed{19}$ em $\boxed{17}$], obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, $\boxed{18}$ dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em $\boxed{21}$, temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

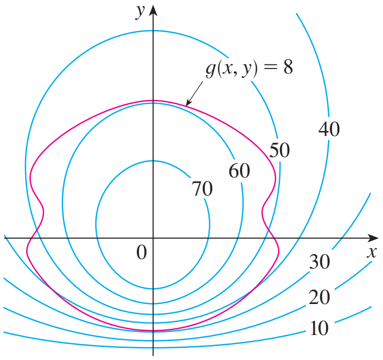
e $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, e, de $\boxed{20}$, $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.

14.8 Exercícios

1. Na figura estão um mapa de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de c dessas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3–14 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\quad xy = 1$

4. $f(x, y) = 3x + y$; $\quad x^2 + y^2 = 10$

5. $f(x, y) = y^2 - x^2$; $\quad \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

6. $f(x, y) = e^{xy}$; $\quad x^3 + y^3 = 16$

7. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\quad x + y + z = 12$

9. $f(x, y, z) = xyz$; $\quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15–18 Determine os valores extremos de f sujeita a ambas as restrições.

15. $f(x, y, z) = x + 2y$; $\quad x + y + z = 1$, $\quad y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $\quad x + y - z = 0$, $\quad x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy$; $\quad xy = 1$, $\quad y^2 + z^2 = 1$

18. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\quad x - y = 1$, $\quad y^2 - z^2 = 1$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

19–21 Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

20. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

21. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

---

22. Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

(b) $f(25,0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?

(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de f.

(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.

(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

23. Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).

(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$ mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ.

(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

SCA **24.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita à restrição $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.

(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

25. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ segue a partir de determinadas suposições econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

26. Em relação ao Problema 25, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Quais valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

27. Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.

28. Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero.

Dica: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.

29–41 Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

29. Exercício 39
30. Exercício 40
31. Exercício 41
32. Exercício 42
33. Exercício 43
34. Exercício 44
35. Exercício 45
36. Exercício 46
37. Exercício 47
38. Exercício 48
39. Exercício 49
40. Exercício 50
41. Exercício 53

---

42. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm² e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

43. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

44. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.

(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.

(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

SCA **45–46** Ache os valores de máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

45. $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

46. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

---

47. (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

sendo que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.

(b) Deduza do item (a) que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

48. (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para mostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

para todos os números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

PROJETO APLICADO

CIÊNCIA DOS FOGUETES

Cortesia da Orbital Sciences Corporation

Muitos foguetes, tais como o *Pegasus XL*, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o *Saturno V*, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para decrescer a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, colocando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou oferecer boa relação entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios, que foram projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo permitir que ele atinja a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação na velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1-S)M_r}{P + M_r}\right)$$

onde M_r é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o *fator estrutural* determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e c é a velocidade (constante) de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A. Vamos supor que as forças externas sejam desprezíveis e que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Se M_i é a massa do i-ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa M_1 e sua carga tenha massa $M_2 + M_3 + A$; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ do propulsor do foguete sujeita à restrição que a velocidade desejada v_f do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificarmos, definimos variáveis N_i de modo que a restrição possa ser expressa como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Como é difícil exprimir M em termos dos N_i, é desejável usar uma função mais simples, que ao ser minimizada leve também à minimização de M. Mostre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1-S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1-S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1-S)N_3}{1 - SN_3}$$

e conclua que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1-S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Verifique se $\ln((M + A)/A)$ tem os mesmos pontos de mínimo que M; utilize os multiplicadores de Lagrange e o resultado do Problema 2 para determinar as expressões para os valores de N_i onde o mínimo ocorre sujeito à restrição $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Dica*: Utilize as propriedades dos logaritmos para ajudar na simplificação das expressões.]

4. Determine uma expressão para o valor mínimo de M como função de v_f.

5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 160 km acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 28 000 km/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural $S = 0{,}2$ e que a velocidade de exaustão seja $c = 9\ 600$ km/h.

   (a) Determine a massa total mínima M do propulsor do foguete como função de A.
   (b) Determine a massa de cada estágio como função de A. (Eles não precisam ter tamanhos iguais!)

6. O mesmo foguete precisaria de uma velocidade final de 39.700 km/h, aproximadamente, para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete e lhe permitiria carregar uma sonda de 200 kg para o espaço.

PROJETO APLICADO

OTIMIZAÇÃO DE UMA TURBINA HIDRÁULICA

A Katahdin Paper Company, de Millinocket, no estado de Maine, opera uma usina hidroelétrica no rio Penobscot. A água é bombeada de uma represa para a usina geradora de potência. A taxa pela qual a água flui nas tubulações varia, dependendo de condições externas.

A usina geradora de potência tem três turbinas hidroelétricas diferentes; para cada uma delas, é conhecida a quantidade da potência elétrica gerada em função do fluxo de água que chega à turbina (função de potência da turbina). A água que chega pode ser distribuída em quantidades diferentes entre as turbinas, e nosso objetivo é determinar como programar essa distribuição de água para obter máxima produção de energia total para qualquer vazão.

Usando dados experimentais e a *equação de Bernoulli*, chegou-se ao modelo quadrático mostrado para a saída de potência de cada turbina, com as seguintes vazões de operação permitidas:

$$KW_1 = (-18{,}89 + 0{,}1277Q_1 - 4{,}08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1{,}6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$
$$KW_2 = (-24{,}51 + 0{,}1358Q_2 - 4{,}69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1{,}6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$
$$KW_3 = (-27{,}02 + 0{,}1380Q_3 - 3{,}84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1{,}6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$
$$250 \leqslant Q_1 \leqslant 1.110, \qquad 250 \leqslant Q_2 \leqslant 1.110, \qquad 250 \leqslant Q_3 \leqslant 1.225$$

onde

Q_i = fluxo pela turbina i em pés cúbicos por segundo
KW_i = potência gerada pela turbina i em quilowatts
Q_T = fluxo total pela turbina em pés cúbicos por segundo

1. Se todas as três turbinas estiverem sendo usadas, queremos determinar o fluxo Q_1 em cada turbina que resultará na produção total máxima de energia. Nossas limitações são que o fluxo total precisa ser igual ao fluxo que chega à usina e que para cada turbina o fluxo esteja na faixa permitida. Consequentemente, utilize os multiplicadores de Lagrange para achar os valores de cada fluxo individual (como função de Q_T) que maximizem a produção total de energia $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeita às restrições $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ e restrições de domínio de cada Q_i.

2. Para que valores de Q_T seu resultado é válido?

3. Para uma vazão de entrada de 2 500 pés^3/s, determine a distribuição para as turbinas e verifique (tentando algumas distribuições semelhantes) se seu resultado corresponde realmente a um máximo.

4. Até agora supusemos que as três turbinas estavam em operação. É possível que mais potência possa ser obtida usando somente uma turbina em algumas situações? Faça um gráfico das funções potência e utilize-o para decidir se uma vazão de entrada de 1 000 pés^3/s deveria ser distribuída para as três turbinas ou concentrada em uma só. (Se você concluir que só uma turbina deverá ser utilizada, responda: qual é ela?) E se a vazão for de somente 600 pés^3/s?

5. Talvez para alguns níveis de vazão seja vantajoso usar duas turbinas. Se a vazão de chegada for de 1 500 pés^3/s, quais duas turbinas devem ser utilizadas? Use os multiplicadores de Lagrange para determinar como a vazão deveria ser distribuída entre as duas turbinas para maximizar a energia produzida. Para essa vazão, o uso de duas turbinas é mais eficiente que o emprego das três?

6. Se a vazão de entrada for de 3 400 pés^3/s, o que você recomendaria para a empresa?

14 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma função de duas variáveis?
(b) Descreva três métodos para visualizar uma função de duas variáveis.

2. O que é uma função de três variáveis? Como você pode visualizar tal função?

3. O que

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = L$$

significa? Como mostrar que esse limite não existe?

4. (a) O que significa dizer que f é contínua em (a, b)?
(b) Se f é contínua em $\mathbb{R}^2$, o que você pode dizer de seu gráfico?

5. (a) Escreva as expressões para as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ como limites.
(b) Como você interpreta $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ geometricamente? Como as interpreta como taxas de variação?
(c) Se $f(x, y)$ é dada por uma fórmula, como calcular f_x e f_y?

6. O que o Teorema de Clairaut diz?

7. Como achar o plano tangente a cada um dos seguintes tipos de superfície?
(a) Um gráfico de uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$
(b) Uma superfície de nível de uma função de três variáveis, $F(x, y, z) = k$

8. Defina a linearização de f em (a, b). Qual é a correspondente aproximação linear? Qual é a interpretação geométrica da aproximação linear?

9. (a) O que significa dizer que f é diferenciável em (a, b)?
(b) Como usualmente verificamos que f é diferenciável?

10. Se $z = f(x, y)$, o que são as diferenciais dx, dy e dz?

11. Enuncie a Regra da Cadeia para o caso em que $z = f(x, y)$ e x e y são funções de uma variável. E se x e y forem funções de duas variáveis?

12. Se z é definido implicitamente como uma função de x e y por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$, como determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$?

13. (a) Escreva uma expressão limitando a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. Como interpretá-la como taxa de variação? Como interpretá-la geometricamente?
(b) Se f é diferenciável, escreva uma expressão para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ em termos de f_x e f_y.

14. (a) Defina o vetor gradiente ∇f de uma função f e duas ou três variáveis.
(b) Expresse $D_{\mathbf{u}} f$ em termos de ∇f.
(c) Explique o significado geométrico do gradiente.

15. O que as seguintes sentenças significam?
(a) f tem um máximo local em (a, b).
(b) f tem um máximo absoluto em (a, b).
(c) f tem um mínimo local em (a, b).
(d) f tem um mínimo absoluto em (a, b).
(e) f tem um ponto de sela em (a, b).

16. (a) Se f tem um máximo local em (a, b), o que você pode dizer de suas derivadas parciais em (a, b)?
(b) O que é um ponto crítico de f?

17. Qual é o Teste da Segunda Derivada?

18. (a) O que é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$? O que é um conjunto limitado?
(b) Dê o enunciado do Teorema dos Valores Extremos para as funções de duas variáveis.
(c) Como achar os valores que o Teorema dos Valores Extremos garante existirem?

19. Explique como o método dos multiplicadores de Lagrange funciona para determinar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. E se tivermos uma segunda restrição $h(x, y, z) = c$?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $f_y(a, b) = \displaystyle\lim_{y\to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$

2. Existe uma função f com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tais que $f_x(x, y) = x + y^2$ e $f_y(x, y) = x - y^2$.

3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$

4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$

5. Se $f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo de toda reta que passa por (a, b), então $\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = L$.

6. Se $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ existem, então f é diferenciável em (a, b).

7. Se f tem um mínimo local em (a, b) e f é diferenciável em (a, b), então $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

8. Se f é uma função, então

$$\lim_{(x,\,y)\to(2,\,5)} f(x, y) = f(2, 5)$$

9. Se $f(x, y) = \ln y$, então $\nabla f(x, y) = 1/y$

10. Se $(2, 1)$ é um ponto crítico de f e

$$f_{xx}(2, 1)\, f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$

então f tem um ponto de sela em $(2, 1)$.

11. Se $f(x, y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$, então $-\sqrt{2} \leqslant D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leqslant \sqrt{2}$.

12. Se $f(x, y)$ tem dois máximos locais, então f tem um mínimo local.

Exercícios

1–2 Determine e esboce o domínio da função.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

3–4 Esboce o gráfico da função.

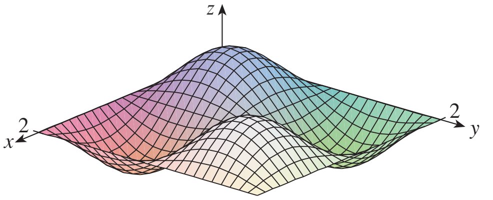
3. $f(x, y) = 1 - y^2$

4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

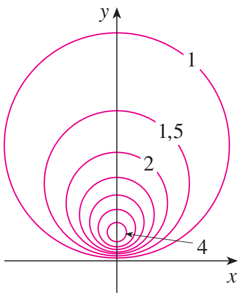
5–6 Esboce várias curvas de nível da função.

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ **6.** $f(x, y) = e^x + y$

7. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



8. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para fazer um esboço do gráfico de f.



9–10 Calcule o limite ou mostre que ele não existe.

9. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Uma placa de metal está situada no plano xy e ocupa o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, onde x e y são medidos em metros. A temperatura no ponto (x, y) do plano é $T(x, y)$, onde T é medido em graus Celsius. Temperaturas em pontos igualmente espaçados foram medidas e registradas na tabela.

(a) Estime o valor das derivadas parciais $T_x(6, 4)$ e $T_y(6, 4)$. Quais são as unidades?

(b) Estime o valor de $D_{\mathbf{u}}T(6, 4)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete o resultado.

(c) Estime o valor de $T_{xy}(6, 4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Determine uma aproximação linear para a função temperatura $T(x, y)$ do Exercício 11 perto do ponto (6, 4). Em seguida use-a para estimar a temperatura no ponto (5, 3,8).

13–17 Determine as derivadas parciais de primeira ordem.

13. $f(x, y) = (5y^3 + 2x^2y)^8$ **14.** $g(u, v) = \dfrac{u + 2v}{u^2 + v^2}$

15. $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 \ln(\alpha^2 + \beta^2)$ **16.** $G(x, y, z) = e^{xz}\operatorname{sen}(y/z)$

17. $S(u, v, w) = u \operatorname{arctg}(v\sqrt{w})$

18. A velocidade da propagação da onda sonora no oceano é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão. Foi modelada como

$$C = 1\,449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + (1{,}34 - 0{,}01T)(S - 35) + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius), S é a salinidade (concentração de sal em partes por milhar, o que significa o número de gramas de sólidos dissolvidos por 1 000 g de água) e D é a profundidade abaixo da superfície do oceano (em metros). Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$, $\partial C/\partial D$, quando $T = 10$ °C, $S = 35$ partes por milhar e $D = 100$ m. Explique o significado físico dessas derivadas parciais.

19–22 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$ **20.** $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$ **22.** $v = r\cos(s + 2t)$

23. Se $z = xy + xe^{y/x}$, mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Se $z = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} t)$, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25–29 Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$

26. $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

29. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

30. Use um computador para traçar o gráfico da superfície $z = x^2 + y^4$ e de seu plano tangente e reta normal em $(1, 1, 2)$ na mesma tela. Escolha o domínio e ponto de vista para obter uma boa visão dos três objetos.

31. Encontre os pontos no hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Encontre du se $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ no ponto $(2, 3, 4)$ e use-a para aproximar o número $(1{,}98)^3\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}97)^2}$.

34. Os dois catetos de um triângulo retângulo medem 5 m e 12 m com um erro possível nas medidas de, no máximo, 0,2 cm em cada. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo (a) da área do triângulo e (b) do comprimento da hipotenusa.

35. Se $u = x^2y^3 + z^4$, onde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$ e $z = p \operatorname{sen} p$, use a Regra da Cadeia para encontrar du/dp.

36. Se $v = x^2 \operatorname{sen} y + ye^{xy}$, onde $x = s + 2t$ e $y = st$, use a Regra da Cadeia para encontrar $\partial v/\partial s$ e $\partial v/\partial t$ quando $s = 0$ e $t = 1$.

37. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$ e $f_y(3, 6) = 8$. Determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ quando $s = 1$ e $t = 2$.

38. Utilize o diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ e $v = v(p, q, r, s)$, todas diferenciáveis.

39. Se $z = y + f(x^2 - y^2)$, onde f é diferenciável, mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. O comprimento x de um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 6 cm/s, o comprimento y de um outro lado está diminuindo a uma taxa de 4 cm/s e o ângulo θ entre eles está aumentando a uma taxa de 0,05 radiano/s. Quão rapidamente está variando a área do triângulo quando $x = 80$ cm, $y = 100$ cm e $\theta = \pi/6$?

41. Se $z = f(u, v)$, onde $u = xy$, $v = y/x$ e f têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Se $\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine o gradiente da função $f(x, y, z) = x^2e^{yz^2}$.

44. (a) Quando a derivada direcional de f é máxima?
(b) Quando é mínima?
(c) Quando é 0?
(d) Quando é a metade de seu valor máximo?

45–46 Determine a derivada direcional de f no ponto dado na direção indicada.

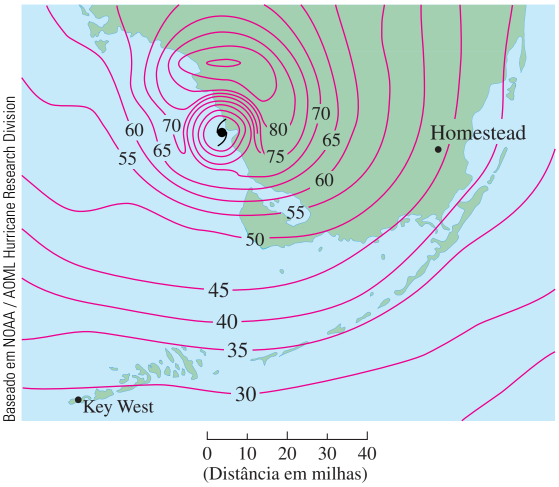
45. $f(x, y) = x^2e^{-y}$, $(-2, 0)$, na direção do ponto $(2, -3)$

46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, na direção de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

47. Determine a taxa máxima de variação de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ no ponto $(2, 1)$. Em que direção isso ocorre?

48. Determine a direção na qual $f(x, y, z) = ze^{xy}$ aumenta mais rápido no ponto $(0, 1, 2)$. Qual é a taxa máxima de aumento?

49. O mapa de contorno mostra a velocidade do vento em nós durante o furacão Andrew em 24 de agosto de 1992. Utilize-o para estimar o valor da derivada direcional da velocidade do vento em Homestead, Flórida, na direção do olho do furacão.



Baseado em NOAA / AOML Hurricane Research Division

50. Determine as equações paramétricas da reta tangente no ponto $(-2, 2, 4)$ à curva de intersecção da superfície $z = 2x^2 - y^2$ com o plano $z = 4$.

51–54 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio conveniente para mostrar os aspectos importantes da função.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55–56 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D é a região triangular fechada do plano xy com vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(6, 0)$

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

57. Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximo e mínimo e os pontos de sela de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

58. Use uma calculadora gráfica ou um computador (método de Newton ou sistema de computação algébrica) para determinar os pontos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique os pontos críticos e determine o ponto mais alto do gráfico.

59–62 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de f sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

59. $f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

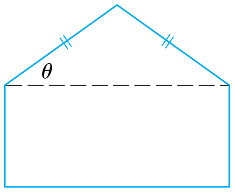
61. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2;$
$x + y + z = 1, x - y + 2z = 2$

63. Determine os pontos da superfície $xy^2z^3 = 2$ que estão mais próximos da origem.

64. Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secção transversal ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

65. Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro P fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximiza sua área.



66. Uma partícula de massa m se move sobre uma superfície $z = f(x, y)$. Sejam $x = x(t)$, $y = y(t)$ as coordenadas x e y da partícula no instante t.

(a) Determine o vetor velocidade $\mathbf{v}$ e a energia cinética $K = \frac{1}{2} m \,|\mathbf{v}|^2$ da partícula.

(b) Determine o vetor aceleração $\mathbf{a}$.

(c) Sejam $z = x^2 + y^2$ e $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \operatorname{sen} t$. Determine o vetor velocidade, a energia cinética e o vetor aceleração.

Problemas Quentes

1. Um retângulo com comprimento L e largura W é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximo e mínimo da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.

2. Biólogos marinhos determinaram que, quando um tubarão detecta a presença de sangue na água, ele nada na direção em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em certos testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) em um ponto $P(x, y)$ na superfície é de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

onde x e y são medidos em metros em coordenadas cartesianas com a fonte do sangue como origem.

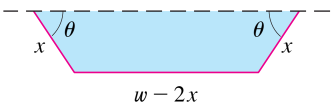
(a) Identifique as curvas de nível da função concentração e esboce vários membros dessa família, junto com a trajetória que o tubarão deve percorrer para chegar à fonte.

(b) Suponha que um tubarão esteja no ponto (x_0, y_0) quando detecta a presença de sangue na água. Determine a equação da trajetória do tubarão escrevendo e resolvendo uma equação diferencial.

3. Uma longa folha de metal galvanizado de espessura w polegadas deve ser dobrada em uma forma simétrica com três lados planos para fazer uma calha. A secção transversal é mostrada na figura.

(a) Determine as dimensões para permitir a máxima vazão, ou seja, determine as dimensões que fornecem a maior área da secção transversal.

(b) Você acharia melhor dobrar a folha de metal em uma calha com secção transversal semicircular do que em uma secção transversal de três lados?



4. Para que valores do número r a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^3$?

5. Suponha que f seja uma função diferenciável de uma variável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf(y/x)$ se interceptam em um ponto comum.

6. (a) O método de Newton para aproximar a raiz de uma equação $f(x) = 0$ (veja a Seção 4.8, no Volume I) pode ser adaptado para aproximar a solução de um sistema de equações $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$. As superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ se interceptam em uma curva que intercepta o plano xy no ponto (r, s), que é a solução deste sistema. Se uma aproximação inicial (x_1, y_1) estiver próxima deste ponto, então os planos tangentes às superfícies em (x_1, y_1) se interceptam em uma reta que intercepta o plano xy em um ponto (x_2, y_2), que deveria estar mais próximo de (r, s). (Compare com a Figura 2 na Seção 4.8.) Mostre que

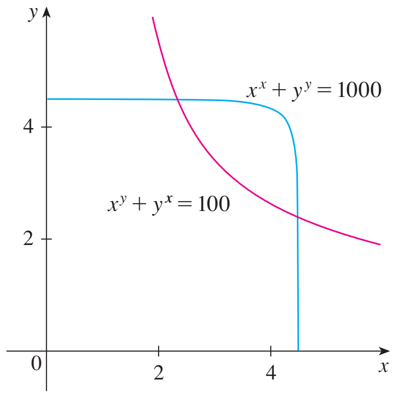
$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{e} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

onde f, g e suas derivadas parciais são calculadas em (x_1, y_1). Se continuarmos esse processo, obteremos uma sequência de aproximações sucessivas (x_n, y_n).

(b) Foi Thomas Simpson (1710-1761) quem formulou o método de Newton como o conhecemos hoje e quem o estendeu para as funções de duas variáveis como no item (a). O exemplo que ele deu para ilustrar o método foi resolver o sistema de equações

$$x^x + y^y = 1\,000 \qquad x^y + y^x = 100$$

Em outras palavras, ele descobriu os pontos de intersecção das curvas da figura. Utilize o método da parte (a) para determinar as coordenadas dos pontos de intersecção com precisão de seis casas decimais.



7. Se a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ circunda a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?

8. Entre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$, determine os que estão mais longe da origem.

15

Integrais Múltiplas

Os geólogos estudam como as cadeias de montanhas foram formadas e estimam o trabalho necessário para elevá-las em relação ao nível do mar. Na Seção 15.8 é solicitado que você use a integral tripla para calcular o trabalho realizado na formação do Monte Fuji, no Japão.

Pichugin Dmitry/Shutterstock

Neste capítulo estendemos a ideia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis. Essas ideias serão usadas para calcular volumes, áreas de superfícies, massas e centroides de regiões mais gerais do que as consideradas nos Capítulos 6 e 8, no Volume I. Usaremos também as integrais duplas para calcular probabilidades quando duas variáveis aleatórias estiverem envolvidas.

Veremos que as coordenadas polares são úteis no cálculo de integrais duplas em alguns tipos de região. De modo parecido, introduziremos dois novos sistemas de coordenadas no espaço tridimensional – coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas –, que simplificam muito o cálculo de integrais triplas em certas regiões sólidas que ocorrem frequentemente.

15.1 Integrais Duplas sobre Retângulos

A tentativa de resolvermos o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida. Aplicaremos um procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido, e este processo nos levará à definição de integral dupla.

Revisão da Integral Definida

Antes de tudo, vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é definida em $a \leqslant x \leqslant b$, começamos subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual $\Delta x = (b - a)/n$ e escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos. Assim, formamos a soma de Riemann

$$\boxed{1} \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

e tomamos o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para obter a integral definida de a até b da função f:

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

No caso especial em que $f(x) \geqslant 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores da Figura 1 e $\int_a^b f(x)\, dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

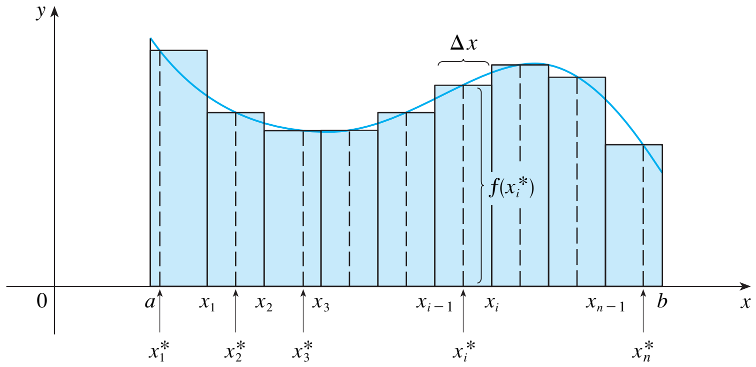


FIGURA 1

Volumes e Integrais Duplas

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

e vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geqslant 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f, isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

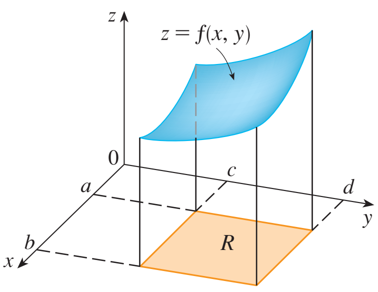


FIGURA 2

(Veja a Figura 2.) Nosso objetivo é determinar o volume de S.

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, como na Figura 3, formamos os sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$.

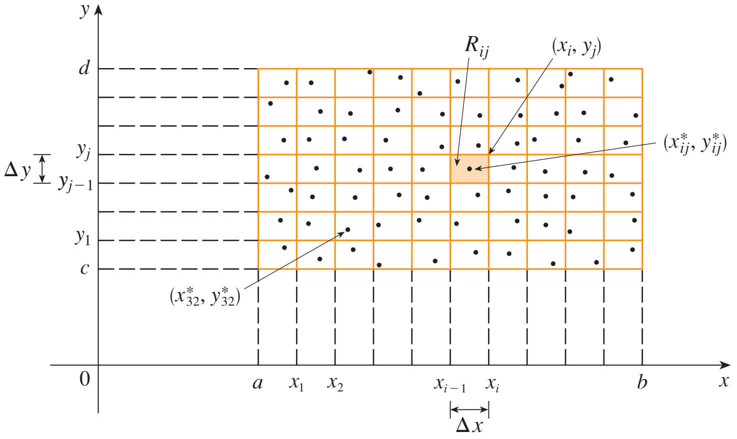


FIGURA 3
Dividindo R em sub-retângulos

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos **ponto de amostragem**, (x_{ij}^*, y_{ij}^*), em cada R_{ij}, poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou "coluna") com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 4. (Compare com a Figura 1.) O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\ \Delta A$$

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

$$\boxed{3} \qquad V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\ \Delta A$$

(Veja a Figura 5.) Essa soma dupla significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

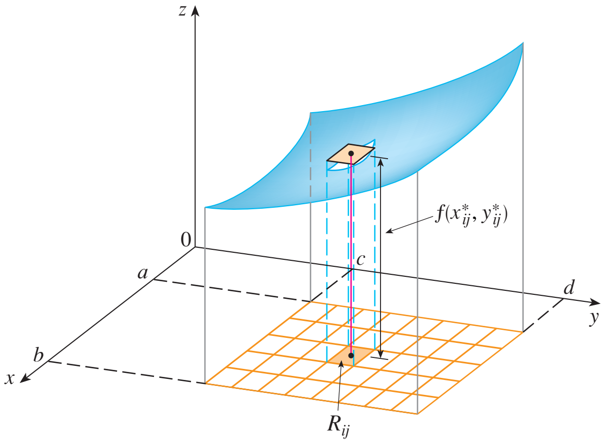


FIGURA 4

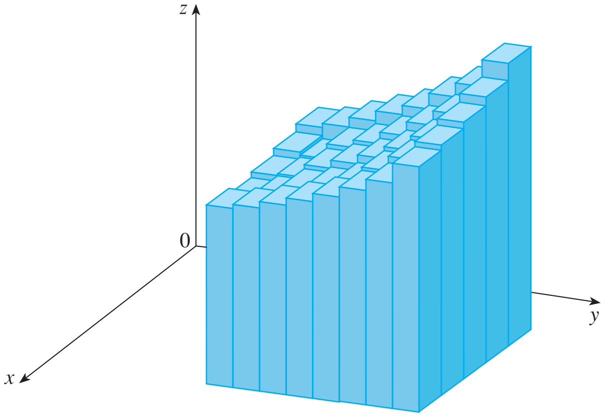


FIGURA 5

Nossa intuição diz que a aproximação dada em $\boxed{3}$ melhora quando aumentamos os valores de m e n e, portanto, devemos esperar que

O significado do limite duplo na Equação 4 é que podemos tornar a somatória dupla tão próxima quanto desejarmos do número V [para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}] tomando m e n suficientemente grandes.

$\boxed{4}$
$$V = \lim_{m,\,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Usamos a expressão da Equação 4 para definir o **volume** do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R. (Pode-se mostrar que essa definição é coerente com nossa fórmula de volume da Seção 6.2.)

Limites do tipo que aparecem na Equação 4 ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações – como será visto na Seção 15.5 – mesmo f não sendo uma função positiva. Assim, faremos a seguinte definição:

Observe a semelhança entre a Definição 5 e a definição de integral unidimensional na Equação 2.

$\boxed{5}$ **Definição** A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{m,\,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

se esse limite existir.

Embora tenhamos definido a integral dupla dividindo R em sub-retângulos de mesmo tamanho, poderíamos ter usado sub-retângulos R_{ij} de tamanhos diferentes. Mas então teríamos de garantir que todas as dimensões deles tendessem a zero no processo de limite.

O significado preciso do limite da Definição 5 é que para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y)\,dA - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos os inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}.

Uma função f é dita **integrável** se o limite na Definição 5 existir. É mostrado em cursos de cálculo avançado que todas as funções contínuas são integráveis. Na realidade, a integral dupla de f existe contanto que f "não seja descontínua demais". Em particular, se f for limitada [isto é, existe uma constante M tal que $|f(x, y)| \leqslant M$ para todo (x, y) em R], e se f for contínua ali, exceto em um número finito de curvas suaves, então f é integrável em R.

O ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij}, porém, se o escolhermos como o canto superior direito de R_{ij} [ou seja, (x_i, y_j), veja a Figura 3], a expressão da soma dupla ficará mais simples:

$\boxed{6}$
$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{m,\,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$

Comparando as Definições 4 e 5, vemos que o volume pode ser escrito como uma integral dupla:

Se $f(x, y) \geqslant 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA$$

A soma na Definição 5,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla. [Observe a semelhança dessa soma com a de Riemann em $\boxed{1}$ para funções de uma única variável.] Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 5, e é uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f.

EXEMPLO 1 Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatro quadrados iguais e escolha o ponto de amostragem como o canto superior direito de cada quadrado R_{ij}. Faça um esboço do sólido e das caixas retangulares aproximadoras.

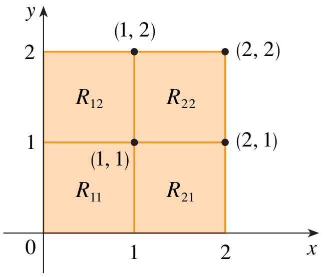


FIGURA 6

SOLUÇÃO Os quadrados estão ilustrados na Figura 6. O paraboloide elíptico é o gráfico de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ e a área de cada quadrado é $\Delta A = 1$. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A \\
&= f(1, 1)\, \Delta A + f(1, 2)\, \Delta A + f(2, 1)\, \Delta A + f(2, 2)\, \Delta A \\
&= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34
\end{aligned}
$$

Esse é o volume das caixas aproximadoras mostradas na Figura 7.

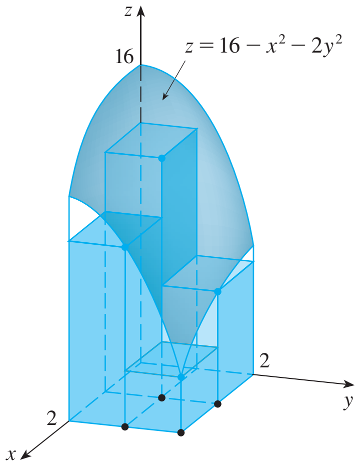
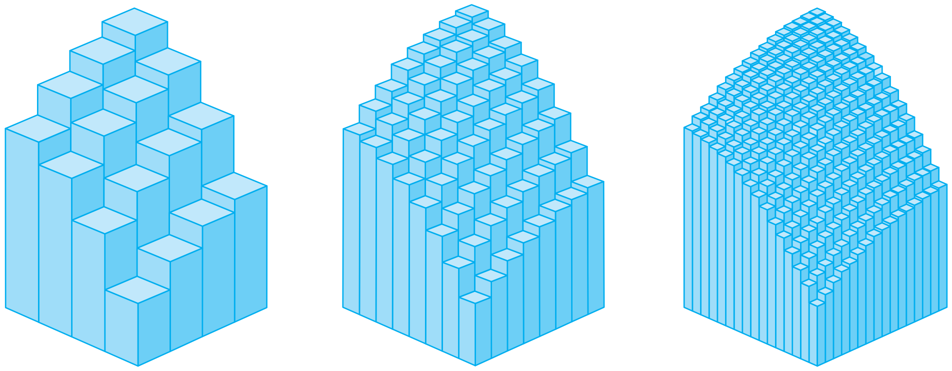


FIGURA 7

Obtemos melhores aproximações do volume no Exemplo 1 quando aumentamos o número de quadrados. A Figura 8 mostra como as colunas começam a parecer mais com o sólido verdadeiro e as aproximações correspondentes vão se tornando mais precisas quando usamos 16, 64 e 256 quadrados. Na próxima seção mostraremos que o volume exato é 48.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41{,}5$

(b) $m = n = 8$, $V \approx 44{,}875$

(c) $m = n = 16$, $V \approx 46{,}46875$

FIGURA 8
As aproximações para as somas de Riemann do volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ ficam mais precisas quando m e n aumentam.

EXEMPLO 2 Se $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2\}$, calcule a integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

SOLUÇÃO Seria muito difícil calcular a integral diretamente da Definição 5, mas, como $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, podemos calcular a integral interpretando-a como um volume. Se $z = \sqrt{1 - x^2}$, então $x^2 + z^2 = 1$ e $z \geqslant 0$, logo a integral dupla dada representa o volume do sólido S que está abaixo do cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ e acima do retângulo R. (Veja a Figura 9.) O volume de S é a área de um semicírculo com raio uma vez o comprimento do cilindro. Portanto

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \tfrac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$

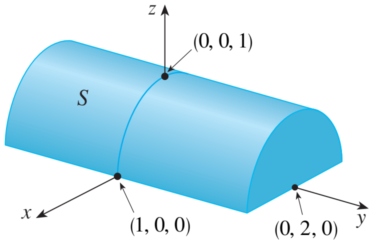


FIGURA 9

A Regra do Ponto Médio

Os métodos usados para aproximar as integrais de funções de uma variável real (a Regra do Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson) têm seus correspondentes para integrais duplas. Consideraremos aqui somente a Regra do Ponto Médio para integrais duplas. Isso significa que usaremos a soma dupla de Riemann para aproximar a integral dupla, na qual o ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij} é tomado como o ponto central $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ de R_{ij}. Em outras palavras, $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Regra do Ponto Médio para Integrais Múltiplas

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

onde $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EXEMPLO 3 Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro dos quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10. Logo, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ e $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. A área de cada sub-retângulo é $\Delta A = \frac{1}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\ &= f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4})\, \Delta A + f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4})\, \Delta A + f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4})\, \Delta A + f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4})\, \Delta A \\ &= (-\tfrac{67}{16})\tfrac{1}{2} + (-\tfrac{139}{16})\tfrac{1}{2} + (-\tfrac{51}{16})\tfrac{1}{2} + (-\tfrac{123}{16})\tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{95}{8} = -11{,}875\end{aligned}$$

Portanto, temos
$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11{,}875$$

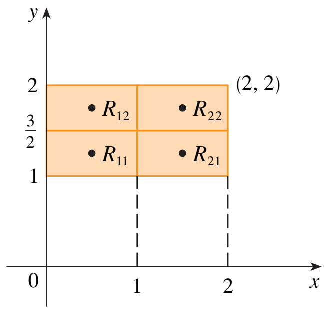


FIGURA 10

OBSERVAÇÃO Na próxima seção desenvolveremos um processo eficiente para calcular integrais duplas e veremos que o valor exato da integral dupla do Exemplo 3 é -12. (Lembre-se de que a interpretação da integral dupla como volume só é válida quando a função f é uma função *positiva*. O integrando no Exemplo 3 não é uma função positiva, dessa forma, a integral dupla não é um volume. Nos Exemplos 2 e 3 na Seção 15.2, discutiremos como interpretar integrais de uma função que não é sempre positiva em termos de volumes.) Se continuarmos dividindo cada sub-retângulo da Figura 10 em quatro menores, todos com a mesma forma, obteremos as aproximações pela Regra do Ponto Médio exibidas no gráfico na margem. Observe como esses valores estão se aproximando do valor exato da integral dupla, -12.

Número de sub-retângulos	Aproximação pela Regra do Ponto Médio
1	−11,5000
4	−11,8750
16	−11,9687
64	−11,9922
256	−11,9980
1 024	−11,9995

Valor Médio

Na Seção 6.5, no Volume I, mostramos que o valor médio de uma função f de uma variável definida em um intervalo $[a, b]$ é

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

De modo semelhante, definimos o **valor médio** de uma função f de duas variáveis em um retângulo R contido em seu domínio como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

onde $A(R)$ é a área de R.

Se $f(x, y) \geqslant 0$, a equação

$$A(R) \times f_{\text{med}} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

diz que a caixa com base R e altura f_{med} tem o mesmo volume que o sólido sob o gráfico de f. [Se $z = f(x, y)$ descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura f_{med}, então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar a região completamente plana. Veja a Figura 11.]

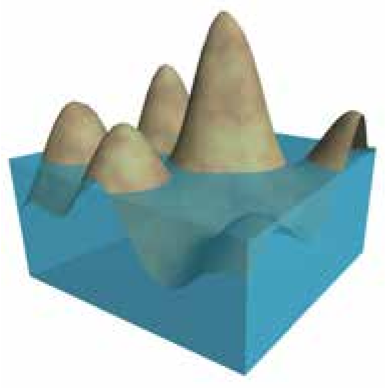


FIGURA 11

EXEMPLO 4 O mapa de contorno na Figura 12 mostra a precipitação de neve, em polegadas, no estado do Colorado em 20 e 21 de dezembro de 2006. (O Estado tem a forma de um retângulo que mede 388 milhas de Oeste a Leste e 276 milhas do Sul ao Norte.) Use o mapa de contorno para estimar a queda de neve média em todo o Estado do Colorado naqueles dias.

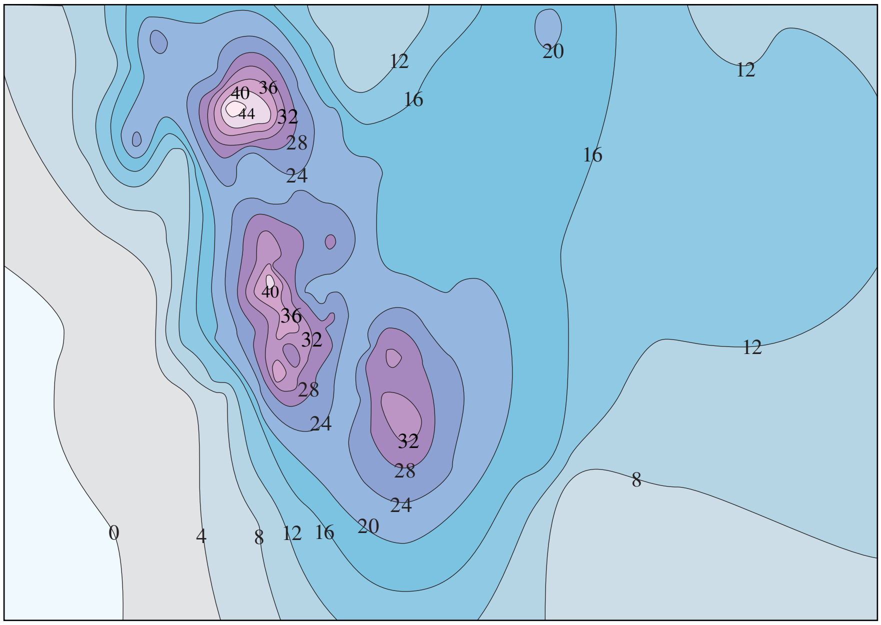


FIGURA 12

SOLUÇÃO Vamos colocar a origem no canto sudoeste do estado. Então, $0 \leqslant x \leqslant 388$, $0 \leqslant y \leqslant 276$ e $f(x, y)$ é a queda de neve, em polegadas, no local x milhas para leste e y milhas para norte da origem. Se R é o retângulo que representa o estado do Colorado, então a precipitação média de neve no Colorado em 20 e 21 de dezembro foi

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

onde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimarmos o valor dessa integral dupla, vamos usar a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$. Em outras palavras, dividimos R em 16 sub-retângulos de tamanhos iguais, como na Figura 13. A área de cada sub-retângulo é

$$\Delta A = \tfrac{1}{16}(388)(276) = 6\,693 \text{ mi}^2$$

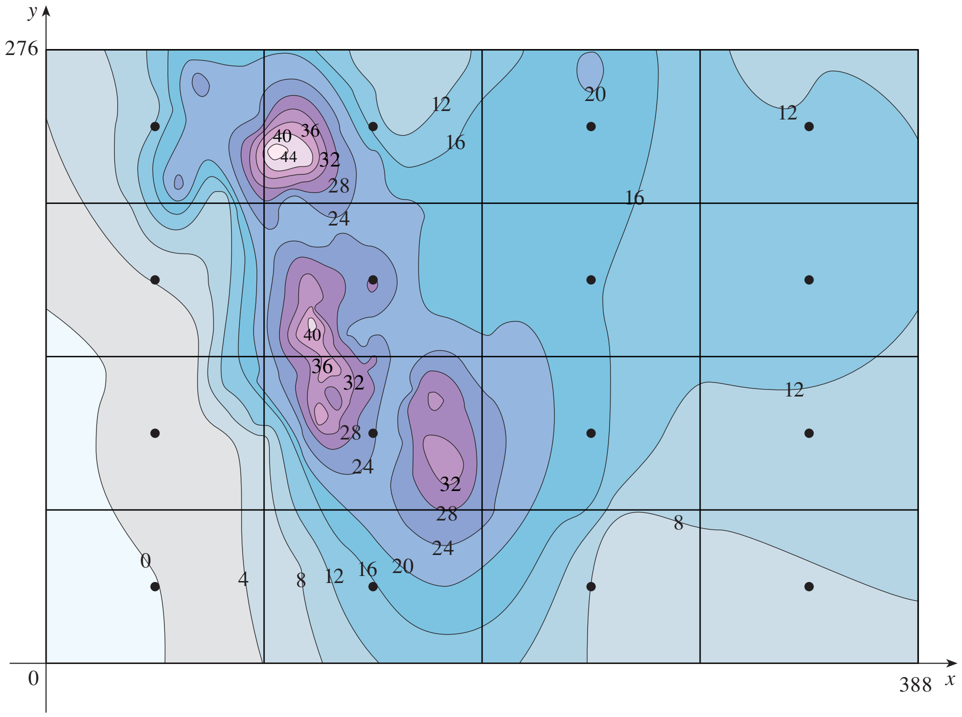


FIGURA 13

Usando o mapa de contorno para estimar o valor de *f* no ponto central de cada sub-retângulo, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A\\ &\approx \Delta A[0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18{,}5 + 11\\ &\qquad + 4{,}5 + 28 + 17 + 13{,}5 + 12 + 15 + 17{,}5 + 13]\\ &= (6\,693)(207)\end{aligned}$$

Logo, $$f_{\text{med}} \approx \frac{(6\,693)(207)}{(388)(276)} \approx 12{,}9$$

Em 20 e 21 de dezembro de 2006, o Colorado recebeu uma média de aproximadamente 13 polegadas de neve.

Propriedades das Integrais Duplas

Listaremos aqui três propriedades das integrais duplas que podem ser demonstradas como na Seção 5.2, no Volume I. Admitiremos que todas as integrais existam. As Propriedades 7 e 8 são conhecidas como *linearidade* da integral.

Integrais duplas se comportam assim porque as somas duplas que as definem se comportam dessa forma.

$\boxed{7}$ $$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

$\boxed{8}$ $$\iint_R cf(x, y)\, dA = c\iint_R f(x, y)\, dA, \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

Se $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todo (x, y) em R, então

$\boxed{9}$ $$\iint_R f(x, y)\, dA \geqslant \iint_R g(x, y)\, dA$$

15.1 Exercícios

1. (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 6,\ 0 \leqslant y \leqslant 4\}$$

Utilize a soma de Riemann com $m = 3$, $n = 2$ e tome como ponto de amostragem o canto superior direito de cada sub-retângulo.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).

2. Se $R = [0, 4] \times [-1, 2]$, use a soma de Riemann com $m = 2$, $n = 3$ para estimar o valor de $\iint_R (1 - xy^2)\, dA$. Tome os pontos de amostragem como (a) os cantos inferiores direitos e (b) como os cantos superiores esquerdos dos retângulos.

3. (a) Use uma soma de Riemann com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R xe^{-xy}\, dA$, onde $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Tome os pontos de amostragem como os cantos superiores direitos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item (a).

4. (a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = 1 + x^2 + 3y$ e acima do retângulo $R = [1, 2] \times [0, 3]$. Use a soma de Riemann com $m = n = 2$ e escolha os pontos de amostragem como os cantos inferiores esquerdos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do item (a).

5. É dada a tabela de valores de uma função $f(x, y)$ definida em $R = [0, 4] \times [2, 4]$.

(a) Estime $\iint_R f(x, y)\, dA$ utilizando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$.

(b) Estime a integral dupla com $m = n = 4$, escolhendo como pontos de amostragem os pontos mais próximos da origem.

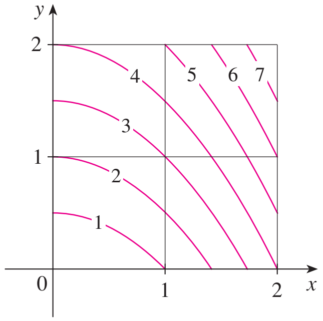
x \ y	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	-3	-5	-6	-4	-1
1	-1	-2	-3	-1	1
2	1	0	-1	1	4
3	2	2	1	3	-7
4	3	4	2	5	9

6. Uma piscina de 8 por 12 metros está cheia de água. A profundidade é medida em intervalos de 2 metros, começando em um canto da piscina, e os valores foram registrados na tabela. Estime o volume de água na piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1,5	2	2,4	2,8	3	3
2	1	1,5	2	2,8	3	3,6	3
4	1	1,8	2,7	3	3,6	4	3,2
6	1	1,5	2	2,3	2,7	3	2,5
8	1	1	1	1	1,5	2	2

7. Seja V o volume do sólido que está abaixo do gráfico de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ e acima do retângulo dado por $2 \leqslant x \leqslant 4$, $2 \leqslant y \leqslant 6$. Usamos as retas $x = 3$ e $y = 4$ para dividir R em sub-retângulos. Sejam L e U as somas de Riemann calculadas utilizando como pontos de amostragem os cantos inferiores esquerdos e os cantos superiores direitos, respectivamente. Sem calcular os números V, L e U, coloque-os em ordem crescente de valor e explique seu raciocínio.

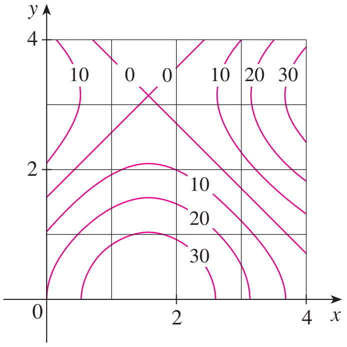
8. A figura mostra curvas de nível da função f no quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar $\iint_R f(x, y)\, dA$. Como você melhoraria sua estimativa?



9. A figura mostra o mapa de contorno de f no quadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.

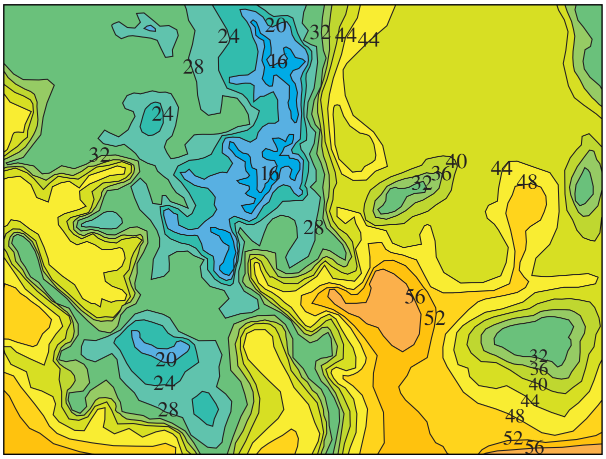
(a) Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.

(b) Estime o valor médio de f.



1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

10. O mapa de contorno mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 4 horas da tarde do dia 26 de fevereiro de 2007, no Estado do Colorado. (O Estado mede 388 milhas de Leste a Oeste e 276 milhas de norte a sul.) Utilize a Regra do Ponto Médio com $m = n = 4$ para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora.



11–13 Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido.

11. $\iint_R 3\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 6\}$

12. $\iint_R (5 - x)\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

13. $\iint_R (4 - 2y)\, dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

---

14. A integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$, onde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa o volume de um sólido. Esboce o sólido.

15. Utilize uma calculadora programável ou computador (ou o comando de soma de um SCA) para estimar

$$\iint_R \sqrt{1 + xe^{-y}}\, dA$$

onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Utilize a Regra do Ponto Médio com os seguintes números de quadrados de tamanhos iguais: 1, 4, 16, 64, 256 e 1 024.

16. Repita o Exercício 15 para a integral $\iint_R \operatorname{sen}\left(x + \sqrt{y}\right) dA$.

17. Se f é uma função constante, $f(x, y) = k$ e $R = [a, b] \times [c, d]$, mostre que

$$\iint_R k\, dA = k(b - a)(d - c).$$

18. Use o resultado do Exercício 17 para mostrar que

$$0 \leqslant \iint_R \operatorname{sen} \pi x \cos \pi y\, dA \leqslant \frac{1}{32}$$

onde $R = \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

15.2 Integrais Iteradas

Lembremos que geralmente é difícil calcular as integrais de funções de uma variável real diretamente da definição de integral, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição é ainda mais complicado, porém, nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas integrais unidimensionais.

Suponha que f seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y)\, dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y*. (Observe a semelhança com a derivada parcial.) Como $\int_c^d f(x, y)\, dy$ é um número que depende do valor de x, ele define uma função de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, obteremos

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim,

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b.

Da mesma forma, a integral iterada

$$\boxed{3} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que em ambas as Equações, 2 e 3, trabalhamos *de dentro para fora*.

EXEMPLO 1 Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \tfrac{3}{2}x^2$$

Portanto, a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy \right] dx$$
$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2}x^2\, dx = \frac{x^3}{2}\Big]_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$
$$= \int_1^2 9y\, dy = 9\frac{y^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Observe que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x. Em geral acontece (veja o Teorema 4) de as duas integrais iteradas das Equações 2 e 3 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante. (Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.)

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada (em qualquer ordem).

$\boxed{4}$ **Teorema de Fubini** Se f for contínua no retângulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

O Teorema 4 tem o nome do matemático italiano Guido Fubini (1879 -1943), que demonstrou uma versão geral desse teorema em 1907. Mas a versão para as funções contínuas era conhecida pelo menos um século antes pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy.

A demonstração do Teorema de Fubini foge ao escopo deste livro, mas podemos ao menos fornecer uma justificativa razoável de sua validade quando $f(x, y) \geqslant 0$. Lembremos que se f é positiva, podemos interpretar a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ como o volume V do sólido S que está acima de R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$. Contudo, temos outra fórmula usada para calcular volume, vista no Capítulo 6, no Volume I, que é

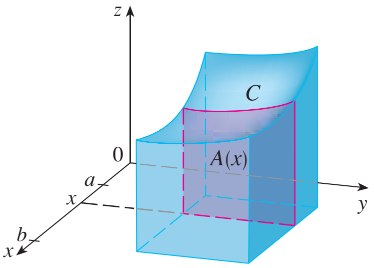


FIGURA 1

TEC *Visual 15.2* ilustra o Teorama de Fubini mostrando uma animação das Figuras 1 e 2.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

onde $A(x)$ é a área da secção transversal de S em um plano x perpendicular ao eixo x. Você pode ver a partir da Figura 1 que $A(x)$ é a área abaixo da curva C cuja equação é $z = f(x, y)$, onde x é mantido constante e $c \leqslant y \leqslant d$. Portanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

e temos

$$\iint_R f(x, y)\,dA = V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

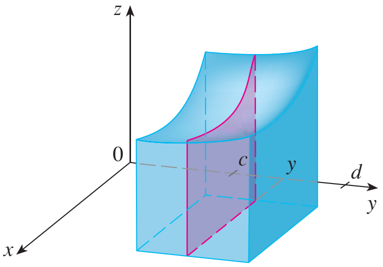


FIGURA 2

Uma argumentação semelhante, usando a secção transversal perpendicular ao eixo y como na Figura 2, mostra que

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$. (Compare com o Exemplo 3 da Seção 15.1.)

SOLUÇÃO 1 O Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big[xy - y^3\Big]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\,dx = \frac{x^2}{2} - 7x\Big]_0^2 = -12$$

Observe a resposta negativa no Exemplo 2; não há nada errado com isso. A função f não é positiva e a integral não representa um volume. Da Figura 3 vemos que, se f for sempre negativa em R, o valor da integral é menos o volume que está acima do gráfico de f e abaixo de R.

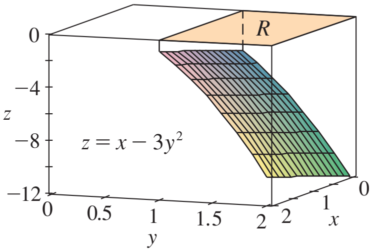


FIGURA 3

SOLUÇÃO 2 Novamente, aplicando o Teorema de Fubini, mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, temos

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\,dy = 2y - 2y^3\Big]_1^2 = -12$$

■

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_R y\,\text{sen}(xy)\,dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUÇÃO 1 Se integrarmos primeiro em relação a x, obteremos

$$\iint_R y\,\text{sen}(xy)\,dA = \int_0^\pi \int_1^2 y\,\text{sen}(xy)\,dx\,dy = \int_0^\pi \Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y)\,dy$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2y + \text{sen}\,y\Big]_0^\pi = 0$$

SOLUÇÃO 2 Se invertermos a ordem de integração, obteremos

$$\iint_R y\,\text{sen}(xy)\,dA = \int_1^2 \int_0^\pi y\,\text{sen}(xy)\,dy\,dx$$

Para calcularmos a integral interna, usamos a integração por partes com

$$u = y \qquad dv = \operatorname{sen}(xy)\,dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

e, então,
$$\int_0^\pi y\operatorname{sen}(xy)\,dy = -\frac{y\cos(xy)}{x}\bigg]_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(xy)\,dy$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\big[\operatorname{sen}(xy)\big]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2}$$

Se agora integrarmos o primeiro termo por partes com $u = -1/x$ e $dv = \pi\cos\pi x\,dx$, obteremos $du = dx/x^2$, $v = \operatorname{sen}\pi x$ e

$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x}\right)dx = -\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} - \int\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2}\,dx$$

Logo,
$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2}\right)dx = -\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}$$

e, assim,
$$\int_1^2\int_0^\pi y\operatorname{sen}(xy)\,dy\,dx = \left[-\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}\right]_1^2$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}2\pi}{2} + \operatorname{sen}\pi = 0$$

Para uma função f com valores positivos e negativos, $\iint_R f(x, y)\,dA$ é a diferença dos volumes: $V_1 - V_2$, onde V_1 é o volume acima de R e abaixo do gráfico de f e V_2 é o volume abaixo de R e acima do gráfico. O fato de a integral do Exemplo 3 ser 0 significa que os dois volumes V_1 e V_2 são iguais. (Veja a Figura 4.)

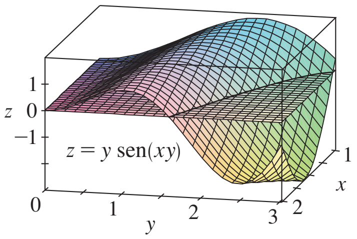


FIGURA 4

No Exemplo 2, as Soluções 1 e 2 são igualmente simples, mas no Exemplo 3 a primeira solução é muito mais simples que a segunda. Portanto, ao calcular uma integral dupla, é recomendável escolher a ordem de integração que forneça integrais mais simples.

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido S que é limitado pelo paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Veja a Figura 5.) Esse sólido foi considerado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla usando o Teorema de Fubini. Portanto,

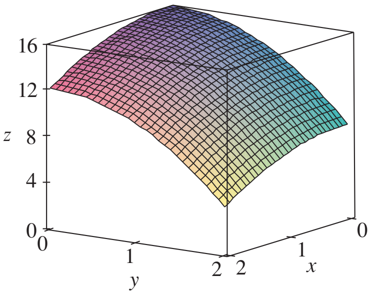


FIGURA 5

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$

No caso especial em que $f(x, y)$ pode ser fatorado como o produto de uma função só de x por uma função só de y, a integral dupla de f pode ser escrita de forma particularmente simples. Para sermos específicos, suponha que $f(x, y) = g(x)h(y)$ e $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, o Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d\int_a^b g(x)h(y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)\,dx\right]dy$$

Na integral interna, y é uma constante, então $h(y)$ é uma constante e podemos escrever

$$\int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)\,dx\right]dy = \int_c^d\left[h(y)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\right]dy = \int_a^b g(x)\,dx\int_c^d h(y)\,dy$$

já que $\int_a^b g(x)\,dx$ é uma constante. Portanto, nesse caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais unidimensionais:

$$\boxed{5} \qquad \iint\limits_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então, pela Equação 5,

$$\iint\limits_R \operatorname{sen} x \cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} \Big[\operatorname{sen} y\Big]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

A função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R, assim, a integral representa o volume do sólido que está acima de R e entre o gráfico de f, como mostrado na Figura 6.

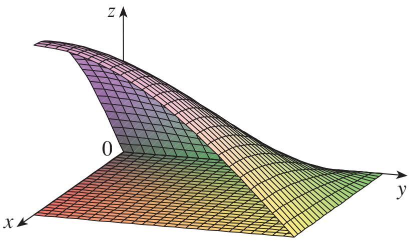


FIGURA 6

15.2 Exercícios

1–2 Determine $\int_0^5 f(x, y)\,dx$ e $\int_0^1 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$

2. $f(x, y) = y + xe^y$

3–14 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)\,dy\,dx$

4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\,dy\,dx$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\,dx\,dy$

7. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2\cos x)\,dx\,dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \dfrac{xe^x}{y}\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) dy\,dx$

10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 v(u - v^2)^4\,du\,dv$

12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

13. $\int_0^2 \int_0^\pi r \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\,dr$

14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\,ds\,dt$

15–22 Calcule a integral dupla.

15. $\iint\limits_R \operatorname{sen}(x + y)\,dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

16. $\iint\limits_R (y + xy^{-2})\,dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

17. $\iint\limits_R \dfrac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \; -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

18. $\iint\limits_R \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

19. $\iint\limits_R x \operatorname{sen}(x + y)\,dA$, $\quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint\limits_R \dfrac{x}{1 + xy}\,dA$, $\quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint\limits_R ye^{-xy}\,dA$, $\quad R = [0, 2] \times [0, 3]$

22. $\iint\limits_R \dfrac{1}{1 + x + y}\,dA$, $\quad R = [1, 3] \times [1, 2]$

23–24 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

25. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2, \; -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

26. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

27. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

28. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y$ e pelos planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ e $z = 0$.

29. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x \sec^2 y$ e pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \pi/4$.

30. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 16 - x^2$ e pelo plano $y = 5$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

31. Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ e pelos planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = 4$.

32. Desenhe o sólido que está entre a superfície $z = 2xy/(x^2 + 1)$ e o plano $z = x + 2y$ e é limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$. A seguir, determine seu volume.

SCA **33.** Utilize um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5y^3e^{xy}\,dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida, use o SCA para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

SCA **34.** Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2}\cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Utilize um sistema de computação algébrica para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

35–36 Determine o valor médio de *f* sobre o retângulo dado.

35. $f(x, y) = x^2y$, R possui vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

36. $f(x, y) = e^y\sqrt{x + e^y}$, $\quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

37–38 Utilize a simetria para calcular a integral dupla.

37. $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1 + x^4}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

38. $\displaystyle\iint_R (1 + x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x)\,dA, \quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

SCA **39.** Utilize seu SCA para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dy\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dx\,dy$$

Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

40. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?

(b) Se $f(x, y)$ é contínuo em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\,dt\,ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função *f* não somente sobre retângulos, como também sobre uma região *D* de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que *D* seja uma região limitada, o que significa que *D* pode estar contida em uma região retangular *R* como na Figura 2. Definimos, então, uma nova função *F*, com domínio *R*, por

$$\boxed{1} \qquad F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

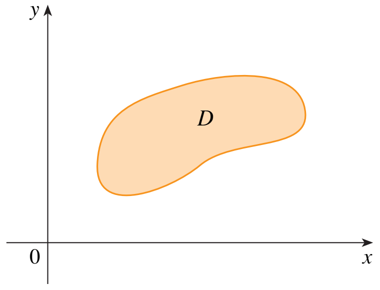


FIGURA 1

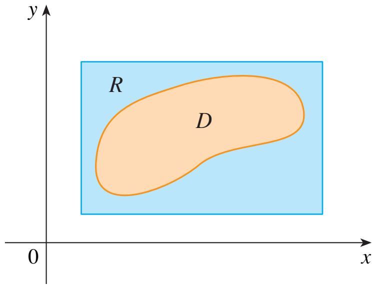


FIGURA 2

Se *F* for integrável em *R*, então definimos a **integral dupla de *f* em *D*** por

$$\boxed{2} \qquad \iint_D f(x, y)\,dA = \iint_R F(x, y)\,dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

A Definição 2 faz sentido porque *R* é um retângulo e, portanto, $\iint_R F(x, y)\,dA$ já foi definida na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando

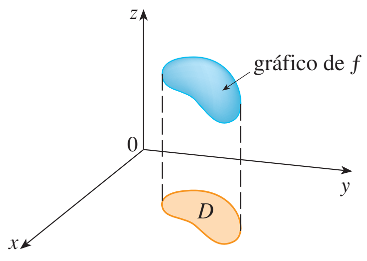


FIGURA 3

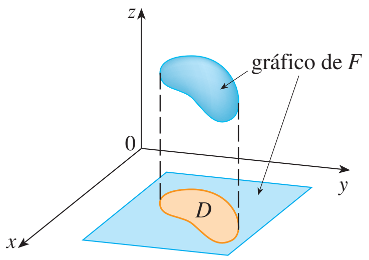


FIGURA 4

(x, y) está fora de D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D.

No caso em que $f(x, y) \geqslant 0$, podemos ainda interpretar $\iint_D f(x, y)\,dA$ como o volume do sólido que está acima de D e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ (o gráfico de f). Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F nas Figuras 3 e 4 e lembrando que $\iint_R F(x, y)\,dA$ é o volume abaixo do gráfico de F.

A Figura 4 mostra também que F provavelmente tem descontinuidades nos pontos de limite de D. Apesar disso, se f for contínua em D e se a curva limite de D for "comportada" (em um sentido que está fora do escopo deste livro), então pode ser mostrado que $\iint_R F(x, y)\,dA$ existe e, portanto, $\iint_D f(x, y)\,dA$ existe. Em particular, esse é o caso para os dois tipos de regiões listados a seguir.

Uma região plana D é dita do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja,

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\; g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 5.

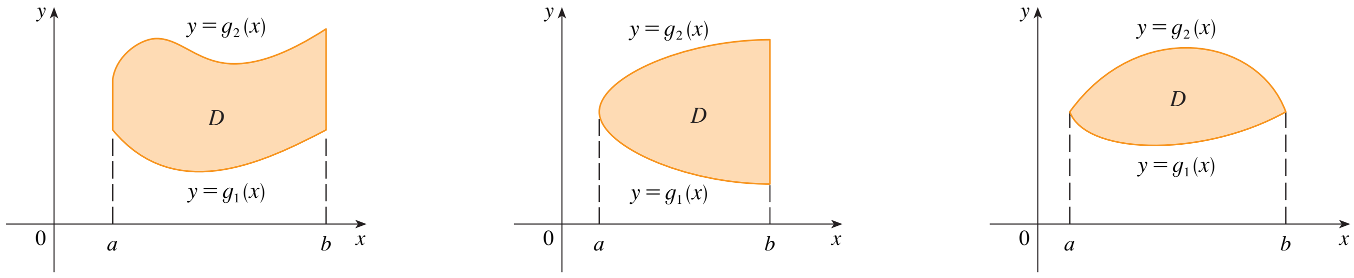


FIGURA 5 Algumas regiões do tipo I

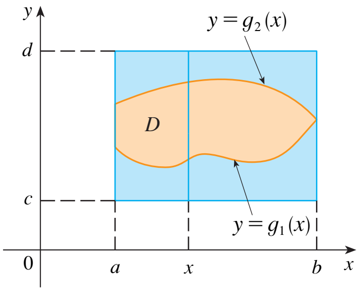


FIGURA 6

Para calcularmos $\iint_D f(x, y)\,dA$ quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenha D, como na Figura 6, e consideramos a função F definida na Equação 1; ou seja, F coincide com f em D e F é 0 fora da região D. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dA = \iint\limits_R F(x, y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\,dy\,dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$ porque (x, y) está fora da região D. Portanto,

$$\int_c^d F(x, y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ quando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Portanto, temos a seguinte fórmula, que nos permite calcular a integral dupla como uma integral iterada.

$\boxed{3}$ Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\; g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

então,
$$\iint\limits_D f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

A integral do lado direito de $\boxed{3}$ é uma integral iterada semelhante às consideradas na seção anterior, exceto que na integral de dentro consideramos x constante não só em $f(x, y)$, mas também nos limites de integração $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

Consideraremos também regiões planas do **tipo II**, que podem ser expressas como

$\boxed{4}$
$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

onde h_1 e h_2 são contínuas. Essas duas regiões estão ilustradas na Figura 7.

Utilizando o mesmo método que usamos para estabelecer $\boxed{3}$, podemos mostrar que

$\boxed{5}$
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

onde D é uma região do tipo II dada pela Equação 4.

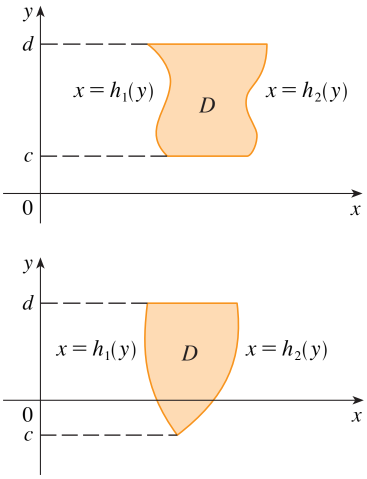


FIGURA 7
Algumas regiões do tipo II

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo, $x = \pm 1$. Observamos que a região D, ilustrada na Figura 8, é uma região do tipo I, mas não do tipo II, e podemos escrever

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\
&= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Bigg]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}
\end{aligned}$$

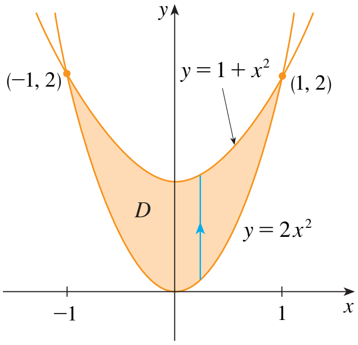


FIGURA 8

OBSERVAÇÃO Quando escrevemos uma integral dupla como no Exemplo 1, é essencial desenhar um diagrama. Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na Figura 8. Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma: a seta começa na fronteira inferior $y = g_1(x)$, que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima $y = g_2(x)$, que dá o extremo superior de integração. Para uma região do tipo II, a seta é desenhada horizontalmente da fronteira esquerda para a fronteira direita.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO 1 Da Figura 9 vemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

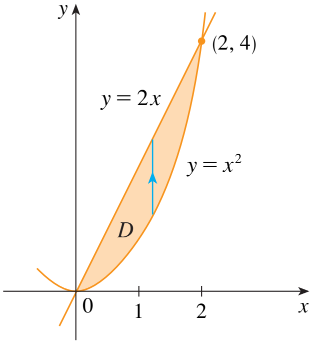


FIGURA 9
D como uma região do tipo I

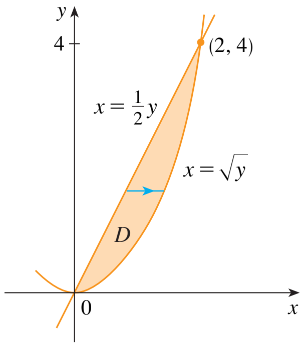


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

Portanto, o volume abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima de D é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Bigg]_0^2 = \frac{216}{35}$$

SOLUÇÃO 2 Da Figura 10, vemos que D pode ser descrita como uma região do tipo II:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y} \right\}$$

Logo, outra expressão para V é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4 \Big]_0^4 = \tfrac{216}{35}$$

A Figura 11 mostra o sólido cujo volume é calculado no Exemplo 2. Ele está acima do plano xy, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e entre o plano $y = 2x$ e o cilindro parabólico $y = x^2$.

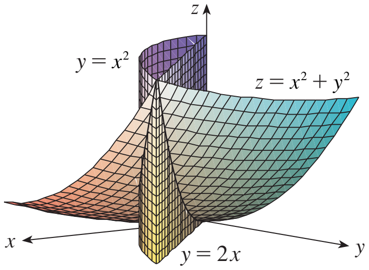


FIGURA 11

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_D xy\,dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ pelas parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO A região D é mostrada na Figura 12. Novamente, D pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de D como região do tipo I é mais complicada, porque o limite inferior é constituído de duas partes. Portanto, preferimos expressar D como uma região do tipo II:

$$D = \left\{ (x, y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \leqslant x \leqslant y + 1 \right\}$$

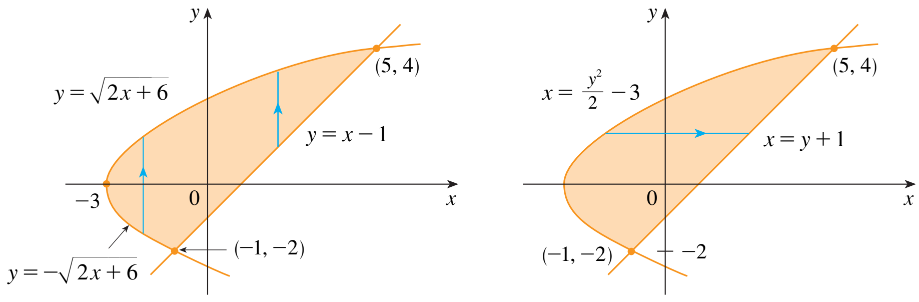


FIGURA 12

(a) *D* como uma região do tipo I

(b) *D* como uma região do tipo II

Então, $\boxed{5}$ dá

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2}y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^4 y\left[(y + 1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)^2 \right] dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\,\frac{y^3}{3} - 4y^2\right]_{-2}^{4} = 36$$

Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I usando a Figura 12(a), obteríamos

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

mas isso daria muito mais trabalho que o outro método.

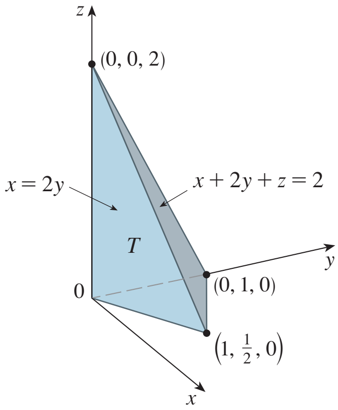


FIGURA 13

EXEMPLO 4 Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO Em uma questão como essa, é prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D sobre a qual o sólido se encontra. A Figura 13 mostra o tetraedro T limitado pelos planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, pelo plano vertical $x = 2y$ e pelo plano $x + 2y + z = 2$. Como o plano $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy (cuja equação é $z = 0$) na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$. (Veja a Figura 14.)

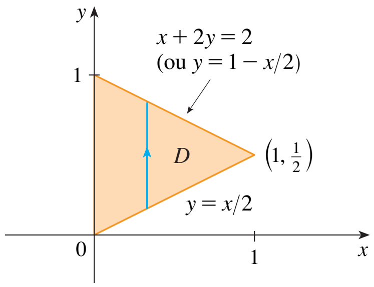


FIGURA 14

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

Portanto,

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\,dA = \int_0^1\int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big[2y - xy - y^2\Big]_{y=x/2}^{y=1-x/2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right]dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

EXEMPLO 5 Calcule a integral iterada $\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Se tentarmos calcular a integral na forma pela qual ela se apresenta, teremos inicialmente de resolver o problema de calcular $\int \operatorname{sen}(y^2)\,dy$. Mas isso é impossível de fazer em termos finitos, uma vez que $\int \operatorname{sen}(y^2)\,dy$ não é uma função elementar. (Veja o final da Seção 7.5.) Precisamos então mudar a ordem de integração, o que pode ser conseguido escrevendo-se inicialmente a integral iterada dada como uma integral dupla. Usando $\boxed{3}$ na ordem inversa, temos

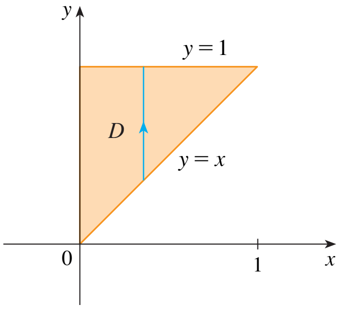


FIGURA 15
D como uma região do tipo I

$$\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\,dA$$

onde $$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \leqslant y \leqslant 1\}$$

Esboçamos essa região D na Figura 15. Então, da Figura 16, vemos que um modo alternativo de descrever D é

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

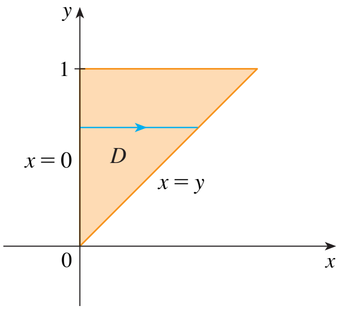


FIGURA 16
D como uma região do tipo II

Isso nos permite usar $\boxed{5}$ para exprimir a integral dupla como uma integral iterada na ordem reversa:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx &= \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big[x \operatorname{sen}(y^2)\Big]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \operatorname{sen}(y^2)\,dy = -\tfrac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 1)\end{aligned}$$

Propriedades das Integrais Duplas

Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região D seguem imediatamente da Definição 2 desta seção e das Propriedades 7, 8 e 9 da Seção 15.1.

$$\boxed{6} \qquad \iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint_D f(x, y)\,dA + \iint_D g(x, y)\,dA$$

$$\boxed{7} \qquad \iint_D cf(x, y)\,dA = c \iint_D f(x, y)\,dA$$

Se $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todo (x, y) em R, então

$$\boxed{8} \qquad \iint_D f(x, y)\,dA \geqslant \iint_D g(x, y)\,dA$$

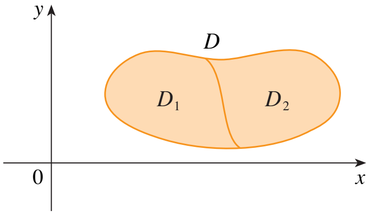


FIGURA 17

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real, dada pela equação $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

$$\boxed{9} \qquad \boxed{\iint_D f(x, y)\,dA = \iint_{D_1} f(x, y)\,dA + \iint_{D_2} f(x, y)\,dA}$$

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões D que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse procedimento. (Veja os Exercícios 55 e 56.)

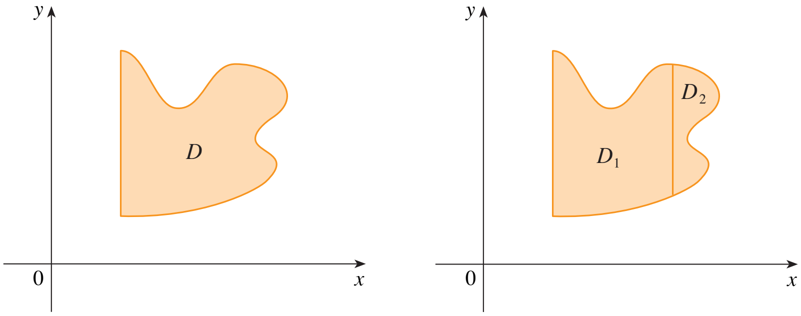


FIGURA 18

(a) D não é do tipo I nem do tipo II.

(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II.

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D, obteremos a área de D:

10
$$\boxed{\iint_D 1\, dA = A(D)}$$

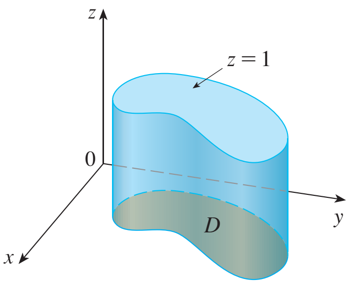


FIGURA 19
Cilindro com base D e altura 1

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e a altura é 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\, dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade. (Veja o Exercício 61.)

11 Se $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo (x, y) em D, então

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EXEMPLO 6 Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$

1–6 Calcule a integral iterada.

15.3 Exercícios

1. $\int_0^4 \int^{\sqrt{y}} -xy^2\, dx\, dy$

2. $\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y)\, dy\, dx$

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\, dy\, dx$

4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$

5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\, dt\, ds$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7–10 Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, -y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$

8. $\iint_D \dfrac{y}{x^5 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

9. $\iint_D x\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}$

10. $\iint_D x^3\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. Desenhe um exemplo de uma região que seja
   (a) do tipo I, mas não do tipo II
   (b) do tipo II, mas não do tipo I

12. Desenhe um exemplo de uma região que seja
   (a) tanto do tipo I quanto do tipo II
   (b) nem do tipo I nem do tipo II

13–14 Expresse D como a região do tipo I e também como uma região do tipo II. Em seguida, calcule a integral dupla de duas maneiras.

13. $\iint_D x\, dA$, D é limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$

14. $\iint_D xy\, dA$, D é limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 3x$

15–16 Defina as integrais iteradas para ambas as ordens de integração. Então, calcule a integral dupla usando a ordem mais fácil e explique por que ela é mais fácil.

15. $\iint_D y\, dA$, D é limitada por $y = x - 2$, $x = y^2$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

16. $\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, D é limitada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

17–22 Calcule a integral dupla.

17. $\iint_D x \cos y \, dA$, D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

18. $\iint_D (x^2 + 2y)\, dA$, D é limitada por $y = x$, $y = x^3$, $x \geqslant 0$

19. $\iint_D y^2 \, dA$, D é a região triangular com vértices (0, 1), (1, 2), (4, 1)

20. $\iint_D xy^2 \, dA$, D é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

21. $\iint_D (2x - y)\, dA$, D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

22. $\iint_D 2xy \, dA$, D é a região triangular com vértices (0, 0), (1, 2) e (0, 3)

23–32 Determine o volume do sólido dado.

23. Abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$

24. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

25. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo e vértices (1, 1), (4, 1) e (1, 2)

26. Limitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

27. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$

28. Limitado pelos planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ e $z = 0$

29. Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$

30. Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

31. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

32. Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

33. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x \, dA$.

34. Encontre o volume aproximado do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção.)

35–36 Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

35. O sólido limitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

36. O sólido limitado pelo paraboloide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

37–38 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

37. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$

38. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

39–42 Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

SCA **39.** Abaixo da superfície $z = x^2y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

40. Entre os paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

41. Limitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

42. Limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

43–48 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

43. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dy\, dx$

44. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

45. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$

46. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-2}} f(x, y)\, dx\, dy$

47. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

48. $\int_0^1 \int_{\text{arctg}\, x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

49–54 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

49. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx\, dy$

50. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy$

51. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$

52. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

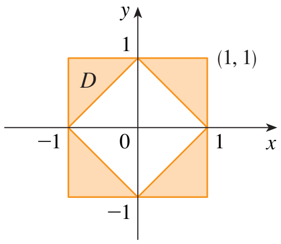
53. $\int_0^1 \int_{\text{arcsen}\, y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

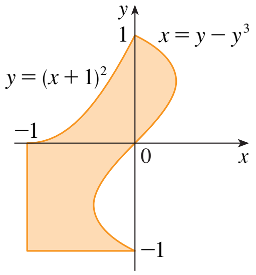
54. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

55–56 Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

55. $\iint_D x^2 \, dA$

52. $\iint_D y \, dA$





57–58 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

57. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q é o quarto de círculo com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$ no primeiro quadrante

58. $\iint_T \text{sen}^4(x + y)\, dA$, T é o triângulo limitado pelas retas $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$

59–60 Encontre o valor médio de f na região D

59. $f(x, y) = xy$, D é o triângulo com vértices, (0, 0), (1, 0) e (1, 3)

60. $f(x, y) = x \,\text{sen}\, y$, D é limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

61. Demonstre a Propriedade 11.

62. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

63–67 Use a geometria ou simetria, ou ambas, para calcular a integral dupla.

63. $\displaystyle\iint_D (x + 2)\,dA,\quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}\}$

64. $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dA$, D é o disco com centro na origem e raio R

65. $\displaystyle\iint_D (2x + 3y)\,dA$, D é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

66. $\displaystyle\iint_D (2 + x^2y^3 + y^2\operatorname{sen} x)\,dA,\quad D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant |y| \leqslant 1\}$

67. $\displaystyle\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2})\,dA,\quad D = [-a, a] \times [-b, b]$

SCA **68.** Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu SCA para fazer esse desenho, para achar as equações dos limites da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

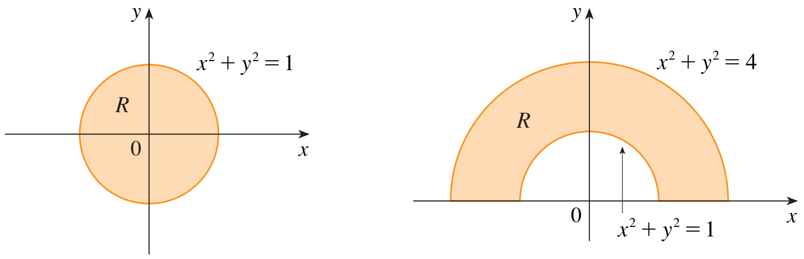


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta}$$

(Veja a Seção 10.3.)

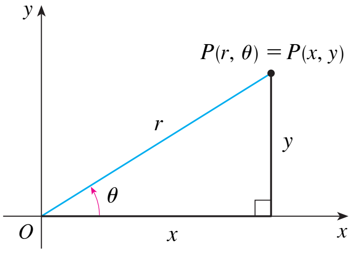


FIGURA 2

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$, onde R é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores R_{ij} mostrados na Figura 4.

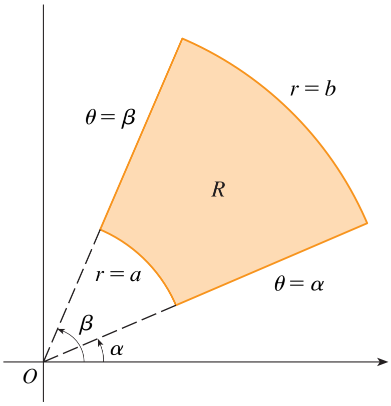


FIGURA 3 Retângulo polar

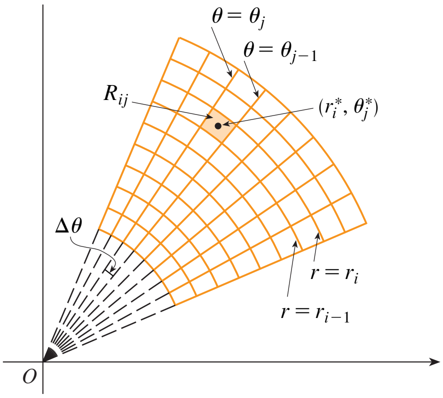


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

O "centro" do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij} usando o fato de que a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ é $\frac{1}{2}r^2\theta$. Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos que a área de R_{ij} é

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Apesar de termos definido a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$ em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f, obtemos a mesma resposta usando retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\,r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\,dA &= \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\,\Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$\boxed{2}$ Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

A fórmula em $\boxed{2}$ diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, usando os limites de integração adequados para r e θ e substituindo dA por $r\, dr\, d\theta$. Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2. Um método clássico para se lembrar disso está na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares “infinitesimais” como retângulos convencionais com dimensões $r\, d\theta$ e dr e, portanto, com “área” $dA = r\, dr\, d\theta$.

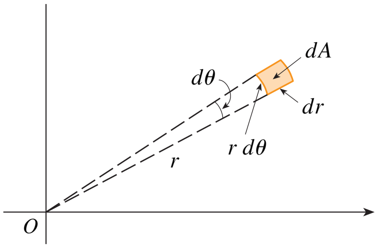


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Portanto, pela Fórmula 2,

$$\begin{aligned}\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\,\mathrm{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\,\mathrm{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \Big[r^3\cos\theta + r^4\,\mathrm{sen}^2\theta\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\,\mathrm{sen}^2\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \Big[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\Big]\, d\theta \\ &= 7\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}\end{aligned}$$

Aqui usamos a identidade trigonométrica

$$\mathrm{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Veja a Seção 7.2, no Volume I, para informações sobre a integração de funções trigonométricas.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Se tomarmos $z = 0$ na equação do paraboloide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do paraboloide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

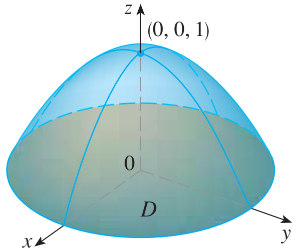


FIGURA 6

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

que não é fácil de calcular, pois envolve determinar $\int (1 - x^2)^{3/2}\, dx$.

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como o mostrado na Figura 7. Isso é semelhante à região com coordenadas retangulares do tipo II vista na Seção 15.3. De fato, combinando a Fórmula 2 desta seção com a Fórmula 15.3.5, obtemos o seguinte.

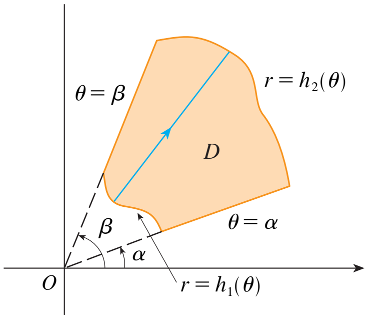


FIGURA 7
$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

então
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$

que coincide com a Fórmula 10.4.3.

EXEMPLO 3 Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

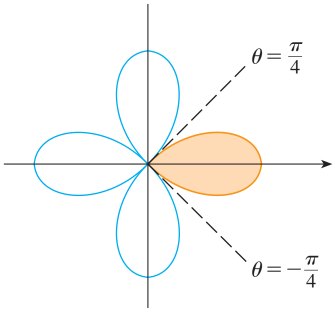


FIGURA 8

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$

Então, a área é

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Veja as Figuras 9 e 10.)

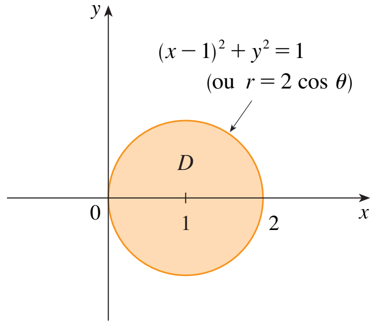


FIGURA 9

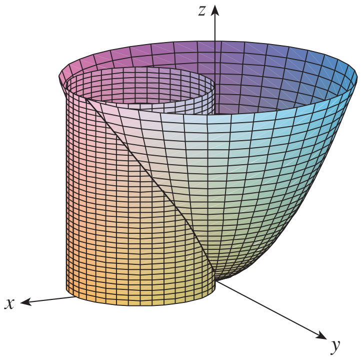


FIGURA 10

Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$, assim, o limite circular fica $r^2 = 2r\cos\theta$ ou $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

e, da Fórmula 3, temos

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

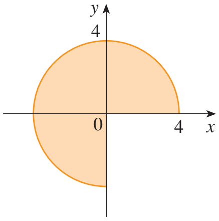
$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\Big[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

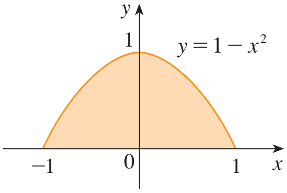
15.4 Exercícios

1–4 Uma região R é mostrada. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares, e escreva $\iint_R f(x, y)\,dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

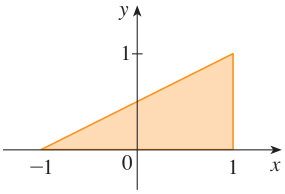
1.



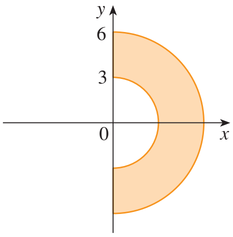
2.



3.



4.



5–6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

5. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/4}\int_1^2 r\,dr\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

7–14 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2y\,dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5

8. $\iint_R (2x - y)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $x = 0$ e $y = x$

9. $\iint_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3

10. $\iint_R \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}\,dA$, onde R é a região que fica entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ com $0 < a < b$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\iint_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2

13. $\iint_R \operatorname{arctg}(y/x)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

14. $\iint_D x\,dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15–18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região limitada por ambos os cardioides $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1 - \cos\theta$

17. A região dentro do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$

18. A região dentro do círculo $r = 1 + \cos\theta$ e fora do círculo $r = 3\cos\theta$

19–27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

20. Abaixo do paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy

21. Limitado pelo hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitado pelo paraboloide $z = 1 + zx^2 + zy^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante

25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitado pelos paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo que passa pelo centro de uma esfera de raio r_2. Determine o volume do sólido em formato de anel resultante.

(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Observe que o volume depende somente de h e não de r_1 ou r_2.

29–32 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

29. $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

30. $\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2y\,dx\,dy$

31. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\,dx\,dy$

32. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

33–34 Expresse a integral dupla em termos de uma integral unidimensional com relação a r. Em seguida, use a calculadora para avaliar a integral correta com quatro casas decimais.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\,dA$, D onde está o disco com centro na origem e raio 1

34. $\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dA$, onde D é a porção do disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro quadrante

35. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.

36. Um pulverizador agrícola distribui água em um padrão circular de 50 m de raio. Ele fornece água até uma profundidade de e^{-r} metros por hora a uma distância de r metros do pulverizador.

(a) Se $0 < R \leqslant 50$, qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro do círculo de raio R centrada no pulverizador?

(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora por metro quadrado fornecida à região dentro do círculo de raio R.

37. Encontre o valor médio da função $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ na região anular $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$, onde $0 < a < b$.

38. Seja D o disco com centro na origem e raio a. Qual é a distância média dos pontos em D em relação à origem?

39. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

40. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use isto para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}\,x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.)

41. Utilize o resultado do Exercício 40, parte (c), para calcular as seguintes integrais.

(a) $\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$

(b) $\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$

15.5 Aplicações de Integrais Duplas

Já vimos uma aplicação da integral dupla: o cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, o que será feito na próxima seção. Nesta seção, vamos explorar as aplicações físicas, tais como cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos que essas ideias físicas também são importantes quando aplicadas a funções densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

Densidade e Massa

Na Seção 8.3, no volume I, calculamos momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante usando as integrais unidimensionais. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar as lâminas com densidade variável. Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano xy e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua em D. Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área de um pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

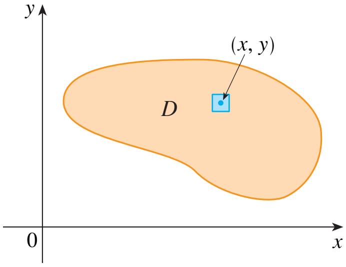


FIGURA 1

Para determinarmos a massa total m da lâmina, dividimos o retângulo R contendo D em sub-retângulos R_{ij}, todos do mesmo tamanho (como na Figura 2), e consideramos $\rho(x, y)$ como 0 fora de D. Se escolhermos um ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em R_{ij}, então a massa da parte da lâmina que ocupa R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, onde ΔA é a área de R_{ij}. Se somarmos todas essas massas, obteremos uma aproximação do valor da massa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Aumentando o número de sub-retângulos, obtemos a massa total m da lâmina como o valor-limite das aproximações:

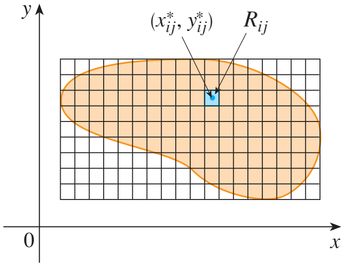


FIGURA 2

1
$$\boxed{m = \lim_{k,\,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA}$$

Físicos consideram ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira. Por exemplo: se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto (x, y) em D, então a carga total Q é dada por

2
$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$$

EXEMPLO 1 Uma carga está distribuída na região triangular D da Figura 3 de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.

SOLUÇÃO Da Equação 2 e da Figura 3, temos

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{1} xy\, dy\, dx$$

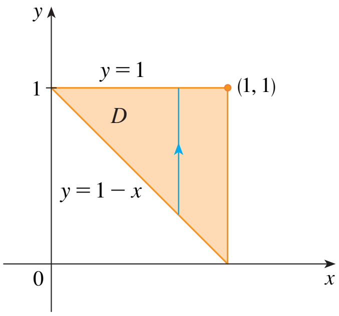


FIGURA 3

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1-x)^2]\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Logo, a carga total é $\frac{5}{24}$ C.

Momentos e Centros de Massa

Na Seção 8.3, no Volume I, determinamos o centro de massa de uma lâmina de densidade constante; aqui, consideraremos uma lâmina de densidade variável. Suponha que a lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Lembre-se de que no Capítulo 8 definimos o momento de uma partícula em relação a um eixo como o produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo. Dividimos D em retângulos pequenos, como na Figura 2. Então a massa de R_{ij} é aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, e podemos aproximar o momento de R_{ij} com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A]\,y_{ij}^*$$

Se somarmos essas quantidades e tomarmos o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, obteremos o **momento** da lâmina inteira **em relação ao eixo *x***:

3

$$M_x = \lim_{m,\,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\,\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$$

Da mesma forma, **o momento em relação ao eixo *y*** é

4

$$M_y = \lim_{m,\,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\,\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D x\,\rho(x, y)\,dA$$

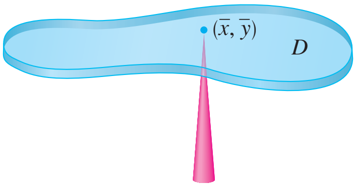


FIGURA 4

Como anteriormente, definimos o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ de modo que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. O significado físico disso é que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Assim, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 4).

5 As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x, y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x, y)\,dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$

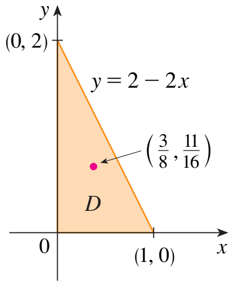


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade for $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

SOLUÇÃO O triângulo está mostrado na Figura 5. (Observe que a equação do limite superior é $y = 2 - 2x$.) A massa da lâmina é

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Então, as fórmulas em $\boxed{5}$ fornecem

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\,\rho(x, y)\,dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\,\rho(x, y)\,dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \tfrac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[7x - 9\frac{x^2}{2} - x^3 + 5\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

O centro de massa é o ponto $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$.

EXEMPLO 3 A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

SOLUÇÃO Vamos posicionar a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Veja a Figura 6.) Então a distância do ponto (x, y) ao centro do círculo (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde K é alguma constante. Tanto a função densidade como o formato da lâmina sugerem a conversão para coordenadas polares. Então $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ e a região D é dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Logo, a massa da lâmina é

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dA = \iint\limits_D K\sqrt{x^2 + y^2}\,dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^a (Kr)\,r\,dr\,d\theta = K\int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2\,dr$$

$$= K\pi \frac{r^3}{3}\Big]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$$

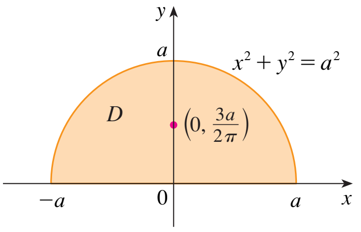


FIGURA 6

Tanto a lâmina como a função densidade são simétricas com relação ao eixo y e, assim, o centro de massa precisa estar sobre o eixo y, ou seja, $\bar{x} = 0$. A coordenada y é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\,\rho(x, y)\,dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \operatorname{sen}\theta\,(Kr)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^a r^3\,dr = \frac{3}{\pi a^3}\left[-\cos\theta \right]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/(2\pi))$.

Compare a localização do centro de massa no Exemplo 3 com o Exemplo 4 na Seção 8.3, no Volume I, onde encontramos que o centro de massa da lâmina com o mesmo formato, mas com densidade uniforme, está localizado no ponto $(0, 4a/(3\pi))$.

Momento de Inércia

O **momento de inércia** (também chamado **segundo momento**) de uma partícula de massa m em relação a um eixo é definido como mr^2, onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendemos o conceito a uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ e que ocupa uma região D pelo mesmo processo que fizemos para os momentos normais. Dividimos D em pequenos retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em relação ao eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o **momento de inércia** da lâmina **em relação ao eixo *x***:

6

$$\boxed{I_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA}$$

Da mesma forma, o **momento de inércia em relação ao eixo *y*** é

7

$$\boxed{I_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA}$$

É de interesse, ainda, considerar o **momento de inércia em relação à origem**, também chamado **momento polar de inércia**:

8

$$\boxed{I_0 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA}$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

EXEMPLO 4 Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a.

SOLUÇÃO O limite de D é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que em coordenadas polares D é descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Vamos calcular I_0 primeiro:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r\, dr\, d\theta \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2} \end{aligned}$$

Em vez de calcularmos I_x e I_y diretamente, vamos usar o fato de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (da simetria do problema). Assim

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$

No Exemplo 4, observe que a massa do disco é

$$m = \text{densidade} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

de modo que o momento de inércia do disco em torno da origem (como uma roda em torno de seu eixo) pode ser escrito como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \tfrac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \tfrac{1}{2}ma^2$$

Portanto, se aumentarmos a massa ou o raio do disco, aumentaremos o momento de inércia. Em geral, o momento de inércia tem um papel em um movimento de rotação semelhante ao que a massa tem em um movimento linear. O momento de inércia de uma roda é o que torna difícil começar ou parar a rotação da roda, assim como a massa do carro dificulta seu movimento inicial e a frenagem.

O **raio de giração de uma lâmina em relação a um eixo** é o número R tal que

$$\boxed{9} \qquad mR^2 = I$$

onde m é a massa da lâmina e I é o momento de inércia em relação ao eixo dado. A Equação 9 nos diz que, se a massa da lâmina estiver concentrada a uma distância R do eixo, então o momento de inércia dessa "massa pontual" será o mesmo que o momento de inércia da lâmina.

Em particular, o raio de giração $\bar{\bar{y}}$ em relação ao eixo x e o raio de giração $\bar{\bar{x}}$ em relação ao eixo y têm as equações

$$\boxed{10} \qquad m\bar{\bar{y}}^2 = I_x \qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y$$

Então $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ é o ponto no qual podemos concentrar a massa da lâmina sem modificar os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados resultantes. (Observe a analogia com o centro de massa.)

EXEMPLO 5 Determine o raio de giração em torno do eixo x do disco do Exemplo 4.

SOLUÇÃO Como observado, a massa do disco é $m = \rho\pi a^2$, e da Equação 10 temos

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Portanto, o raio de giração em relação ao eixo x é $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{2}a$, que é metade do raio do disco.

Probabilidade

Na Seção 8.5, no Volume I, consideramos a *função densidade de probabilidade* f de uma variável aleatória contínua X. Isso significa que $f(x) \geqslant 0$ para todo x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ e a probabilidade de que X esteja entre a e b é determinada integrando-se f de a até b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Consideremos agora um par de variáveis aleatórias X e Y como o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de uma mulher adulta escolhida ao acaso. A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\,dA$$

Em particular, se a região for um retângulo, a probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

(Veja a Figura 7.)

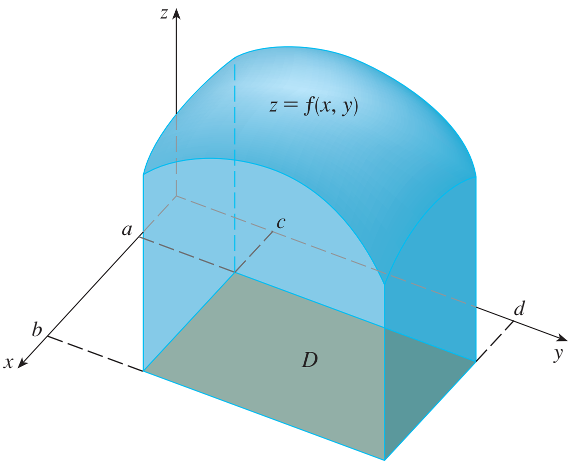


FIGURA 7
A probabilidade de que X esteja entre a e b e de que Y esteja entre c e d é o volume do sólido acima do retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$ e abaixo do gráfico da função densidade conjunta.

Como probabilidades não podem ser negativas e são medidas na escala de 0 a 1, a função densidade conjunta tem as seguintes propriedades:

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$$

Como no Exercício 40 da Seção 15.4, a integral dupla sobre $\mathbb{R}^2$ é uma integral imprópria, definida como o limite da integral dupla sobre os círculos ou retângulos que se expandem, e podemos escrever

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

EXEMPLO 6 Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

determine o valor da constante C. Então, calcule $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

SOLUÇÃO Determinamos o valor de C garantindo que a integral dupla de f seja igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ está fora do retângulo $[0, 10] \times [0, 10]$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0}^{10}\int_{0}^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx = C\int_{0}^{10} \Big[xy + y^2\Big]_{y=0}^{y=10} dx$$

$$= C\int_{0}^{10} (10x + 100)\, dx = 1\,500C$$

Portanto, 1 500C e, assim, $C = \frac{1}{1\,500}$.

Agora, podemos calcular a probabilidade de X ser no máximo 7 e de Y ser no mínimo 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7}\int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0}^{7}\int_{2}^{10} \tfrac{1}{1\,500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1\,500}\int_{0}^{7} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2}^{y=10} dx = \tfrac{1}{1\,500}\int_{0}^{7} (8x + 96)\, dx$$

$$= \tfrac{868}{1\,500} \approx 0{,}5787$$

Suponha que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_1(x)$ e Y seja uma variável aleatória com função densidade $f_2(y)$. Então, X e Y são ditas **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das funções densidade individuais:

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

Na Seção 8.5, modelamos o tempo de espera utilizando a função densidade exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

onde μ é o tempo médio de espera. No próximo exemplo consideraremos a situação com dois tempos de espera independentes.

EXEMPLO 7 O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

SOLUÇÃO Supondo que os tempos de espera X para comprar a entrada e Y para comprar pipoca possam ser modelados por funções densidade de probabilidade exponencial, podemos escrever as funções densidade individuais como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-x/10} & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-y/5} & \text{se } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5} & \text{se } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Foi pedida também a probabilidade de $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

onde D é a região triangular mostrada na Figura 8. Então,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \tfrac{1}{50} e^{-x/10} e^{-y/5}\, dy\, dx \\ &= \tfrac{1}{50} \int_0^{20} \Big[e^{-x/10} (-5) e^{-y/5} \Big]_{y=0}^{y=20-x} dx \\ &= \tfrac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10} \big(1 - e^{(x-20)/5}\big)\, dx \\ &= \tfrac{1}{10} \int_0^{20} \big(e^{-x/10} - e^{-4} e^{x/10}\big)\, dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0{,}7476 \end{aligned}$$

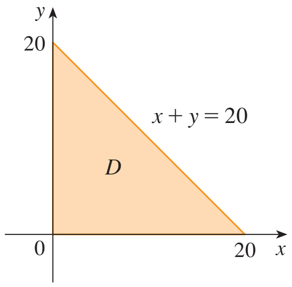


FIGURA 8

Isso significa que cerca de 75% dos espectadores esperam menos de 20 minutos antes de tomarem seus assentos.

Valores Esperados

Lembre-se da Seção 8.5, no Volume I, de que, se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f, então sua *média* é

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f, definimos a **média X** e a **média Y**, também chamadas **valores esperados** de X e Y, como

$$\boxed{11} \qquad \mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$$

Observe como são parecidas as expressões de μ_1 e μ_2 em $\boxed{11}$ com os momentos M_x e M_y de uma lâmina com função densidade ρ nas Equações 3 e 4. De fato, podemos pensar na probabilidade como uma massa continuamente distribuída. Calculamos probabilidade da mesma maneira que calculamos massa: integrando a função densidade. E, como a "massa de probabilidade" total é 1, as expressões de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ em $\boxed{5}$ mostram que podemos pensar que os valores esperados de X e Y, μ_1 e μ_2, são as coordenadas do "centro de massa" da distribuição de probabilidade.

No próximo exemplo trabalharemos com distribuições normais. Como na Seção 8.5, uma única variável aleatória tem *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

onde μ é sua média e σ é seu desvio-padrão.

EXEMPLO 8 Uma fábrica produz rolamentos (de forma cilíndrica) que são vendidos como tendo 4,0 cm de diâmetro e 6,0 cm de comprimento. Na verdade, o diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm, enquanto o comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio-padrão 0,01 cm. Supondo que X e Y sejam independentes, escreva a função densidade conjunta e faça seu gráfico. Determine a probabilidade de que um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção tenha comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que 0,02 cm.

SOLUÇÃO Temos que X e Y têm distribuições normais com $\mu_1 = 4{,}0$, $\mu_2 = 6{,}0$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}01$. As funções densidade individuais para X e Y são

$$f_1(x) = \frac{1}{0{,}01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-4)^2/0{,}0002} \qquad f_2(y) = \frac{1}{0{,}01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(y-6)^2/0{,}0002}$$

Como X e Y são independentes, a função densidade conjunta é o produto:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f_1(x) f_2(y) &= \frac{1}{0{,}0002\pi}\, e^{-(x-4)^2/0{,}0002} e^{-(y-6)^2/0{,}0002} \\ &= \frac{5\,000}{\pi}\, e^{-5\,000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

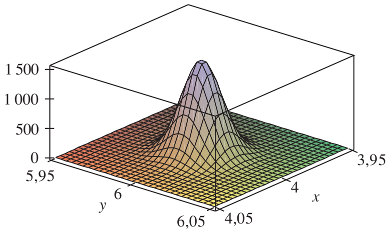


FIGURA 9
Gráfico da função densidade normal conjunta em duas variáveis do Exemplo 8

O gráfico dessa função é mostrado na Figura 9.

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de ambos, X e Y, diferirem de seus valores médios por menos de 0,02 cm. Usando uma calculadora ou computador para estimar a integral, temos

$$\begin{aligned} P(3{,}98 < X < 4{,}02,\ 5{,}98 < Y < 6{,}02) &= \int_{3{,}98}^{4{,}02} \int_{5{,}98}^{6{,}02} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \frac{5\,000}{\pi} \int_{3{,}98}^{4{,}02} \int_{5{,}98}^{6{,}02} e^{-5\,000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx \\ &\approx 0{,}91 \end{aligned}$$

Então, a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em 0,02 cm ou mais é de aproximadamente

$$1 - 0{,}91 = 0{,}09$$

15.5 Exercícios

1. Uma carga elétrica é distribuída sobre o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 5$, $2 \leqslant y \leqslant 5$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no retângulo.

2. Uma carga elétrica é distribuída sobre o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (medida em coulombs por metro quadrado). Determine a carga total no disco.

3–10 Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ.

3. $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 \leqslant y \leqslant 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$

4. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$; $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

5. D é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$

6. D é a região triangular limitada pelas retas $x = 0$, $y = x$ e $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$

7. D é limitada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$

8. D é limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$; $\rho(x, y) = ky$

9. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen}(\pi x/L),\ 0 \leqslant x \leqslant L\}$; $\rho(x, y) = y$

10. D é limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$; $\rho(x, y) = \sqrt{x}$

11. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

12. Determine o centro de massa da lâmina do Exercício 11 se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

13. O limite de uma lâmina consiste nos semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$ juntamente com as partes do eixo x que os une. Encontre o centro de massa da lâmina se a densidade em qualquer ponto é proporcional à sua distância da origem.

14. Encontre o centro de massa da lâmina do Exercício 13 se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.

15. Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a, se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.

16. A lâmina ocupa a região dentro do círculo $x^2 + y^2 = 2y$, mas fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Encontre o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for inversamente proporcional à sua distância da origem.

17. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 7.

18. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 12.

19. Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do Exercício 15.

20. Considere uma pá quadrada de um ventilador com lados de comprimento 2 e com o canto inferior esquerdo colocado na origem. Se a densidade da pá for $\rho(x, y) = 1 + 0{,}1x$, é mais difícil girar a pá em torno do eixo x ou do eixo y?

21–24 Uma lâmina com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa a região dada. Encontre os momentos de inércia I_x e I_y e os raios de giração $\bar{\bar{x}}$ e $\bar{\bar{y}}$.

21. O retângulo $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant h$

22. O triângulo com vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ e $(0, h)$

23. A parte do disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ no primeiro quadrante

24. A região sob a curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

SCA **25–26** Utilize um sistema de computação algébrica para determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia da lâmina que ocupa a região D e tem a densidade dada.

25. D está limitada pelo laço direito da rosácea de quatro folhas $r = \cos 2\theta$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$

26. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x},\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$; $\rho(x, y) = x^2y^2$

27. A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Encontre $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.

(c) Encontre $P(X + Y \leqslant 1)$.

28. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função densidade conjunta.

(b) Se X e Y são variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é a função f da parte (a), determine

(i) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right)$ (ii) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{2}\right)$

(c) Determine os valores esperados de X e Y.

29. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0{,}1e^{-(0{,}5x+0.2y)} & \text{se } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Verifique que f é de fato uma função densidade conjunta.

(b) Determine as seguintes probabilidades.

(i) $P(Y \geqslant 1)$ (ii) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 4)$

(c) Determine os valores esperados de X e Y.

30. (a) Uma luminária tem duas lâmpadas de um tipo com tempo de vida médio de 1 000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1\,000$, determine a probabilidade de que ambas as lâmpadas venham a falhar dentro de um período de 1 000 horas.

(b) Outra luminária tem somente uma lâmpada do mesmo tipo das da parte (a). Se a lâmpada queima e é trocada por outra do mesmo tipo, determine a probabilidade de que as duas venham a falhar dentro de 1 000 horas.

SCA **31.** Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias, onde X tem distribuição normal com média 45 e desvio-padrão 0,5 e Y tem distribuição normal com média 20 e desvio-padrão 0,1.

(a) Encontre $P(40 \leqslant X \leqslant 50,\ 20 \leqslant Y \leqslant 25)$.

(b) Encontre $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leqslant 2)$.

32. Xavier e Yolanda têm aulas que terminam ao meio-dia e concordaram em se encontrar todo dia depois das aulas. Eles chegam em um café separadamente. O tempo de chegada de Xavier é X e o da Yolanda é Y, onde X e Y são medidos em minutos após o meio-dia. As funções densidade individuais são

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{se } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(Xavier chega algumas vezes depois do meio-dia, e é mais provável que ele chegue na hora do que se atrase. Yolanda sempre chega às 12h10 e é mais provável que se atrase do que chegue pontualmente.) Depois de Yolanda chegar, ela espera até meia hora por Xavier, mas ele não espera por ela. Determine a probabilidade de eles se encontrarem.

33. Quando estudamos uma contaminação epidêmica, supomos que a probabilidade de um indivíduo infectado disseminar a doença para um indivíduo não infectado seja uma função da distância entre eles. Considere uma cidade circular com raio de 10 km na qual a população está uniformemente distribuída. Para um indivíduo não infectado no ponto $A(x_0, y_0)$, suponha que a função probabilidade seja dada por

$$f(P) = \tfrac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

onde $d(P, A)$ denota a distância entre os pontos P e A.

(a) Suponha que a exposição de uma pessoa à doença seja a soma das probabilidades de adquirir a doença de todos os membros da população. Suponha ainda que as pessoas infectadas estejam uniformemente distribuídas pela cidade, existindo k indivíduos contaminados por quilômetro quadrado. Determine a integral dupla que representa a exposição de uma pessoa que reside em A.

(b) Calcule a integral para o caso em que A está no centro da cidade e para o caso em que A está na periferia da cidade. Onde seria preferível viver?

15.6 Área de Superfície

Na Seção 16.6 trabalharemos com áreas de superfícies mais gerais, denominadas superfícies parametrizadas, portanto, esta seção não precisa ser estudada se a seção posterior for estudada.

Nesta seção, aplicamos as integrais duplas ao problema de calcular a área de uma superfície. Na Seção 8.2, no Volume I, descobrimos a área de um tipo muito especial de superfície – uma superfície de revolução – pelos métodos de cálculo de uma variável única. Aqui, calculamos a área de uma superfície com equação $z = f(x, y)$, o gráfico de uma função de duas variáveis.

Seja S a superfície com a equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas. Para simplificar a dedução da fórmula da área de superfície, supomos que $f(x, y) \geqslant 0$ e o domínio D de f é um retângulo. Dividimos D em pequenos retângulos R_{ij} com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Se (x_i, y_j) é o canto de R_{ij} mais próximo da origem, seja $P_{ij}(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ o ponto em S diretamente acima dele (veja a Figura 1). O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação a S próximo de P_{ij}. Então, a área ΔT_{ij} da parte deste plano tangente (um paralelogramo) que fica diretamente acima de R_{ij} é uma aproximação à área ΔS_{ij} da parte de S que fica diretamente acima de R_{ij}. Portanto, a soma $\Sigma\Sigma\Delta T_{ij}$ é uma aproximação à área total de S e essa aproximação parece melhorar conforme o número de retângulos aumenta. Portanto, definimos a **área da superfície** de S como

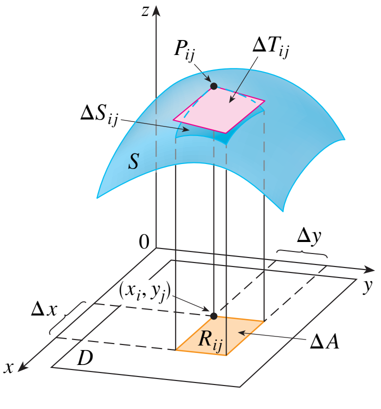


FIGURA 1

$$\boxed{1} \qquad \boxed{A(S) = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}}$$

Para encontrar uma fórmula que seja mais conveniente do que a Equação 1 para fins de cálculo, sejam **a** e **b** os vetores que começam em P_{ij} e ficam ao longo dos lados do paralelogramo com área ΔT_{ij}. (Veja a Figura 2.) Então, $\Delta T_{ij} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$. Lembre-se, da Seção 14.3, de que $f_x(x_i, y_i)$ e $f_y(x_i, y_i)$ são as inclinações das retas tangentes através de P_{ij} nas direções de **a** e **b**. Portanto,

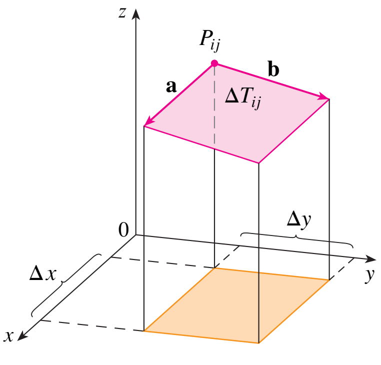


FIGURA 2

$$\mathbf{a} = \Delta x\,\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\,\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\,\Delta y\,\mathbf{k}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\,\Delta y \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\,\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\,\mathbf{j} + \Delta x\Delta y\,\mathbf{k} \\ &= [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)] + 1}\;\Delta A$$

Da Definição 1 temos, então,

$$A(S) = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

$$= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\, \Delta A$$

e pela definição de uma integral dupla, obtemos a seguinte fórmula.

2 A área da superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde f_x e f_y são contínuas, é

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y) + 1}\, dA$$

Na Seção 16.6, verificaremos que essa fórmula é consistente com nossa fórmula anterior para a área de uma superfície de revolução. Se usarmos a notação alternativa para derivadas parciais, podemos reescrever a Fórmula 2 da seguinte maneira:

3
$$A(s) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Observe a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 3 e a fórmula do comprimento do arco da Seção 8.1, no Volume I:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

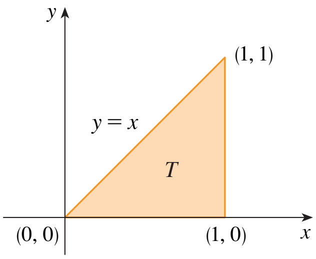


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Determine a área de superfície da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que fica acima da região triangular T no plano xy com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1).

SOLUÇÃO A região T é mostrada na Figura 3 e é descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

Usando a Fórmula 2 com $f(x, y) = x^2 + 2y$, obtemos

$$A = \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5}\, dy\, dx$$

$$\int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5}\, dx = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{3}(4x^2 + 5)^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})$$

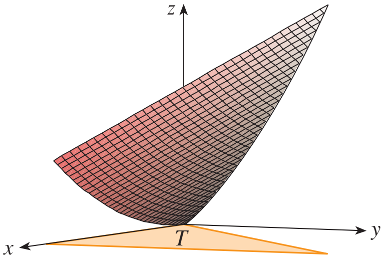


FIGURA 4

A Figura 4 mostra a porção da superfície cuja área acabamos de calcular.

EXEMPLO 2 Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. (Veja a Figura 5.) Usando a Fórmula 3, temos

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

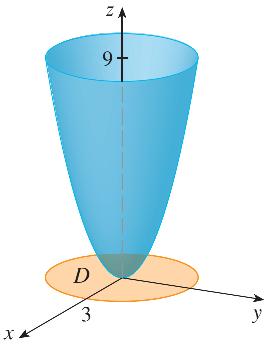


FIGURA 5

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

15.6 Exercícios

1–12 Determine a área da superfície.

1. A parte do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$

2. A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$

3. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante

4. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$

5. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 2)$

6. A parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy

7. A parte do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

8. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

9. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

10. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $z = 1$

11. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy

12. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$

13–14 Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

13. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$

14. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

15. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com quatro quadrados para estimar a área da superfície da porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está acima do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

16. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas com $m = n = 2$ para estimar a área da superfície $z = xy + x^2 + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

SCA **17.** Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

SCA **18.** Determine a área exata da superfície

$$z = 1 + x + y + x^2 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant y \leqslant 1$$

Ilustre, traçando o gráfico da superfície.

SCA **19.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = 1 + x^2y^2$ que está acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

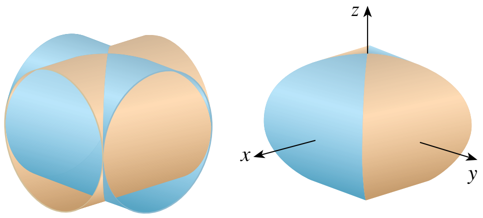
SCA **20.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

21. Mostre que a área da parte do plano $z = ax + by + c$ que projeta sobre uma região D no plano xy com área $A(D)$ é $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,A(D)$.

22. Se você tentar usar a Fórmula 2 para encontrar a área da metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, você terá um pequeno problema, pois a integral dupla é imprópria. De fato, o integrando tem uma descontinuidade infinita em cada ponto do limite circular $x^2 + y^2 = a^2$. No entanto, a integral pode ser calculada como o limite da integral sobre o disco $x^2 + y^2 \leqslant t^2$ quando $t \to a^-$. Utilize este método para mostrar que a área de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$.

23. Determine a área da parte finita do paraboloide $y = x^2 + z^2$ limitada pelo plano $y = 25$. [*Sugestão:* Projete a superfície sobre o plano xy.]

24. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.



15.7 Integrais Triplas

Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

$$\boxed{1} \qquad B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ r \leqslant z \leqslant s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx, dividindo $[c, d]$ em m subintervalos de comprimentos Δy, e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz. Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa B em lmn subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Assim formamos a **soma tripla de Riemann**

$$\boxed{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

onde o ponto de amostragem $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk}. Por analogia com a definição da integral dupla (15.1.5), definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em $\boxed{2}$.

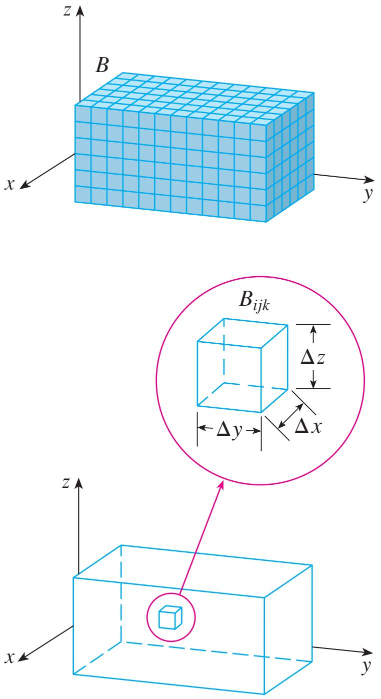


FIGURA 1

$\boxed{3}$ **Definição** A **integral tripla** de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

se esse limite existir.

Novamente, a integral tripla sempre existe se f for contínua. Escolhemos o ponto de amostragem como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto (x_i, y_j, z_k), obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\boxed{\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V}$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada, como segue.

$\boxed{4}$ **Teorema de Fubini para as Integrais Triplas** Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e, finalmente, em relação a z. Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo, se primeiro integrarmos em relação a y, então em relação a z e depois a x, teremos

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\, dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$$

SOLUÇÃO Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obteremos

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B xyz^2\, dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz \\ &= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \frac{z^3}{4}\bigg]_0^3 = \frac{27}{4}\end{aligned}$$

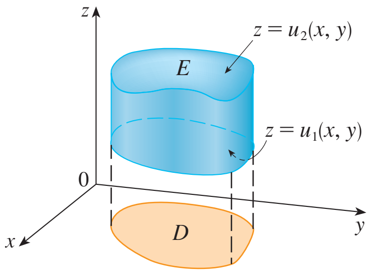


FIGURA 2
Uma região sólida do tipo 1

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada geral *E*** no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas (15.3.2). Envolveremos E por uma caixa B do tipo dado pela Equação 1. Em seguida, definiremos uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E. Por definição,

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_B F(x, y, z)\, dV$$

Essa integral existe se f for contínua e se o limite de E for "razoavelmente liso". A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla (Propriedades 6-9 da Seção 15.3).

Vamos nos restringir às funções contínuas f e a certos tipos de regiões. Uma região sólida E é dita do **tipo I** se estiver contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y, ou seja,

5 $$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy, como mostrado na Figura 2. Observe que o limite superior do sólido E é a superfície de equação $z = u_2(x, y)$, enquanto o limite inferior é a superfície $z = u_1(x, y)$.

Pelos mesmos argumentos que nos levaram à (15.3.3), podemos mostrar que, se E é uma região do tipo 1 dada pela Equação 5, então

6 $$\boxed{\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA}$$

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que x e y são mantidos fixos e, assim, $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são vistas como constantes, enquanto $f(x, y, z)$ é integrada em relação a z.

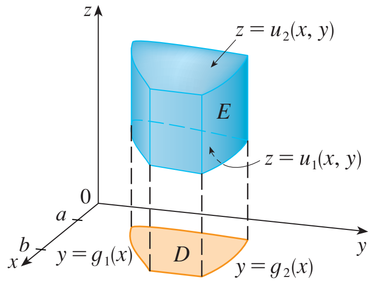


FIGURA 3
Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção D é uma região plana de tipo I

Em particular, se a projeção D de E sobre o plano xy é uma região plana do tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 se torna

7
$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx}$$

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo II (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 se torna

8
$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy}$$

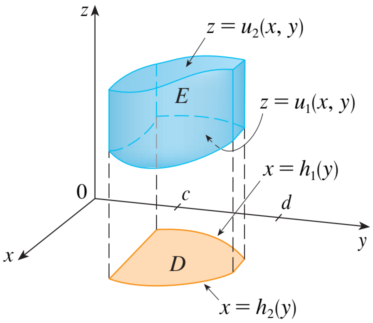


FIGURA 4
Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

EXEMPLO 2 Calcule $\iiint_E z\, dV$, onde E é o tetraedro sólido limitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

SOLUÇÃO Para escrevermos a integral tripla, é recomendável desenhar *dois* diagramas: um da região sólida E (veja a Figura 5) e outro de sua projeção D no plano xy (veja a Figura 6). A fronteira inferior do tetraedro é o plano $z = 0$ e a superior é o plano $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$) e então usamos $u_1(x, y) = 0$ e $u_2(x, y) = 1 - x - y$ na Fórmula 7. Observe que os planos $x + y + z = 1$ e $z = 0$ se interceptam na reta $x + y = 1$ (ou $y = 1 - x$) no plano xy. Logo, a projeção de E é a região triangular da Figura 6, e temos

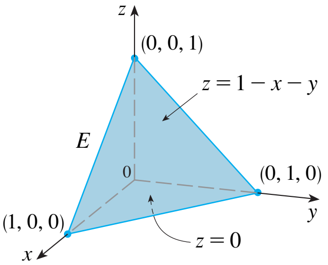


FIGURA 5

9 $$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

Essa descrição de E como região do tipo 1 nos permite calcular a integral como segue:

$$\iiint_E z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\, dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

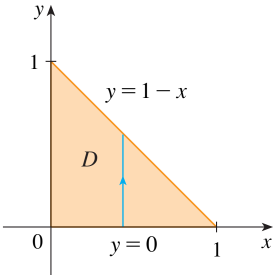


FIGURA 6

Uma região sólida E é do **tipo 2** se for da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

onde, desta vez, D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 7). A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$ e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$. Assim, temos

10
$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\, dx\right] dA}$$

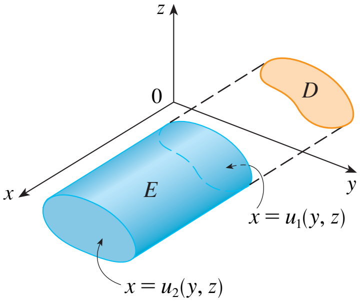


FIGURA 7
Uma região do tipo 2

Finalmente, uma região do **tipo 3** é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xz, $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 8). Para esse tipo de região, temos

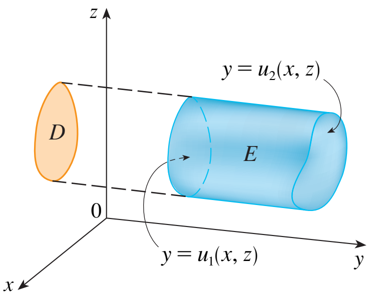


FIGURA 8

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA \tag{11}$$

Em cada uma das Equações, 10 e 11, podem existir duas possíveis expressões para a integral, dependendo de D ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, onde E é a região limitada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.

SOLUÇÃO O sólido E está mostrado na Figura 9. Se o olharmos como uma região do tipo 1, então precisaremos considerar sua projeção D_1 sobre o plano xy, que é a região parabólica da Figura 10. (O corte de $y = x^2 + z^2$ no plano $z = 0$ é a parábola $y = x^2$.)

TEC *Visual 15.7* Ilustra como regiões sólidas (incluindo aquela na Figura 9) projetam-se sobre planos coordenados

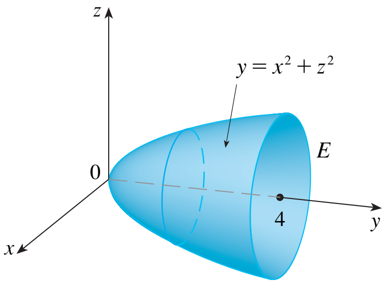


FIGURA 9
Região de integração

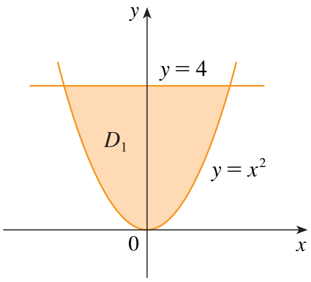


FIGURA 10
Projeção sobre o plano-xy

De $y = x^2 + z^2$ obtemos $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, e então a superfície limite de baixo de E é $z = -\sqrt{y - x^2}$ e a superfície de cima é $z = \sqrt{y - x^2}$. Portanto, a descrição de E como região do tipo 1 é

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ -\sqrt{y - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{y - x^2}\right\}$$

e obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y - x^2}}^{\sqrt{y - x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

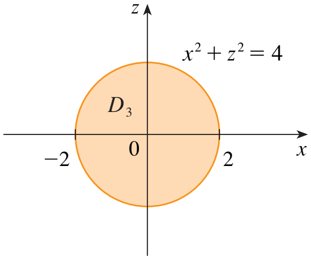


FIGURA 11
Projeção sobre o plano-xz

Apesar de essa expressão estar correta, é extremamente difícil calculá-la. Então, em vez disso, vamos considerar E como a região do tipo 3. Como tal, sua projeção D_3 sobre o plano xz é o disco $x^2 + z^2 \leqslant 4$ mostrado na Figura 11.

Então, a superfície lateral esquerda de E é o paraboloide $y = x^2 + z^2$ e a superfície lateral direita é o plano $y = 4$. Assim, tomando $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x, z) = 4$ na Equação 11, temos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy \right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Apesar de essa integral poder ser escrita como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4 - x^2}}^{\sqrt{4 - x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

fica mais simples convertê-la para coordenadas polares no plano xz: $x = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Isso fornece

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$

⊘ A maior dificuldade no cálculo de uma integral tripla é escrever uma expressão para a região de integração (como na Equação 9 do Exemplo 2). Lembre-se de que os limites de integração da integral de dentro contêm no máximo duas variáveis, os limites de integração da integral do meio contêm no máximo uma variável e os limites de integração de fora precisam ser constantes.

EXEMPLO 4 Expresse a integral iterada $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ como a integral tripla e, então, reescreva-a como uma integral iterada em uma ordem diferente, integrando primeiro em relação a x, então z, e então y.

SOLUÇÃO Podemos escrever

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2, 0 \leqslant z \leqslant y\}$. Essa descrição de E nos permite escrever projeções sobre os três planos coordenados, como a seguir:

sobre o plano xy: $\quad D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2\}$

$= \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}$

sobre o plano yz: $\quad D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$

sobre o plano xz: $\quad D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

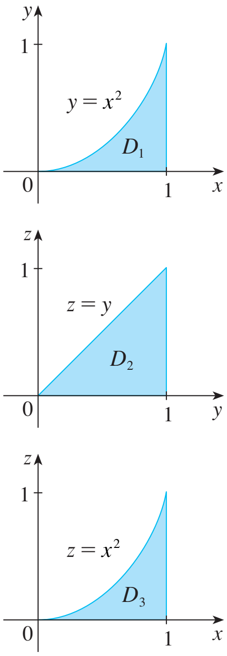


FIGURA 12
Projeções de E

A partir dos esboços resultantes das projeções na Figura 12, esboçamos o sólido E na Figura 13. Vemos que se trata do sólido limitado pelos planos $z = 0$, $x = 1$, $y = z$ pelo cilindro parabólico $y = x^2$ (ou $x = \sqrt{y}$).

Se integrarmos primeiro em relação a x, em seguida a z e, então, a y, usamos uma descrição alternativa de E:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}$$

Logo,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1\int_0^y\int_{\sqrt{y}}^x f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

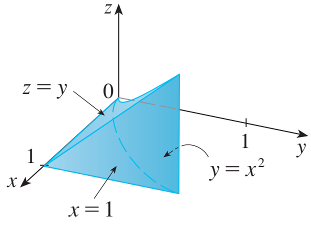


FIGURA 13
O sólido E

Aplicações de Integrais Triplas

Lembre-se de que, se $f(x) \geqslant 0$, então a integral $\int_a^b f(x)\, dx$ representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b, e se $f(x, y) \geqslant 0$, então a integral dupla $\iint_D f(x, y)\, dA$ representa o volume sob a superfície $z = f(x, y)$ acima de D. A interpretação correspondente para a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$, onde $f(x, y, z) \geqslant 0$, não é muito útil, porque seria um "hipervolume" de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o *domínio* da função f; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Apesar disso, a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações físicas, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e $f(x, y, z)$.

Vamos começar com o caso especial onde $f(x, y, z) = 1$ para todos os pontos em E. Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E:

12 $$\boxed{V(E) = \iiint_E dV}$$

Por exemplo, você pode ver isso no caso de uma região do tipo 1 colocando $f(x, y, z) = 1$ na Fórmula 6:

$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz\right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\, dA$$

e, da Seção 15.3, sabemos que isso representa o volume que está entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$.

EXEMPLO 5 Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy são mostrados nas Figuras 14 e 15. O limite inferior de T é o plano $z = 0$ e o limite superior é o plano $x + 2y + z = 2$, isto é, $z = 2 - x - 2y$.

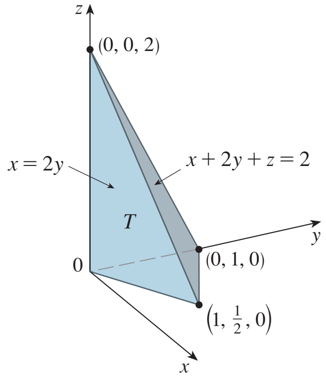


FIGURA 14

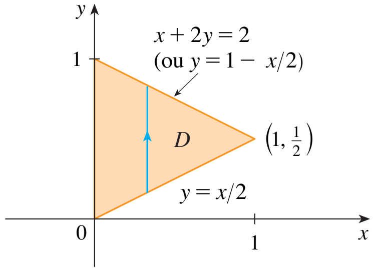


FIGURA 15

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx = \tfrac{1}{3}$$

pelo mesmo cálculo usado no Exemplo 4 da Seção 15.3.

(Observe que não é necessário usar as integrais triplas para calcular volumes. As integrais triplas simplesmente fornecem um método alternativo para descrever os cálculos.) ▬

Todas as aplicações de integrais duplas da Seção 15.5 podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z), então sua **massa** é

$$\boxed{13} \qquad m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

e seus **momentos** em relação aos três planos coordenados são

$$\boxed{14} \qquad M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\boxed{15} \qquad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centroide** de E. Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$\boxed{16} \qquad I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

Como na Seção 15.5, a carga **elétrica total** sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\, dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X, Y e Z, sua **função densidade conjunta** é uma função das três variáveis, de forma que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

Em particular,

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d,\ r \leqslant Z \leqslant s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = 1$$

EXEMPLO 6 Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$.

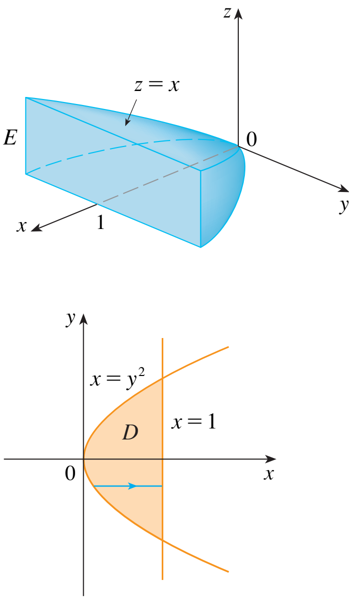


FIGURA 16

SOLUÇÃO O sólido E e sua projeção sobre o plano xy são mostrados nas Figuras 16. As superfícies inferior e superior de E são os planos $z = 0$ e $z = x$, então, descrevemos E como uma região do tipo I:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x\}$$

Então, se a densidade é $\rho(x, y, z) = \rho$, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x \rho\, dz\, dx\, dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x\, dx\, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} (1 - y^4)\, dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4)\, dy \\ &= \rho\left[y - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

Por causa da simetria de E e ρ em relação ao plano xz, podemos dizer imediatamente que $M_{xz} = 0$ e, portanto, $\bar{y} = 0$. Os outros momentos são

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x x\rho\, dz\, dx\, dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{3}\left[y - \frac{y^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_E z\rho\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z\rho\, dz\, dx\, dy$$

$$= \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x} dx\, dy = \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy$$

$$= \frac{\rho}{3}\int_{0}^{1}(1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{7}$$

Logo, o centro de massa é

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14}\right)$$

15.7 Exercícios

1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a y, depois z e então x.

2. Calcule a integral $\iiint_E (xz - y^3)\, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3–8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\, dx\, dy\, dz$

4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{y} 2xyz\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} xe^{-y}\, dy\, dx\, dz$

6. $\int_0^1 \int_0^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1}\, dx\, dz\, dy$

7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \int_0^{x} \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$

8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx$

9–18 Calcule a integral tripla.

9. $\iiint_E 2x\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$

10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant xy\}$

11. $\iiint_E \frac{z}{x^2 + z^2}\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant y \leqslant 4, y \leqslant z \leqslant 4, 0 \leqslant x \leqslant z\}$

12. $\iiint_E \operatorname{sen} y\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = x$ e acima da região triangular com vértices $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$ e $(0, \pi, 0)$

13. $\iiint_E 6xy\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

14. $\iiint_E xy\, dV$, onde E é limitado pelos cilindros parabólicos $y = x^2$ e $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$

15. $\iiint_T x^2\, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

16. $\iiint_T xyz\, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$

17. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

18. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

19–22 Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

19. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$

20. O sólido limitado pelos paraboloides $y = x^2 + z^2$ e $y = 8 - x^2 - z^2$

21. O sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$

22. O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $y = -1$ e $y + z = 4$

23. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortada do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.

SCA (b) Utilize a Tabela de Integrais (nas *Páginas de Referência 6-11*) ou um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

24. (a) Na **Regra do Ponto Médio para as Integrais Triplas**, usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla em uma caixa B, onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k)$ da caixa B_{ijk}. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 4$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão para o número inteiro mais próximo. Compare com sua resposta para a parte (a).

25–26 Use a Regra do Ponto Médio para as integrais triplas (Exercício 24) para estimar o valor da integral. Divida B em oito subcaixas de igual tamanho.

25. $\iiint_B \cos(xyz)\, dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

26. $\iiint_B \sqrt{x}\, e^{xyz}\, dV$, onde
$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$

27–28 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com SCA É necessáriou usar um sistema de computação algébrica

29–32 Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - 4z^2, \quad y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9, \quad x = -2, \quad x = 2$

31. $y = x^2, \quad z = 0, \quad y + 2z = 4$

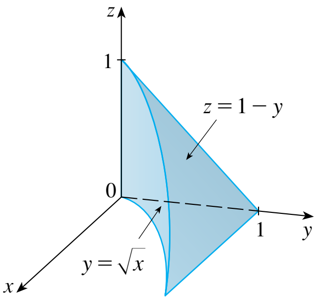
32. $x = 2, \quad y = 2, \quad z = 0, \quad x + y - 2z = 2$

---

33. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

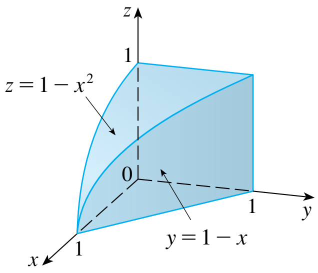
Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



34. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



35–36 Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

37–38 Calcule a integral tripla usando apenas interpretação geométrica e simetria.

37. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2)\, dV$, onde C é a região cilíndrica $x^2 + y^2 \leqslant 4, -2 \leqslant z \leqslant 2$

38. $\iiint_B (z^2 + \operatorname{sen} y + 3)\, dV$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

39–42 Determine a massa e o centro de massa do sólido dado E com função densidade dada ρ.

39. E é o sólido do Exercício 13; $\rho(x, y, z) = 2$

40. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e os planos $x + z = 1, x = 0$ e $z = 0$; $\quad \rho(x, y, z) = 4$

41. E é o cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

42. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$; $\quad \rho(x, y, z) = y$

43–46 Suponha que o sólido tenha densidade constante k.

43. Encontre os momentos de inércia para um cubo com comprimento de lado L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

44. Encontre os momentos de inércia de um tijolo retangular com dimensões a, b e c e massa M se o centro do tijolo está localizado na origem e as arestas são paralelas aos eixos coordenados.

45. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h$.

46. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cone sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$.

47–48 Escreva, mas não calcule, as expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z.

47. O sólido do Exercício 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

48. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

---

49. SCA Seja E o sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema de computação algébrica para determinar os valores exatos das seguintes quantidades para E.

(a) A massa

(b) O centro de massa

(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

50. SCA Se E é o sólido do Exercício 18 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três casas decimais.

(a) A massa

(b) O centro de massa

(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

51. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X, Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2$ e $f(x, y, z) = 0$, caso contrário.

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

52. Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0{,}5x + 0{,}2y + 0{,}1z)}$ se $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$ e $f(x, y, z) = 0$, caso contrário.

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.

(c) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

53–54 O **valor médio** de uma função $f(x, y, z)$ em uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E. Por exemplo, se ρ é a função densidade, então ρ_{med} é a densidade média de E.

53. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ no cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante, com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados.

54. Encontre o valor médio da função $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ na região limitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

55. (a) Determine a região E para a qual a integral tripla

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

é máxima.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para calcular o valor máximo exato da integral tripla na parte (a)

PROJETO DE DESCOBERTA VOLUMES DE HIPERESFERAS

Neste projeto, determinaremos as fórmulas para o volume limitado por uma hiperesfera em um espaço n-dimensional.

1. Utilize uma integral dupla e substituições trigonométricas, juntamente com a Fórmula 64 da Tabela de Integrais, para determinar a área do círculo de raio r.
2. Use uma integral tripla e substituições trigonométricas para determinar o volume da esfera de raio r.
3. Utilize uma integral quádrupla para determinar o hipervolume limitado pela hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ em $\mathbb{R}^4$. (Use somente substituição trigonométrica e fórmulas de redução para $\int \text{sen}^n x\, dx$ ou $\int \cos^n x\, dx$.)
4. Use uma integral n-upla para determinar o volume limitado por uma hiperesfera de raio r no espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão:* As fórmulas são diferentes para n par e n ímpar.]

15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Em geometria plana, o sistema de coordenadas polares é usado para dar uma descrição conveniente de certas curvas e regiões. (Veja a Seção 10.3.) A Figura 1 nos permite relembrar a ligação entre coordenadas polares e cartesianas. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir da figura,

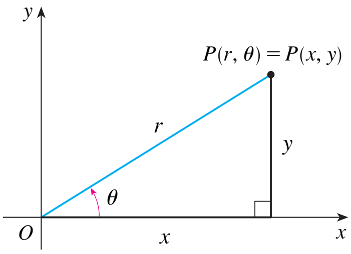


FIGURA 1

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Em três dimensões, há um sistema de coordenadas, chamado *coordenadas cilíndricas*, que é análogo às coordenadas polares e dá descrições convenientes de algumas superfícies e sólidos que ocorrem usualmente. Como veremos, algumas integrais triplas são muito mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas.

Coordenadas Cilíndricas

No **sistema de coordenadas cilíndricas**, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P. (Veja a Figura 2.)

Para convertermos de coordenadas cilíndricas para retangulares, usamos as equações

1 $$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z}$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

2 $$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z}$$

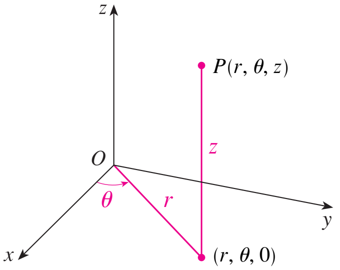


FIGURA 2
As coordenadas cilíndricas de um ponto *P*

EXEMPLO 1
(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.
(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUÇÃO
(a) O ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está marcado na Figura 3. Das Equações 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

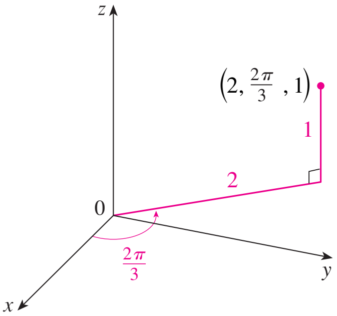


FIGURA 3

Logo, o ponto é $(-1, \sqrt{3}, 1)$ em coordenadas retangulares.
(b) Das Equações 2 temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{logo} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Outro é $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Como no caso das coordenadas polares, existem infinitas escolhas.

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo *z* é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo *z*. Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. (Veja a Figura 4.) Esta é a razão para o nome coordenadas "cilíndricas".

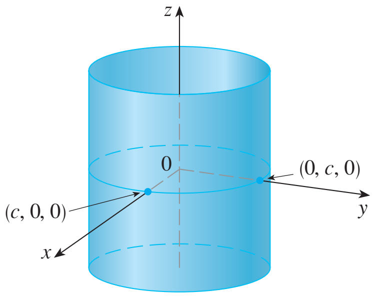


FIGURA 4
$r = c$, um cilindro

EXEMPLO 2 Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

SOLUÇÃO A equação diz que o valor *z*, ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que *r*, a distância do ponto ao eixo *z*. Como θ não aparece, ele pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $z = k$ $(k > 0)$ é um círculo de raio *k*. Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada convertendo a equação para coordenadas retangulares. Da primeira equação em $\boxed{2}$, temos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconhecemos a equação $z^2 = x^2 + y^2$ (pela comparação com a Tabela 1 na Seção 12.6) como o cone circular cujo eixo é o eixo *z*. (Veja a Figura 5.)

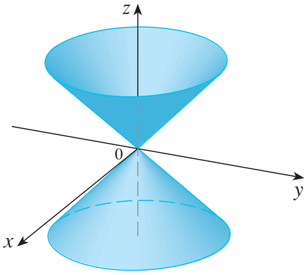


FIGURA 5
$z = r$, um cone

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Suponha que *E* seja uma região do tipo 1, cuja projeção *D* no plano *xy* tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 6). Em particular, suponha que *f* seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

onde D é dado em coordenadas polares por

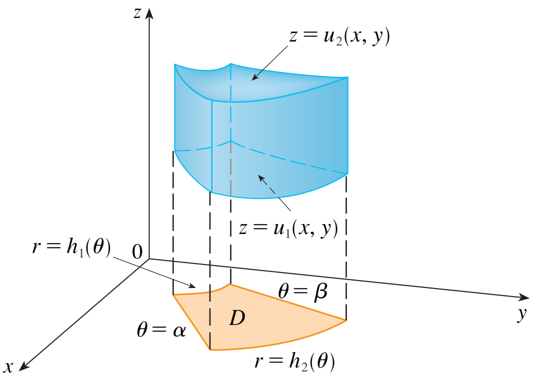


FIGURA 6

Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\boxed{3} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 3 com a Equação 15.4.3, obtemos

$$\boxed{4} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

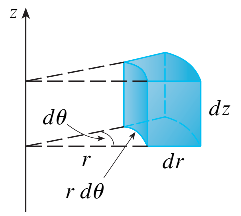


FIGURA 7
Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

A Fórmula 4 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z, r e θ, e trocando dV por $r\,dz\,dr\,d\theta$. (A Figura 7 mostra como lembrar disto.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E for uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas e, especialmente, quando a função $f(x, y, z)$ envolver a expressão $x^2 + y^2$.

EXEMPLO 3 Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Veja a Figura 8.) A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

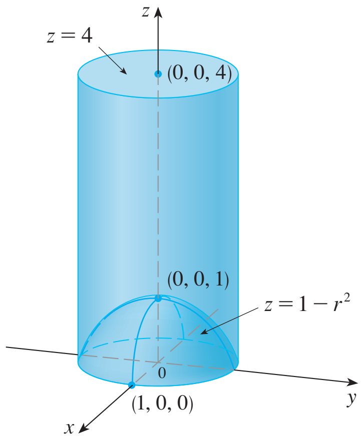


FIGURA 8

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 - r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z, a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta \\ &= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2},\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. (Veja a Figura 9.) Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

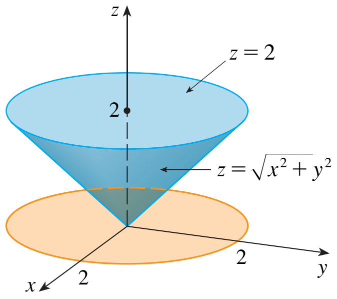


FIGURA 9

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx &= \iiint_E (x^2 + y^2)\,dV\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\,dz\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2 - r)\,dr\\ &= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi\end{aligned}$$

15.8 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$

4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$ **6.** $r = 5$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$ **8.** $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leqslant r \leqslant 2,\quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad 0 \leqslant z \leqslant 1$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$ **16.** $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^r r\,dz\,d\theta\,dr$

17–28 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\,dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

18. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

19. Calcule $\iiint_E (x + y + z)\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Calcule $\iiint_E x\,dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

21. Calcule $\iiint_E x^2\,dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. Determine o volume do sólido que é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

24. Determine o volume do sólido que está entre o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

25. (a) Encontre o volume da região E limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

(b) Encontre o centroide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).

26. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a\cos\theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.

(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

27. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$, se S tem densidade constante K.

28. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z.

29-30 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dz\,dx\,dy$

30. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

31. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho necessária para erguer uma montanha a partir do nível do mar. Considere uma montanha que tenha essencialmente o formato de um cone circular reto. Suponha que a densidade do material na vizinhança de um ponto P seja $g(P)$ e a altura seja $h(P)$.

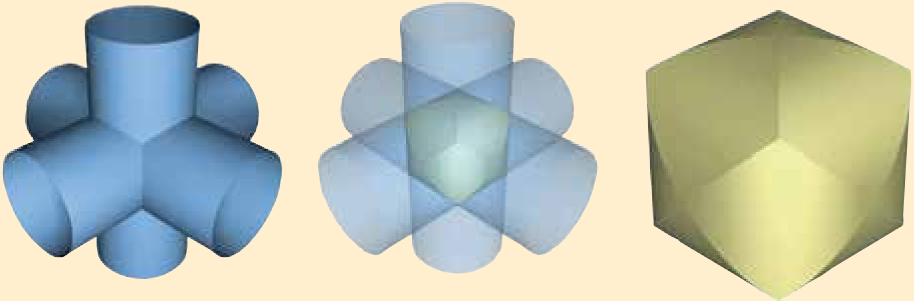
(a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.

(b) Assuma que o monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 19 000 m, altura de 3 800 m e densidade constante de 3 200 kg/m³. Quanto trabalho foi feito para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?

S.R. Lee Photo Travaller/Shutterstock

PROJETO DE LABORATÓRIO A INTERSECÇÃO DE TRÊS CILINDROS

A figura mostra o sólido limitado por três cilindros circulares de mesmo diâmetro que se interceptam em ângulos retos. Neste projeto, vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



1. Esboce cuidadosamente o sólido limitado pelos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique as posições dos eixos coordenados e rotule as faces com as equações dos cilindros correspondentes.
2. Determine o volume do sólido do Problema 1.
3. SCA Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar as arestas do sólido.
4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
5. Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, escreva, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Outro sistema de coordenadas tridimensionais útil é o *sistema de coordenadas esféricas*. Ele simplifica o cálculo de integrais triplas em regiões limitadas por esferas ou cones.

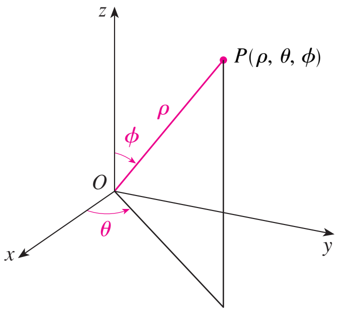


FIGURA 1
As coordenadas esféricas de um ponto

Coordenadas Esféricas

As **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no espaço são mostradas na Figura 1, onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P, θ é o mesmo ângulo que nas coordenadas cilíndricas e ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP. Observe que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto. Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 2) – essa é a razão do nome "coordenadas esféricas". O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 3) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja a Figura 4).

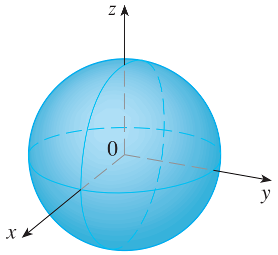


FIGURA 2 $\rho = c$, uma esfera

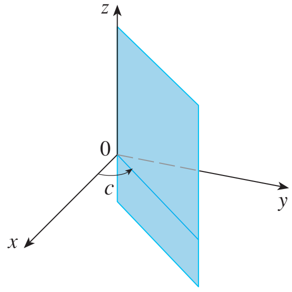
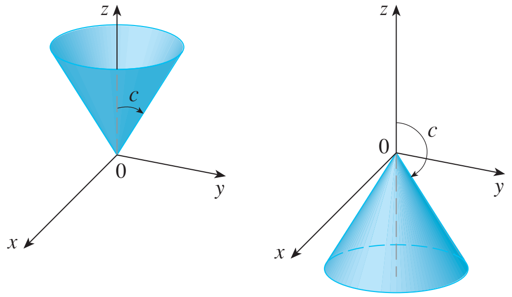


FIGURA 3 $\theta = c$, um semiplano



$0 < c < \pi/2$ $\qquad$ $\pi/2 < c < \pi$

FIGURA 4 $\phi = c$, um cone

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5. Dos triângulos OPQ e OPP', temos

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

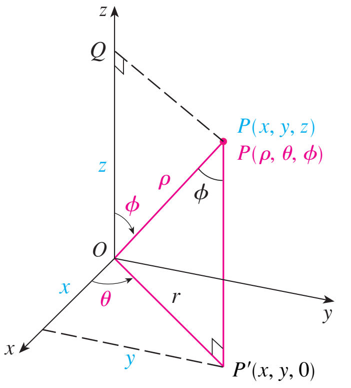


FIGURA 5

1 $$\boxed{x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi}$$

Além disso, a fórmula da distância mostra que

2 $$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

Usamos essa equação para converter de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

EXEMPLO 1 O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas. Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares.

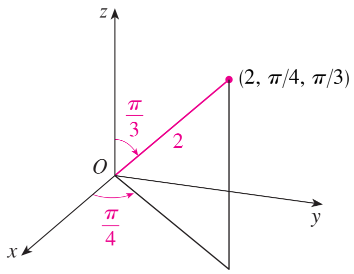


FIGURA 6

SOLUÇÃO Marcamos o ponto na Figura 6. Das Equações 1, temos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \ \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos\phi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Logo, o ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ em coordenadas retangulares.

EXEMPLO 2 O ponto $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ está dado em coordenadas retangulares. Encontre coordenadas esféricas para este ponto.

ATENÇÃO Não existe uma convenção universal na notação de coordenadas esféricas. A maioria dos livros de física troca os significados de θ e ϕ e usa r no lugar de ρ.

SOLUÇÃO Da Equação 2, temos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

e, assim, as Equações 1 fornecem

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

TEC Em *Module 15.9* você pode investigar famílias de superfícies em coordenadas cilíndricas e esféricas.

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Portanto, as coordenadas esféricas do ponto dado são $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Neste sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\right\}$$

onde $a \geqslant 0$, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ e $d - c \leqslant \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$. A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i \Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i, e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \operatorname{sen}\phi_k \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \operatorname{sen}\phi_k$, e ângulo $\Delta\theta$). Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

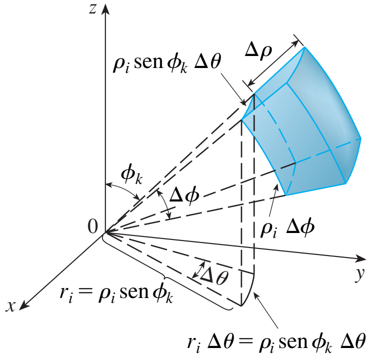

z
$\rho_i \operatorname{sen}\phi_k \Delta\theta$
$\Delta\rho$
ϕ_k
$\Delta\phi$
0
$\rho_i \Delta\phi$
y
x
$\Delta\theta$
$r_i = \rho_i \operatorname{sen}\phi_k$
$r_i \Delta\theta = \rho_i \operatorname{sen}\phi_k \Delta\theta$

FIGURA 7

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k \Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio (Exercício 47), que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

onde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ é algum ponto em E_{ijk}. Sejam $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares desse ponto. Então

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \operatorname{sen}\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k)\, \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

Mas essa é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Consequentemente, chegamos à seguinte **fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas**.

$$\boxed{3} \quad \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\; d\theta\; d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\; \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\; c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

utilizando os limites de integração apropriados e substituindo dV por $\rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi$. Isso é ilustrado na Figura 8.

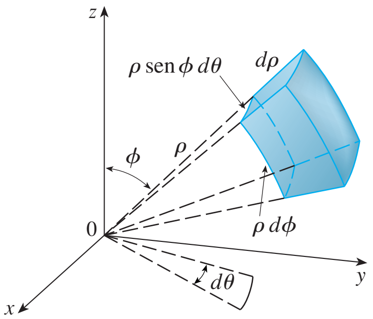


FIGURA 8

Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\; c \leqslant \phi \leqslant d,\; g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que $\boxed{3}$, exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta, \phi)$ e $g_2(\theta, \phi)$.

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam o limite da região de integração.

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

SOLUÇÃO Como o limite de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\; 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}$$

Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Portanto, $\boxed{3}$ fornece

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$$

$$= \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}(2\pi)\left[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e-1)$$

OBSERVAÇÃO Seria extremamente complicado calcular a integral do Exemplo 3 sem coordenadas esféricas. Com coordenadas retangulares, a integral iterada seria

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$$

EXEMPLO 4 Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Veja a Figura 9.)

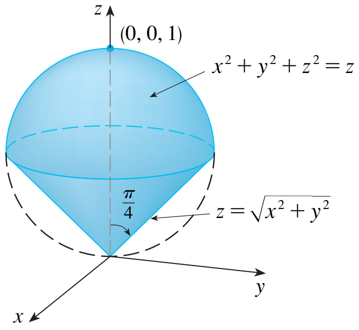


FIGURA 9

SOLUÇÃO Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho\cos\phi \qquad \text{ou} \qquad \rho = \cos\phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen}\phi$$

Isto resulta em $\operatorname{sen}\phi = \cos\phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto, a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, \ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi\}$$

A Figura 11 mostra como E é apagado se integramos primeiro em relação a ρ, depois em relação a ϕ, e então em relação a θ. O volume de E é

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \, \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

A Figura 10 mostra uma visão (desta vez, utilizando o MAPLE) do sólido do Exemplo 4.

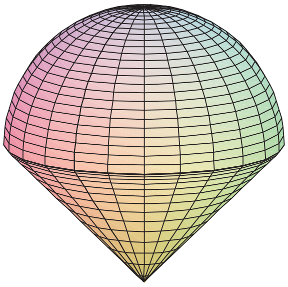


FIGURA 10

TEC *Visual 15.9* mostra uma animação da Figura 11.

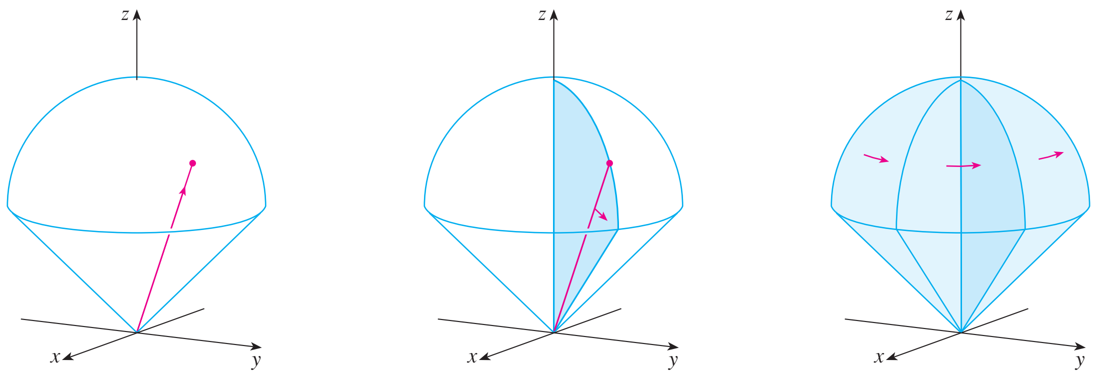


FIGURA 11

ρ varia de 0 a $\cos\phi$, enquanto ϕ e θ são constantes.

ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante.

θ varia de 0 a 2π.

15.9 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(0, -2, 0)$ (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$

4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

8. $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

9–10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$

10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

11–14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $2 \leqslant \rho \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

13. $\rho \leqslant 1, \quad 3\pi/4 \leqslant \phi \leqslant \pi$

14. $\rho \leqslant 2, \quad \rho \leqslant \operatorname{cossec}\phi$

15. Um sólido está cima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

16. (a) Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas.

(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.

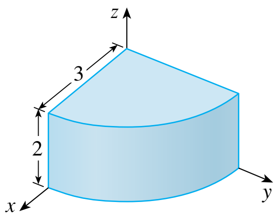
17–18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$

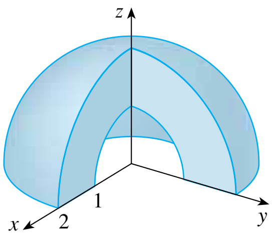
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$

19–20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

19.



20.



21–34 Utilize coordenadas esféricas.

21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

23. Calcule $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

24. Calcule $\iiint_E y^2 \, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

25. Calcule $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2} \, dV$, onde E é a porção da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro octante.

26. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leqslant a$ a que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. (a) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4\cos\phi$.

(b) Encontre o centroide do sólido na parte (a).

30. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. (a) Encontre o centroide do sólido no Exemplo 4.

(b) Encontre o momento de inércia em torno do eixo z para este sólido.

32. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.

(a) Determine a massa de H.

(b) Determine o centro de massa de H.

(c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.

33. (a) Determine o centroide do hemisfério sólido homogêneo de raio a.

(b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação a um diâmetro de sua base.

34. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

35–38 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

35. Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

SCA **37.** Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja as Páginas de Referência 6–11) ou um sistema de computação algébrica para calcular a integral.

SCA **38.** (a) Determine o volume limitado pelo toro $\rho = \text{sen}\,\phi$.

(b) Utilize um computador para desenhar o toro.

39–41 Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

41. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}} \int_{-\sqrt{4^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dz\,dx\,dy$

---

42. Um modelo para a densidade δ da atmosfera terrestre próxima à superfície é

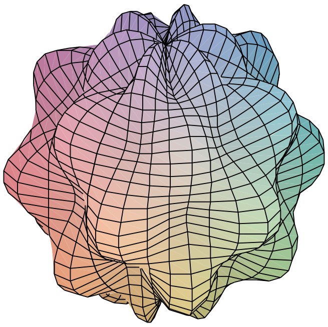
$$\delta = 619{,}09 - 0{,}000097\rho$$

onde ρ (a distância do centro da Terra) é medido em metros e δ é medido em quilogramas por metro cúbico. Se tomarmos a superfície da Terra como uma esfera com raio de 6 370 km, então, este modelo é razoável para $6\,370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6\,375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar a massa da atmosfera entre o solo e uma altitude de 5 km.

43. Use uma ferramenta gráfica para desenhar um silo que consista em um cilindro de raio 3 e altura 10 com um hemisfério no topo.

44. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas com as coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como a seguir. Tomamos a origem como o centro da Terra e o eixo z passando pelo polo norte. O eixo x positivo passa pelo ponto onde o meridiano principal (o meridiano por Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Então a latitude de P é $\alpha = 90° - \phi°$ e a longitude é $\beta = 360° - \theta°$. Encontre a distância sobre um círculo máximo de Los Angeles (lat. 34,06º N, long. 118,25º W) a Montreal (lat. 45,50º N, long. 73,60º W). Tome o raio da Terra como 6 370 km. (Um *círculo máximo* é o círculo de intersecção de uma esfera com um plano que passe pelo centro da esfera.)

SCA **45.** As superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,m\theta\,\text{sen}\,n\phi$ têm sido usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



46. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

47. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r\cot\phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

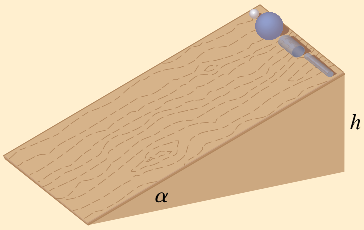
(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2\,\text{sen}\,\tilde{\phi}\;\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROJETO APLICADO

CORRIDA NA RAMPA



Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de *squash*), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolem em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará embaixo mais depressa? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão, consideramos a bola ou o cilindro com massa m, raio r e momento de inércia I (em relação ao eixo de rotação). Se a queda vertical for h, a energia potencial no topo será mgh. Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular ω, de modo que $v = \omega r$. A energia cinética na base da rampa é composta por duas partes: $\frac{1}{2}mv^2$ da translação (movimento de descida da rampa) e $\frac{1}{2}I\omega^2$ da rotação. Se supusermos que a perda de energia por atrito na descida é desprezível, então a lei de conservação de energia nos dá

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

1. Mostre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \qquad \text{onde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Se $y(t)$ é a distância vertical percorrida até o instante t, então o mesmo raciocínio utilizado no Problema 1 mostra que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ em qualquer instante t. Utilize esse resultado para mostrar que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}}\,(\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{y}$$

onde α é o ângulo de inclinação da rampa.

3. Resolvendo a equação diferencial do Problema 2, mostre que o tempo total de percurso é

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g\,\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Isso mostra que o objeto com menor valor de I^* ganha a corrida.

4. Mostre que $I^* = \frac{1}{2}$ para o cilindro sólido e $I^* = 1$ para o cilindro oco.

5. Calcule I^* para a bola parcialmente oca com raio interior a e raio externo r. Expresse sua resposta em termos do coeficiente $b = a/r$. O que acontece quando $a \to 0$ e quando $a \to r$?

6. Mostre que $I^* = \frac{2}{5}$ para a bola sólida e $I^* = \frac{2}{3}$ para a bola oca. Assim, os objetos terminam a corrida na seguinte ordem: bola sólida, cilindro sólido, bola oca, cilindro oco.

15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em cálculo unidimensional, frequentemente usamos uma mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de x e u, podemos escrever a Regra da Substituição (5.5.6, no Volume I) como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du \tag{1}$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$. Outro modo de escrever a Fórmula 1 é o seguinte:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du \tag{2}$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para coordenadas polares. As novas variáveis r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis (15.4.2) pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy.

De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

$$\boxed{3} \qquad x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Em geral, consideramos T uma ***transformação C^1***, o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Se $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, então o ponto (x_1, y_1) é denominado **imagem** do ponto (u_1, v_1). Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é **injetora**. A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação T em uma região S do plano uv. T transforma S em uma região R no plano xy denominada **imagem de S**, constituída das imagens de todos os pontos de S.

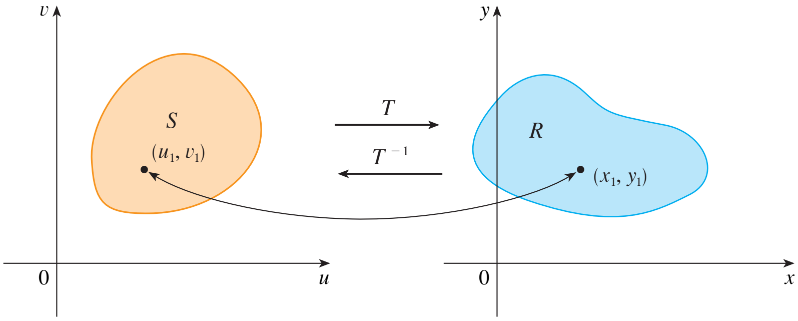


FIGURA 1

Se T é injetora, então existe uma **transformação inversa** T^{-1} do plano xy para o plano uv e pode ser possível inverter as Equações 3 para escrever u e v em termos de x e y:

$$u = G(x, y) \qquad v = H(x, y)$$

EXEMPLO 1 Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$.

SOLUÇÃO A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S. O primeiro lado, S_1, é dado por $v = 0$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$. (Veja a Figura 2.) Das equações dadas, temos $x = u^2$, $y = 0$ e, então, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Então, S_1 é levado no segmento de reta que liga (0, 0) a (1, 0) no plano xy. O segundo lado, S_2, é $u = 1$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$ e, colocando $u = 1$ nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

Eliminando v, obtemos

$$\boxed{4} \qquad x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

que é parte de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dado por $v = 1$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, cuja imagem é o arco parabólico

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0 \tag{5}$$

Finalmente, S_4 é dado por $u = 0$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$, cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja, $-1 \leqslant x \leqslant 0$. (Observe que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário.) A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas pelas Equações 4 e 5.

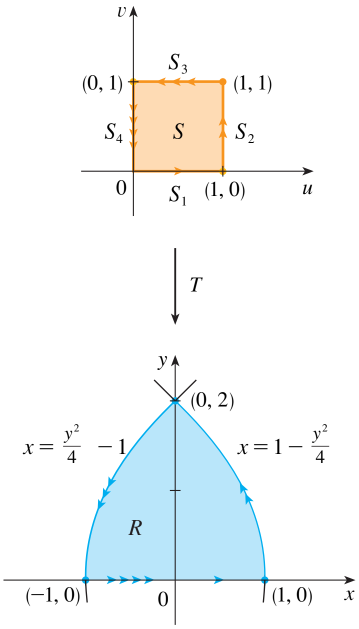


FIGURA 2

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Comecemos com um retângulo pequeno S no plano uv cujo canto inferior esquerdo é o ponto (u_0, v_0) e cujas dimensões são Δu e Δv. (Veja a Figura 3.)

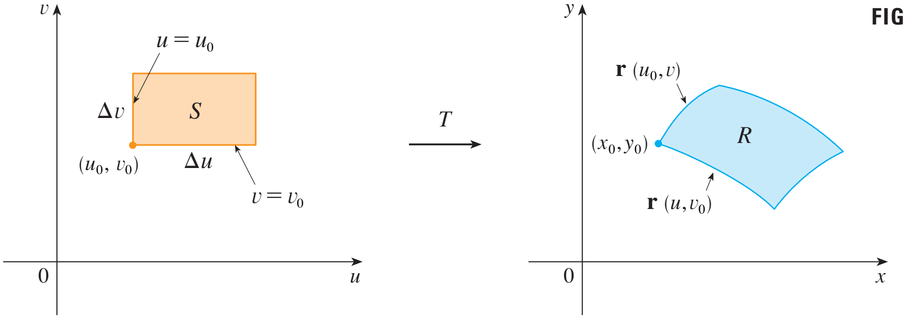


FIGURA 3

A imagem de S é a região R do plano xy, sendo que um dos pontos do limite é $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. O vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\,\mathbf{i} + h(u, v)\,\mathbf{j}$$

é o vetor posição da imagem do ponto (u, v). A equação do lado inferior de S é $v = v_0$, cuja curva imagem é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

Da mesma forma, o vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem do lado esquerdo de S é (a saber, $u = u_0$) é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

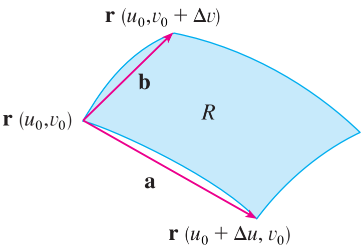
$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados na Figura 4. Mas

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

e assim

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u\,\mathbf{r}_u$$



$\mathbf{r}\,(u_0, v_0 + \Delta v)$
b
R
$\mathbf{r}\,(u_0, v_0)$
a
$\mathbf{r}\,(u_0 + \Delta u, v_0)$

FIGURA 4

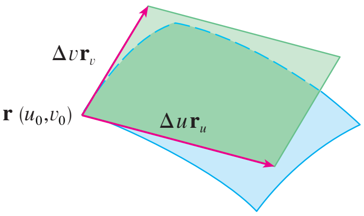


FIGURA 5

O jacobiano recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Apesar de o matemático francês Cauchy ter sido o primeiro a usar estes determinantes especiais, envolvendo derivadas parciais, Jacobi usou-os para desenvolver um método para cálculo de integrais múltiplas.

Da mesma forma $\qquad \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v\, \mathbf{r}_v$

Isso significa que podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ e $\Delta v\, \mathbf{r}_v$. (Veja a Figura 5.) Portanto, podemos aproximar a área de R pela área desse paralelogramo, que, da Seção 12.4, é

$$\boxed{6} \qquad \left|(\Delta u\, \mathbf{r}_u) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v)\right| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v$$

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial:

$\boxed{7}$ **Definição** O **jacobiano** da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Com essa notação, podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área ΔA de R:

$$\boxed{8} \qquad \Delta A \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\, \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_0, v_0).

Em seguida, dividimos a região S do plano uv em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij}. (Veja a Figura 6.)

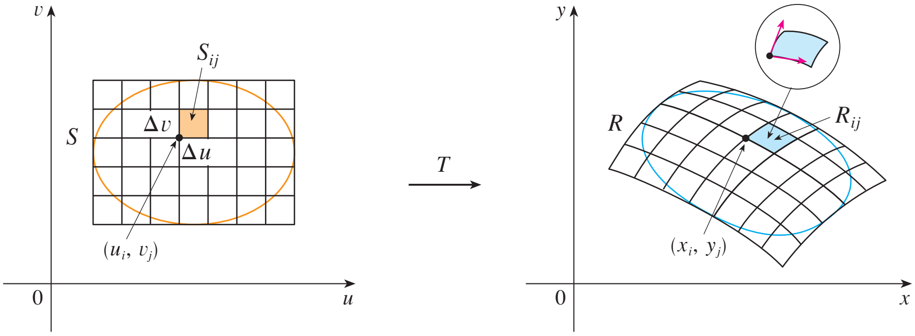


FIGURA 6

Aplicando a aproximação $\boxed{8}$ a cada R_{ij}, aproximamos a integral dupla de f sobre R, como segue:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\big(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)\big) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\, \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j). Observe que a soma dupla é a soma de Riemann para a integral

$$\iint_S f\big(g(u, v), h(u, v)\big) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

A argumentação precedente sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro. (Uma demonstração completa é dada em livros de cálculo avançado.)

$\boxed{9}$ **Mudança de Variáveis em uma Integral Dupla** Suponha que T seja uma transformação C^1 cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy. Suponha que f seja contínua sobre R e que R e S sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de fronteira de S. Então,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Observe a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du, temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial deste. Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \qquad y = h(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$$

e a geometria da transformação é mostrada na Figura 7. T transforma um retângulo comum do plano $r\theta$ em um retângulo polar do plano xy. O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2\theta + r \operatorname{sen}^2\theta = r > 0$$

Assim, o Teorema 9 fornece

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

que é o mesmo que a Fórmula 15.4.2

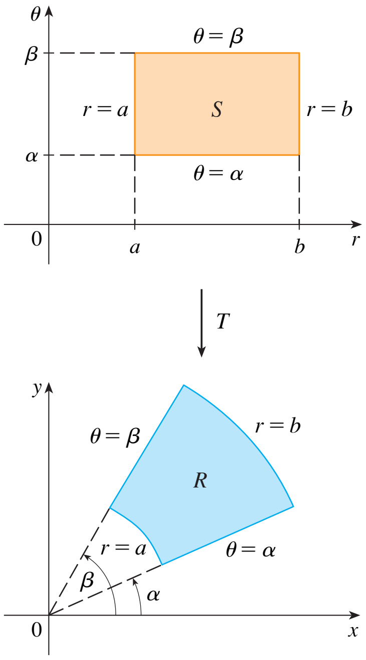


FIGURA 7
Transformação para as coordenadas polares

EXEMPLO 2 Utilize a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y\, dA$, onde R é a região limitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geqslant 0$.

SOLUÇÃO A região R está mostrada na Figura 2, (na página 935). No Exemplo 1, descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R. Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Portanto, pelo Teorema 9,

$$\iint_R y\, dA = \iint_S 2uv \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

$$= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3v + uv^3)\, du\, dv = 8 \int_0^1 \left[\tfrac{1}{4}u^4v + \tfrac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v + 4v^3)\, dv = \left[v^2 + v^4\right]_0^1 = 2$$

OBSERVAÇÃO O Exemplo 2 não foi um problema muito difícil de resolver porque já conhecíamos uma mudança de variáveis apropriada. Se não a conhecêssemos de antemão, então o primeiro passo seria descobrir uma mudança de variáveis apropriada. Se $f(x, y)$ for difícil de integrar, então a forma de $f(x, y)$ pode sugerir uma transformação. Se a região de integração R é complicada, então a transformação deve ser escolhida para que a região S correspondente no plano uv tenha uma descrição mais conveniente.

EXEMPLO 3 Calcule a integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ e $(0, -1)$.

SOLUÇÃO Como não é fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, vamos fazer a mudança de variáveis sugerida pela forma da função:

10 $$u = x + y \qquad v = x - y$$

Essas equações definem a transformação T^{-1} do plano xy para o plano uv. O Teorema 9 diz respeito à transformação T do plano uv para o plano xy. Esta é obtida isolando-se x e y nas Equações 10 de x e y:

11 $$x = \tfrac{1}{2}(u + v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u - v)$$

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}$$

Para determinarmos a região S do plano uv correspondente a R, observamos que os lados de R estão sobre as retas

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

e, das Equações 10 ou 11, as retas imagem do plano uv são

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$$

Então, a região S é a região trapezoidal com vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ e $(-1, 1)$ mostrada na Figura 8. Como

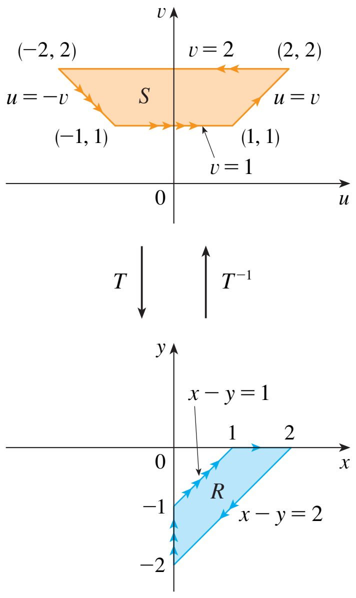


FIGURA 8

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}$$

o Teorema 9 leva a

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\, dv = \tfrac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_1^2 (e - e^{-1}) v\, dv = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1})$$

Integrais Triplas

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja *T* a transformação que leva uma região *S* no espaço *uvw* para uma região *R* no espaço *xyz* por meio das equações

$$x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$$

O **jacobiano** de *T* é o seguinte determinante 3 × 3:

$$\boxed{12} \qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sob hipóteses semelhantes àquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

$$\boxed{13} \qquad \iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

EXEMPLO 4 Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\phi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta & \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho \operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\phi \cos\theta \\ \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta & \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \left(-\rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \operatorname{sen}^2\theta - \rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \cos^2\theta\right)$$

$$- \rho \operatorname{sen}\phi \left(\rho \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$= -\rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi - \rho^2 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}^2\phi = -\rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Visto que $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, temos sen $\phi \geqslant 0$. Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \left| -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

que é equivalente à Fórmula 15.9.3.

15.10 Exercícios

1–6 Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = 5u - v, \quad y = u + 3v$

2. $x = uv, \quad y = u/v$

3. $x = e^{-r} \operatorname{sen} \theta, \quad y = e^{r} \cos \theta$

4. $x = e^{s+t}, \quad y = e^{s-t}$

5. $x = u/v, \quad y = v/w, \quad z = w/u$

6. $x = v + w^2, \quad y = w + u^2, \quad z = u + v^2$

7–10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$;
$x = 2u + 3v, \ y = u - v$

8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$;
$x = v, \ y = u(1 + v^2)$

9. S é a região triangular com vértices (0, 0), (1, 1), (0, 1); $x = u^2$,
$y = v$

10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $x = au, \ y = bv$

11–14 Uma região R no plano xy é dada. Determine equações para a transformação T que mapeia uma região retangular S no plano uv sobre R, onde os lados de S são paralelos aos eixos u e v.

11. R é limitado por $y = 2x - 1, y = 2x + 1, y = 1 - x, y = 3 - x$

12. R é o paralelogramo com vértices (0, 0), (4, 3), (2, 4), $(-2, 1)$

13. R está entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$ no primeiro quadrante

14. R é ligado pelas hipérboles $y = 1/x$, $y = 4/x$ e pelas retas $y = x$, $y = 4x$ no primeiro quadrante

15–20 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

15. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, onde R á a região triangular com vértices (0, 0), (2, 1) e (1, 2); $x = 2u + v, \ y = u + 2v$

16. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, onde R é o paralelogramo com vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ e $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u - v)$, $y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

17. $\iint_R x^2\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u, \ y = 3v$

18. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}\, u - \sqrt{2/3}\, v, \ y = \sqrt{2}\, u + \sqrt{2/3}\, v$

19. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e as hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v, \ y = v$

20. $\iint_R y^2\, dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy, \ v = xy^2$. Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R.

21. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido limitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv, \ z = cw$.
(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6\,378$ km e $c = 6\,356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.
(c) Se o sólido do item (a) tiver densidade constante k, encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z.

22. Um problema importante na termodinâmica é determinar o trabalho realizado por um motor de Carnot ideal. Um ciclo consiste na expansão alternada e compressão de gás em um pistão. O trabalho realizado pelo motor é igual à área da região R limitada por duas curvas isotérmicas $xy = a$, $xy = b$ e duas curvas adiabáticas $xy^{1{,}4} = c$, $xy^{1{,}4} = d$, onde $0 < a < b$ e $0 < c < d$. Calcule o trabalho realizado determinando a área de R.

23–27 Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

23. $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ e $3x - y = 8$

24. $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dA$, onde R é o retângulo limitado pelas retas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$ e $x + y = 3$

25. $\displaystyle\iint\limits_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, onde R á a região trapezoidal com vértices (1, 0), (2, 0), (0, 2) e (0, 1)

26. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

27. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leqslant 1$

28. Seja f uma função contínua em [0, 1] e seja R a região triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 1). Mostre que

$$\iint\limits_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du$$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

8 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Suponha que f seja uma função contínua definida sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

(a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Se $f(x, y) \geqslant 0$, o que representa a soma?

(b) Escreva a definição de $\iint_R f(x, y)\, dA$ como um limite.

(c) Qual é a interpretação geométrica de $\iint_R f(x, y)\, dA$ se $f(x, y) \geqslant 0$? E se f tiver valores positivos e valores negativos?

(d) Como calcular $\iint_R f(x, y)\, dA$?

(e) O que a Regra do Ponto Médio para integrais duplas diz?

(f) Escreva uma expressão para o valor médio de f.

2. (a) Como você define $\iint_D f(x, y)\, dA$ se D é uma região limitada que não é retangular?

(b) O que é uma região do tipo I? Como calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$ se D for uma região do tipo I?

(c) O que é uma região do tipo II? Como calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$ se D for uma região do tipo II?

(d) Quais as propriedades de uma integral dupla?

3. Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral dupla em coordenadas polares? Por que você faria isso?

4. Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade $\rho(x, y)$, escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.

(a) A massa

(b) Os momentos em relação aos eixos

(c) O centro de massa

(d) Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem

5. Seja f uma função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y.

(a) Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d.

(b) Que propriedades f possui?

(c) Quais são os valores esperados de X e Y?

6. Escreva uma expressão para a área de uma superfície $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

7. (a) Escreva a definição da integral tripla de f sobre uma caixa retangular B.

(b) Como calcular $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?

(c) Como definir $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?

(d) O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região deste tipo?

(e) O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região deste tipo?

(f) O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ se E for uma região deste tipo?

8. Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade $\rho(x, y, z)$. Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.

(a) A massa

(b) Os momentos em relação aos planos coordenados

(c) As coordenadas do centro de massa

(d) Os momentos de inércia em relação aos eixos

9. (a) Como, em uma integral tripla, mudar de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas?

(b) Como, em uma integral tripla, mudar de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas?

(c) Em que situações você deve mudar para coordenadas cilíndricas ou esféricas?

10. (a) Se uma transformação T é dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, qual é o jacobiano de T?

(b) Como você muda de variáveis em uma integral dupla?

(c) Como você muda de variáveis em uma integral tripla?

Testes Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\int_{-1}^{2} \int_{0}^{6} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dx\, dy = \int_{0}^{6} \int_{-1}^{2} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dy\, dx$

2. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \sqrt{x + y^2}\, dy\, dx = \int_{0}^{x} \int_{0}^{1} \sqrt{x + y^2}\, dx\, dy$

3. $\int_{1}^{2} \int_{3}^{4} x^2 e^y\, dy\, dx = \int_{1}^{2} x^2\, dx \int_{3}^{4} e^y\, dy$

4. $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y\, dx\, dy = 0$

5. Se f for contínua em $[0, 1]$, então,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y)\, dy\, dx = \left[\int_0^1 f(x) dx\right]^2$$

6. $\int_{1}^{4} \int_{0}^{1} \left(x^2 + \sqrt{y}\right) \operatorname{sen}(x^2 y^2)\, dx\, dy \leqslant 9$

7. Se D é um disco dado por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, então

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA = \tfrac{16}{3}\pi$$

8. A integral $\iiint_E k r^3\, dz\, dr\, d\theta$ representa o momento de inércia em relação ao eixo z de um sólido E com densidade constante k.

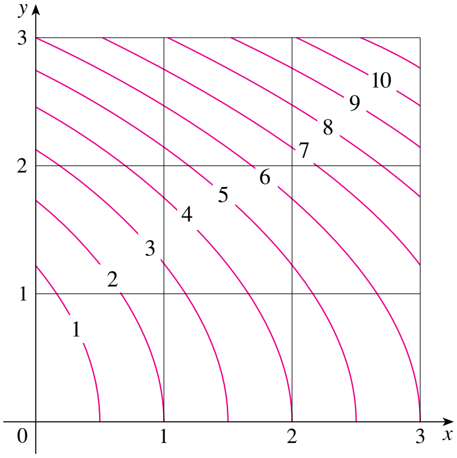
9. A integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz\, dr\, d\theta$$

representa o volume limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$.

Exercícios

1. A figura mostra o mapa de contorno de f no quadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Utilize uma soma de Riemann de nove termos para estimar o valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$. Tome os pontos de amostragem como os cantos superiores direitos dos quadrados.



2. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a integral do Exercício 1.

3–8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^2 \int_0^2 (y + 2xe^y)\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy}\, dx\, dy$

5. $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2)\, dy\, dx$

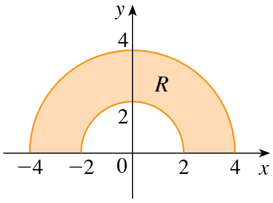
6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2\, dy\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x\, dz\, dy\, dx$

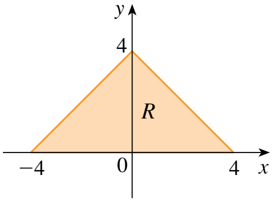
8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz\, dz\, dx\, dy$

9–10 Escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde R é a região mostrada e f é uma função arbitrária contínua em R.

9.



10.



11. Descreva a região cuja área é dada pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

12. Descreva o sólido cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\;\; d\rho\, d\phi\, d\theta$$

e calcule a integral.

13–14 Calcule a integral iterada, primeiro invertendo a ordem de integração.

13. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\, dy\, dx$

14. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \dfrac{ye^{x^2}}{x^3}\, dx\, dy$

15–28 Calcule o valor da integral múltipla.

15. $\iint_R ye^{xy}\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\; 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

16. $\iint_D xy\, dA$, onde $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\; y^2 \leqslant x \leqslant y + 2\}$

17. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1 + x^2}\, dA$, onde D é limitado por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$

18. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2}\, dA$, onde D é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$

19. $\iint_D y\, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 8 - y^2$

20. $\iint_D y\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante que está acima da hipérbole $xy = 1$ e da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 2$

21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}\, x$ e pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$

22. $\iint_D x\, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$

23. $\iiint_E xy\, dV$, onde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\; 0 \leqslant y \leqslant x,\; 0 \leqslant z \leqslant x + y\}$

24. $\iiint_T xy\, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

25. $\iiint_E y^2z^2\, dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$

26. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante

27. $\iiint_E yz\, dV$, onde E está acima do plano $z = 0$, abaixo do plano $z = y$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

28. $\iiint_H z^3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, onde H é o hemisfério sólido com centro na origem e raio 1, que está acima do plano xy

29–34 Determine o volume do sólido dado.

29. Abaixo do paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$

30. Abaixo da superfície $z = x^2y$ e acima do triângulo no plano xy com vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(4, 0)$

31. O tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(2, 2, 0)$

32. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$

33. Uma das cunhas obtidas pelo corte do cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ pelos planos $z = 0$ e $z = mx$

34. Acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

35. Considere uma lâmina que ocupa, no primeiro quadrante, a região D limitada pela parábola $x = 1 - y^2$ e pelos eixos coordenados, com função densidade $\rho(x, y) = y$.
(a) Determine a massa da lâmina.
(b) Determine o centro de massa.
(c) Determine os momentos de inércia e os raios de giração em relação aos eixos x e y.

36. Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ que está no primeiro quadrante.
(a) Determine o centroide da lâmina.
(b) Determine o centro de massa da lâmina se a função densidade for $\rho(x, y) = xy^2$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

37. (a) Determine o centroide de um cone circular reto com altura h e base com raio a. (Coloque o cone de forma que a base esteja sobre o plano xy com o centro na origem e seu eixo esteja sobre o eixo z.)

(b) Encontre o momento de inércia do cone em relação a seu eixo (o eixo z).

38. Encontre a área da parte do cone $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

39. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + y$ que está acima do triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 2).

SCA **40.** Trace a superfície $z = x \operatorname{sen} y$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ e encontre seu comprimento correto com 4 casas decimais.

41. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx$$

42. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$$

43. Se D é uma região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = e^x$, determine o valor aproximado da integral $\iint_D y^2\, dA$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção das curvas.)

44. Determine o centro de massa do tetraedro sólido com vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) e função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

45. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.

(b) Encontre $P(X \leqslant 2, Y \geqslant 1)$.

(c) Encontre $P(X + Y \leqslant 1)$.

46. Uma luminária tem três lâmpadas, cada uma com vida média de 800 horas. Se modelarmos a probabilidade de falha das lâmpadas por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade das três lâmpadas virem a falhar dentro de um intervalo de 1 000 horas.

47. Reescreva a integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

como uma integral iterada na ordem $dx\, dy\, dz$.

48. Dê outras cinco integrais iteradas iguais a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

49. Utilize a transformação $u = x - y$, $v = x + y$ para avaliar

$$\iint_R \frac{x - y}{x + y}\, dA$$

onde R é o quadrado com vértices (0, 2), (1, 1), (2, 2) e (1, 3).

50. Utilize a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para determinar o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

51. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e uma transformação adequada para calcular $\iint_R xy\, dA$, onde R é o quadrado com vértices (0, 0), (1, 1), (2, 0) e (1, −1).

52. O **Teorema do Valor Médio para as integrais duplas** diz que, se f é uma função contínua em uma região plana D do tipo I ou do tipo II, então existe um ponto (x_0, y_0) em D, tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)\, A(D)$$

Utilize o Teorema do Valor Extremo (14.7.8) e a Propriedade 15.3.11 das integrais para demonstrar esse teorema. (Use a demonstração da versão unidimensional da Seção 6.5, no Volume I, como guia.)

53. Suponha que f seja contínua sobre um disco que contém o ponto (a, b). Seja D_r o disco fechado com centro em (a, b) e raio r. Utilize o Teorema do Valor Médio para as integrais duplas (veja o Exercício 52) para mostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

54. (a) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}}\, dA$, onde n é um inteiro e D é a região limitada pelos círculos com centro na origem e raios r e R, $0 < r < R$.

(b) Para que valores de n a integral da parte (a) tem limite quando $r \to 0^+$?

(c) Determine $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}}\, dV$, onde E é a região limitada pelas esferas com centro na origem e raios r e R, $0 < r < R$.

(d) Para que valores de n a integral da parte (c) tem limite quando $r \to 0^+$?

Problemas Quentes

1. Se $[\![x]\!]$ denota o maior inteiro contido em x, calcule a integral

$$\iint_R [\![x+y]\!]\,dA$$

onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 2 \leqslant y \leqslant 5\}$.

2. Calcule a Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2, y^2\}}\,dy\,dx$$

onde $\max\{x^2, y^2\}$ significa o maior dos números x^2 e y^2.

3. Encontre o valor médio da função $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2)\,dt$ no intervalo $[0, 1]$.

4. Se **a**, **b** e **c** são vetores constantes, **r** é o vetor posição $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e E é dado pelas inequações $0 \leqslant \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \mathbf{c}\cdot\mathbf{r} \leqslant \gamma$, mostre que

$$\iiint_E (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}$$

5. A integral dupla $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy$ é uma integral imprópria e pode ser definida como o limite da integral dupla sobre o retângulo $[0, t] \times [0, t]$ quando $t \to 1^-$. Mas, se expandirmos o integrando como uma série geométrica, podemos exprimir a integral como a soma de uma série infinita. Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler determinou o valor exato da soma da série do Problema 5. Em 1736, ele demonstrou que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Neste problema, pedimos que você demonstre esse fato calculando a integral dupla do Problema 5. Comece fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

Isso corresponde a uma rotação em torno da origem de um ângulo de $\pi/4$. Você precisará esboçar a região correspondente no plano uv.

[*Sugestão:* Se, ao avaliar a integral, você encontrar uma das expressões $(1 - \operatorname{sen}\theta)/\cos\theta$ ou $(\cos\theta)/(1 + \operatorname{sen}\theta)$, você pode usar a identidade $\cos\theta = \operatorname{sen}((\pi/2) - \theta)$ e a identidade correspondente para $\operatorname{sen}\theta$.].

7. (a) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz}\,dx\,dy\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Ninguém jamais foi capaz de determinar o valor exato da soma dessa série.)

(b) Mostre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+xyz}\,dx\,dy\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use essa equação para calcular a integral tripla com precisão de duas casas decimais.

8. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln \pi$$

primeiro escrevendo a integral como uma integral iterada.

9. (a) Mostre que quando a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

é escrita em coordenadas cilíndricas, ela se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(b) Mostre que quando a equação de Laplace é escrita em coordenadas esféricas ela se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{cotg}\phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

10. (a) Uma lâmina tem densidade constante ρ e o formato de um disco com centro na origem e raio R. Utilize a Lei de Newton da Gravitação (veja a Seção 13.4) para mostrar que a intensidade da força de atração que a lâmina exerce sobre um corpo com massa m colocado em um ponto $(0, 0, d)$ no eixo z positivo é

$$F = 2\pi Gm\rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

[*Sugestão:* Divida o disco como na Figura 4 da Seção 15.4 e calcule primeiro a componente vertical da força exercida pelo sub-retângulo polar R_{ij}.]

(b) Mostre que a intensidade da força de atração da lâmina com densidade ρ que ocupa o plano inteiro sobre um objeto de massa m localizado à distância d do plano é

$$F = 2\pi Gm\rho$$

Observe que esta expressão não deve depender de d.

11. Se f for contínua, mostre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)\,dt\,dz\,dy = \tfrac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2 f(t)\,dt$$

12. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + ni + j}}$.

13. O plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

corta o elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

em dois pedaços. Encontre o volume do pedaço menor.

16

Cálculo Vetorial

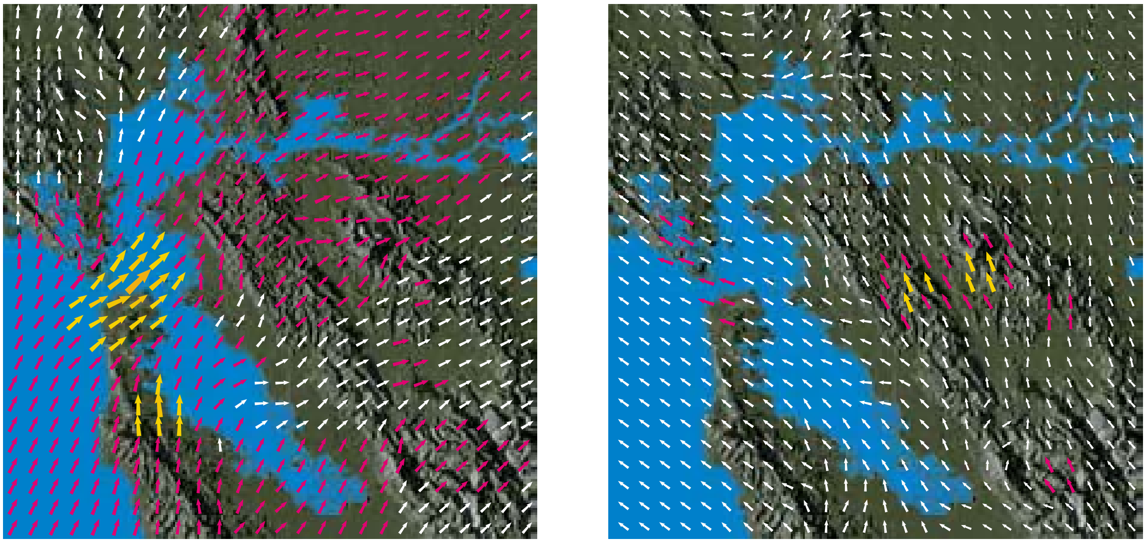
Superfícies parametrizadas, estudadas na Seção 16.6, são frequentemente utilizadas por programadores na criação de filmes de animação. Nesta cena de *FormiguinhaZ*, Princesa Bala está prestes a tentar resgatar Z, que está preso em uma gota de orvalho. A superfície parametrizada representa a gota de orvalho, e uma família de tais superfícies descreve o seu movimento. Um dos programadores para este filme disse: "Eu gostaria de ter prestado mais atenção na aula de cálculo, quando estávamos estudando superfícies parametrizadas. Com certeza me ajudaria hoje."

Dreamworks/Photofest

Neste capítulo, estudaremos os cálculos de campos vetoriais. (Estes são as funções que associam vetores a pontos no espaço.) Em particular, definiremos integrais de linha (que podem ser usadas para encontrar o trabalho realizado por um campo de força para mover um objeto ao longo de uma curva). Em seguida, definiremos integrais de superfície (que podem ser usadas para encontrar a taxa de fluxo do fluido através de uma superfície). As conexões entre esses novos tipos de integrais e as integrais unidimensionais, duplas e triplas que já vimos são dadas por versões em maior dimensão do Teorema Fundamental do Cálculo: Teorema de Green, Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente.

16.1 Campos Vetoriais

Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a velocidade escalar, a direção e o sentido do vento em pontos a 10 m da superfície, na área da Baía de São Francisco. Nós vemos num relance a partir das maiores setas na parte (a) que as velocidades do vento maiores naquele tempo ocorreram quando entraram na baía do outro lado da Ponte Golden Gate. A parte (b) mostra o padrão de vento muito diferente 12 horas antes. Associado a cada ponto do ar, podemos imaginar um vetor velocidade do vento. Este é um exemplo de *campo vetorial de velocidade*.

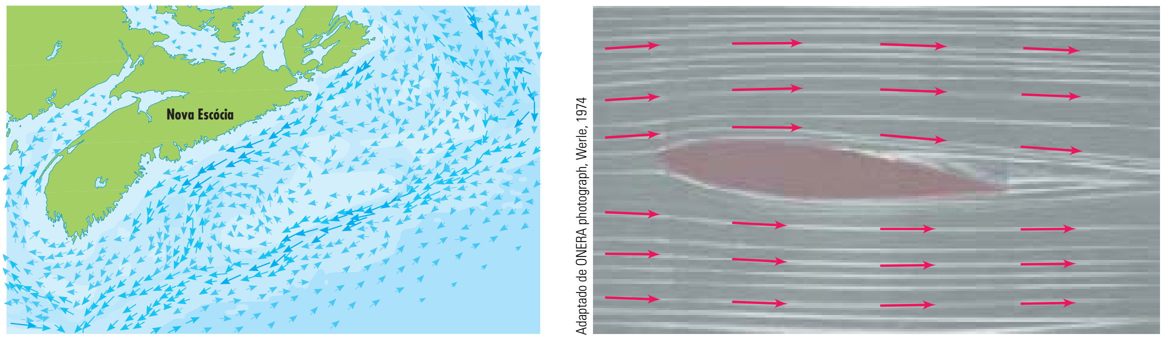


(a) 18:00, 1º março de 2010

(b) 6:00, 1º março de 2010

FIGURA 1 Campos vetoriais de velocidade mostrando aspectos do vento na Baía de São Francisco

Outros exemplos de campos vetoriais de velocidade estão ilustrados na Figura 2: correntes oceânicas e do fluxo passando por um aerofólio.



Adaptado de ONERA photograph, Werle, 1974

(a) Correntes oceânicas em frente à costa de Nova Escócia

(b) Escoamento do ar por um aerofólio inclinado

FIGURA 2 Campos vetoriais de velocidade

Outro tipo de campo vetorial, chamado *campo de força*, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional que examinaremos no Exemplo 4.

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

1 **Definição** Seja D um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar a seta representando o vetor $\mathbf{F}(x, y)$ começando no ponto (x, y). É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y), mas podemos visualizar $\mathbf{F}$ fazendo isso para alguns pontos representativos em D, como na Figura 3. Uma vez que $\mathbf{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

ou, de forma mais compacta, $\qquad \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$

Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distingui-los dos campos vetoriais.

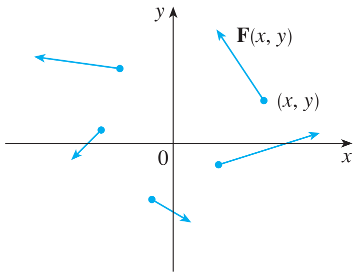


FIGURA 3
Campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

> **2 Definição** Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ está ilustrado na Figura 4. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Como nas funções vetoriais na Seção 13.1, podemos definir a continuidade dos campos vetoriais e mostrar que $\mathbf{F}$ será contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R forem contínuas.

Às vezes identificamos um ponto (x, y, z) com seu vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ e escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então $\mathbf{F}$ se torna uma função que associa um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a um vetor $\mathbf{x}$.

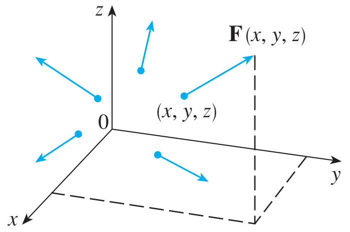


FIGURA 4
Campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

EXEMPLO 1 Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva $\mathbf{F}$ esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

SOLUÇÃO Uma vez que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 5. Uma vez que $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, desenhamos o vetor $\langle -1, 0\rangle$ com ponto inicial $(0, 1)$. Continuando desta maneira, podemos calcular vários outros valores representativos de $\mathbf{F}(x, y)$ na tabela e extrair os vetores correspondentes para representar o campo vetorial na Figura 5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

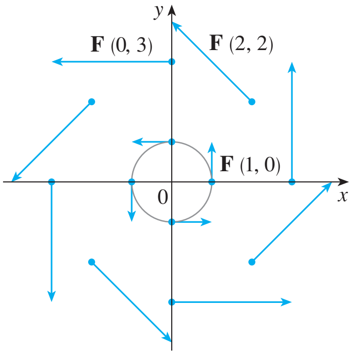


FIGURA 5
$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

Na Figura 5, parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Para confirmarmos isso, vamos tomar o produto escalar do vetor posição $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ com o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Isso mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y\rangle$ e, portanto, tangente ao círculo com centro na origem e raio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe também que

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

de modo que o comprimento do vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo. ■

Alguns sistemas de computação algébrica são capazes de traçar um campo vetorial em duas ou três dimensões. Eles fornecem melhor visualização do campo que o esboço feito à mão, pois o computador pode desenhar grande número de vetores representativos. A Figura 6 apresenta uma saída de computador para o campo vetorial do Exemplo 1; as Figuras 7 e 8 mostram outros dois campos vetoriais. Observe que o computador muda a escala de comprimento do vetor para que ele não fique comprido demais, embora ainda seja proporcional ao verdadeiro comprimento.

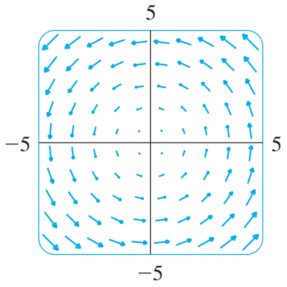


FIGURA 6
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$

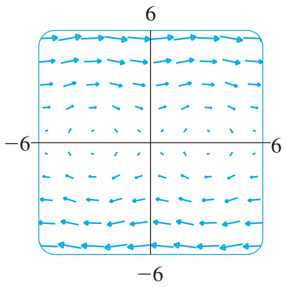


FIGURA 7
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \text{sen } x\rangle$

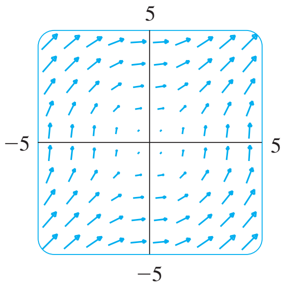


FIGURA 8
$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2)\rangle$

EXEMPLO 2 Esboce o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O desenho está mostrado na Figura 9. Observe que todos os vetores são verticais, apontando para cima, quando acima do plano *xy* ou para baixo, quando abaixo do plano *xy*. O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano *xy*.

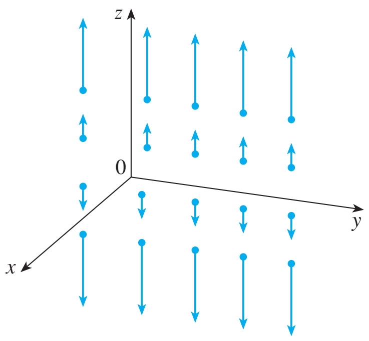


FIGURA 9
$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$

Somos capazes de desenhar o campo vetorial do Exemplo 2 à mão, pois ele é especialmente simples. A maioria dos campos vetoriais tridimensionais, no entanto, são virtualmente impossíveis de serem desenhados à mão e, por isso, precisamos recorrer a um sistema de computação algébrica. Exemplos são mostrados nas Figuras 10, 11 e 12. Observe que os campos vetoriais nas Figuras 10 e 11 têm fórmulas semelhantes, mas todos os vetores na Figura 11 apontam na direção geral do eixo negativo *y* porque seus componentes *y* são todos -2. Se o campo vetorial na Figura 12 representa um campo de velocidades, então uma partícula seria levada para cima e iria espiralar em torno do eixo *z* no sentido horário quando visto de cima.

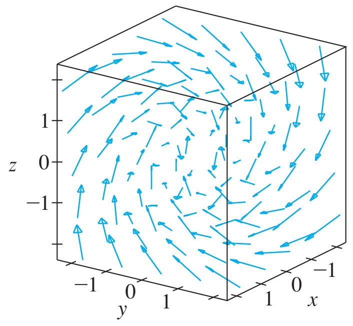


FIGURA 10
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

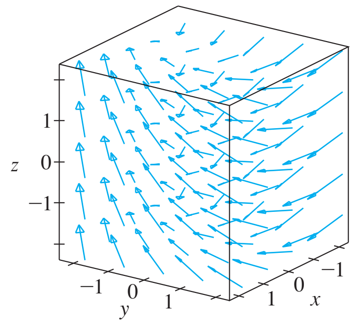


FIGURA 11
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

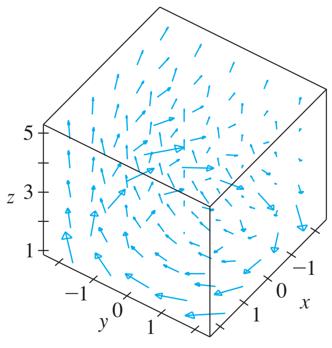


FIGURA 12
$\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{y}{z}\,\mathbf{i} - \dfrac{x}{z}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{4}\,\mathbf{k}$

EXEMPLO 3 Imagine um líquido escoando uniformemente em um cano e seja $\mathbf{V}(x, y, z)$ o vetor velocidade em um ponto (x, y, z). Então $\mathbf{V}$ associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de certo domínio E (interior do cano) e assim, $\mathbf{V}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ chamado **campo de velocidade**. Um possível campo de velocidade é ilustrado na Figura 13. A velocidade em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Campos de velocidade ocorrem em outras áreas da física. Por exemplo: o campo vetorial do Exemplo 1 pode ser usado como o campo de velocidade descrevendo a rotação no sentido anti-horário de uma roda. Vimos outros exemplos de campo de velocidade nas Figuras 1 e 2.

TEC Em *Visual 16.1* você pode girar os campos de vetores nas Figuras 10-12, bem como os campos adicionais.

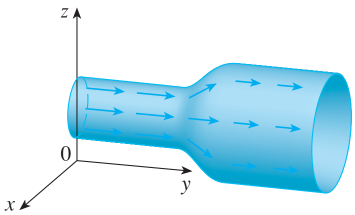


FIGURA 13
Campo de velocidade do escoamento de um fluido

EXEMPLO 4 A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional. (Este é um exemplo de uma lei inversa da raiz quadrada.) Vamos supor que o objeto com massa M esteja localizado na origem em $\mathbb{R}^3$. (Por exemplo, M pode ser a massa da Terra e a origem estaria em seu centro.) Seja o vetor posição do objeto com massa m $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$. Então $r = |\mathbf{x}|$, logo, $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

[Os físicos usam frequentemente a notação $\mathbf{r}$ ao invés de $\mathbf{x}$ para o vetor posição, então você pode ver a Fórmula 3 escrita na forma $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] A função dada pela Equação 3 é um exemplo de campo vetorial, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor [a força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] a cada ponto $\mathbf{x}$ do espaço.

A Fórmula 3 é um modo compacto de escrever o campo gravitacional, mas podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes, usando o fato de que $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

O campo gravitacional $\mathbf{F}$ está ilustrado na Figura 14.

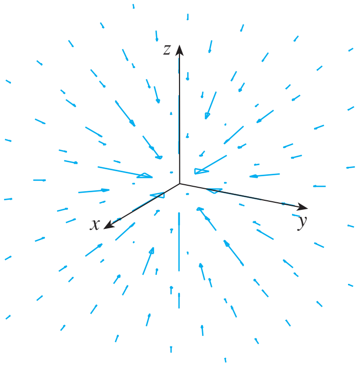


FIGURA 14
Campo de força gravitacional

EXEMPLO 5 Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon qQ}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

onde ε é uma constante (que depende da unidade usada). Para cargas de mesmo sinal, temos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas opostas temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Observe a semelhança entre as Fórmulas 3 e 4. Ambas são exemplos de **campos de força**.

Em vez de considerarem a força elétrica $\mathbf{F}$, os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

Então $\mathbf{E}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ chamado **campo elétrico** de Q.

Campos Gradiente

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente ∇f (ou grad f) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e é denominado **campo vetorial gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

EXEMPLO 6 Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de f. Como eles estão relacionados?

SOLUÇÃO O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

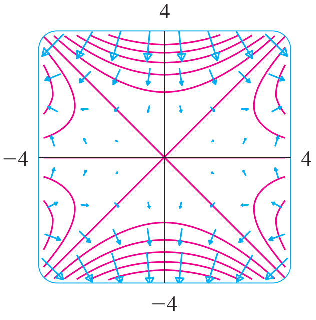


FIGURA 15

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo vetorial gradiente. Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico.

Um campo vetorial **F** é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação, f é denominada **função potencial** de **F**.

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional **F** do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

Nas Seções 16.3 e 16.5, aprenderemos a determinar se um campo vetorial é conservativo ou não.

16.1 Exercícios

1-10 Esboce o campo vetorial **F** desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = 0{,}3\,\mathbf{i} - 0{,}4\,\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{k}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

11–14 Faça a correspondência entre o campo vetorial **F** e a figura rotulada de I–IV. Justifique suas escolhas.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, -y \rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x, -y \rangle$

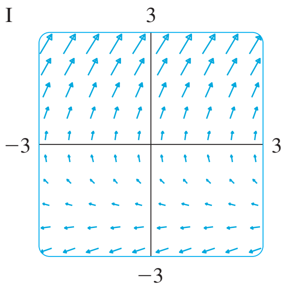
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, y + 2 \rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \cos(x + y), x \rangle$

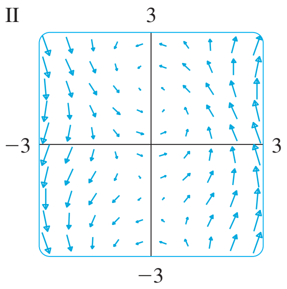
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

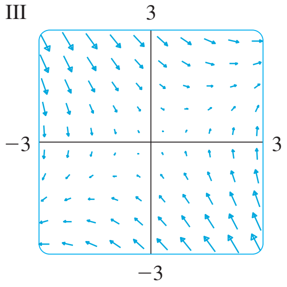
I



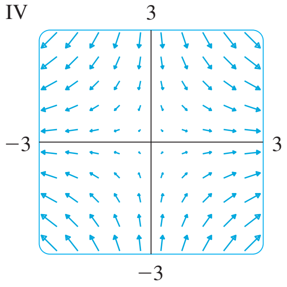
II



III



IV



15–18 Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ e a figura rotulada de I–IV. Justifique suas escolhas.

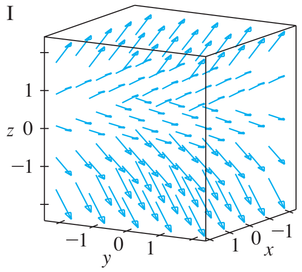
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

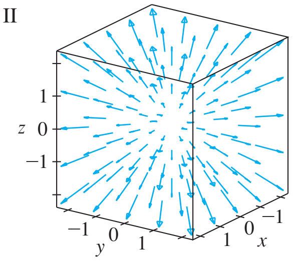
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

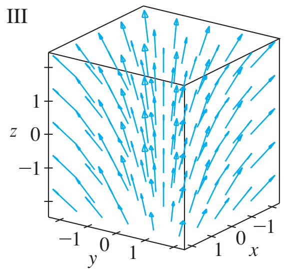
I



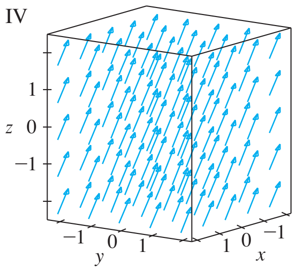
II



III



IV



SCA **19.** Se você dispõe de um SCA que trace campos vetoriais (o comando para fazê-lo no Maple é `fieldplot` e no Mathematica é `PlotVectorField` ou `VectorPlot`), use-o para traçar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\,\mathbf{j}$$

Explique sua aparência, determinando um conjunto de pontos (x, y) tal que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

SCA **20.** Seja $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$ e $r = |\mathbf{x}|$. Use um SCA para traçar esse campo vetorial em vários domínios, até conseguir visualizar o que ocorre. Descreva a aparência do desenho e explique-o, determinando os pontos onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21–24 Determine o campo vetorial gradiente f.

21. $f(x, y) = xe^{xy}$

22. $f(x, y) = \text{tg}(3x - 4y)$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

24. $f(x, y, z) = x\cos(y/z)$

25–26 Determine o campo vetorial gradiente ∇f de f e esboce-o.

25. $f(x, y) = x^2 - y$

26. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

SCA **27–28** Desenhe o campo vetorial gradiente de f juntamente com um mapa de contorno de f. Explique como eles estão relacionados entre si.

27. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$

28. $f(x, y) = \cos x - 2\,\text{sen}\,y$

29–32 Faça uma correspondência entre as funções f e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes rotulados de I–IV. Justifique suas escolhas.

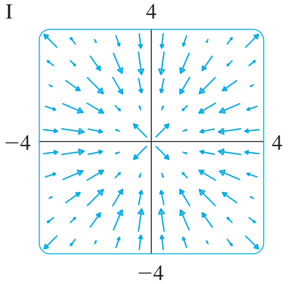
29. $f(x, y) = x^2 + y^2$

30. $f(x, y) = x(x + y)$

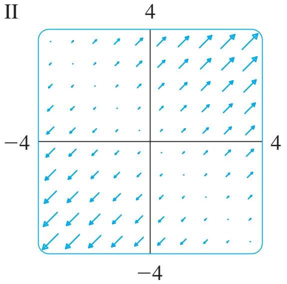
31. $f(x, y) = (x + y)^2$

32. $f(x, y) = \text{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

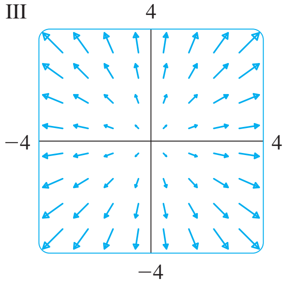
I



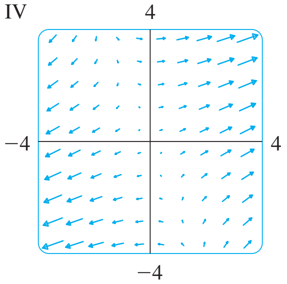
II



III



IV



33. Uma partícula se move em um campo de velocidade $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2\rangle$. Se ela está na posição (2, 1) no instante $t = 3$, estime sua posição no instante $t = 3{,}01$.

34. No instante $t = 1$, uma partícula está localizada na posição (1, 3). Se ela se move em um campo de velocidade

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2,\, y^2 - 10\rangle$$

encontre sua posição aproximada no instante $t = 1{,}05$.

35. As **linhas de escoamento** (ou **linhas de corrente**) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de fluxo.

(a) Use um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para desenhar algumas linhas de escoamento. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de escoamento?

(b) Se as equações paramétricas de uma linha de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por que essas funções satisfazem as equações diferenciais $dx/dt = x$ e $dy/dt = -y$. Então resolva as equações diferenciais para encontrar uma equação da linha de escoamento que passa através do ponto (1, 1).

36. (a) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ e algumas linhas de escoamento. Qual é o formato que essas linhas de escoamento parecem ter?

(b) Se as equações paramétricas das linhas de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que $dy/dx = x$.

(c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por $\mathbf{F}$, determine uma equação para a trajetória percorrida por ela.

16.2 Integrais de Linha

Nesta seção, definiremos uma integral que é semelhante à integral unidimensional, exceto que, ao invés de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva C. Tais integrais são chamadas *integrais de linha*, embora "integrais de curva" seria melhor terminologia. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

$$\boxed{1} \qquad x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, e supomos que C seja uma curva suave. [Isso significa que $\mathbf{r}'$ é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Veja a Seção 13.3.] Se dividirmos o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem C em n subarcos de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. (Veja a Figura 1.) Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ no i-ésimo subarco. (Isto corresponde a um ponto t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$.) Agora, se f for uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C, calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*), multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos

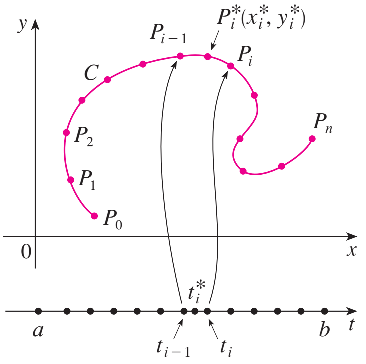


FIGURA 1

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida, tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição, por analogia com a integral unidimensional:

$\boxed{2}$ **Definição** Se f é definida sobre uma curva suave C dada pelas Equações 1, então a **integral de linha de f sobre C** é

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

se esse limite existir.

Na Seção 10.2 verificamos que o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se f é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\boxed{3} \qquad \int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida uma única vez quando t cresce de a para b.

Se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

A função comprimento de arco s foi discutida na

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de memorizar a Fórmula 3 é escrever tudo em termos do parâmetro t: Use a parametrização para exprimir x e y em termos de t e escreva ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

No caso especial em que C é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ a $(b, 0)$, usando x como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de C da seguinte forma: $x = x$, $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, 0)\,dx$$

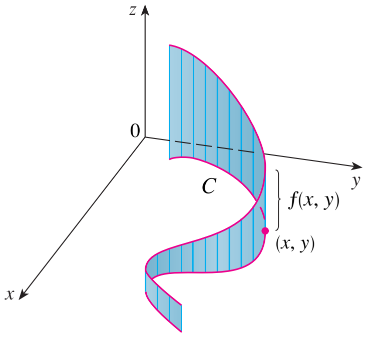


FIGURA 2

e, nesse caso, a integral de linha se reduz a uma integral unidimensional.

Assim como para as integrais unidimensionais, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área. De fato, se $f(x, y) \geqslant 0$, $\int_C f(x, y)\, ds$ representa a área da "cerca" ou "cortina" da Figura 2, cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

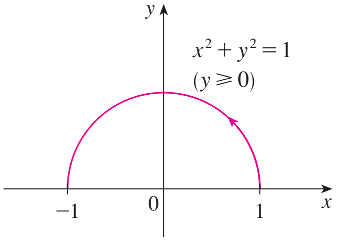


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Para utilizar a Fórmula 3, primeiro precisamos de equações paramétricas para representar C. Recorde-se de que o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (veja a Figura 3). Portanto, a Fórmula 3 dá

$$\begin{aligned}\int_C (2 + x^2y)\, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

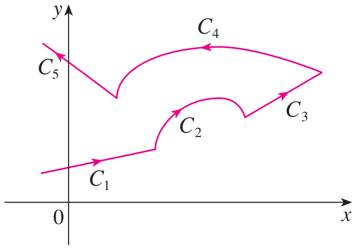


FIGURA 4
Curva suave por partes

Suponha agora que C seja uma **curva suave por partes**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto final de C_i. Nesse caso, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada parte suave de C:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

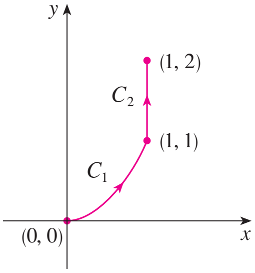


FIGURA 5
$C = C_1 \cup C_2$

EXEMPLO 2 Calcule $\int_C 2x\, ds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 5. C_1 é o gráfico de uma função de x, então podemos escolher x como parâmetro e as equações de C_1 se tornam

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} 2x\, ds &= \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\end{aligned}$$

Em C_2 escolhemos y como parâmetro, e as equações de C_2 são

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

e

$$\int_{C_2} 2x\, ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^2 2\, dy = 2$$

Logo,

$$\int_C 2x\, ds = \int_{C_1} 2x\, ds + \int_{C_2} 2x\, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

Qualquer interpretação física de uma integral de reta $\int_C f(x, y)\, ds$ depende da interpretação física da função f. Suponhamos que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear de um ponto de (x, y) de um fio fino com a forma de uma curva C. Então, a massa da parte do fio a partir de

P_{i-1} até P_i na Figura 1 é de cerca de $\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$ e assim a massa total do fio é de cerca de $\sum\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$. Tomando cada vez mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da **massa** m do fio como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\,ds$$

[Por exemplo, se $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa a densidade de um fio semicircular, então a integral no Exemplo 1 representa a massa do fio.] O **centro de massa** do fio com a função densidade ρ encontra-se no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\boxed{4} \qquad \bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\,\rho(x, y)\,ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\,ds$$

Outras interpretações físicas das integrais de linha serão discutidas adiante neste capítulo.

EXEMPLO 3 Um arame tem o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear em qualquer ponto for proporcional à sua distância à reta $y = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, usamos a parametrização $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, e determinamos que $ds = dt$. A densidade linear é

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

onde k é uma constante e, então, a massa do arame é

$$m = \int_C k(1 - y)\,ds = \int_0^\pi k(1 - \operatorname{sen} t)\,dt = k\Big[t + \cos t\Big]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Das Equações 4, temos

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\,ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C y\,k(1 - y)\,ds\\ &= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^\pi(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)\,dt = \frac{1}{\pi - 2}\Big[-\cos t - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\Big]_0^\pi\\ &= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\end{aligned}$$

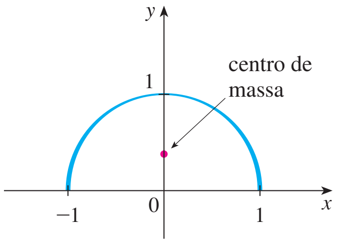


FIGURA 6

Por simetria, vemos que $\bar{x} = 0$, portanto o centro de massa é

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\right) \approx (0, 0{,}38)$$

(Veja a Figura 6.) ▬

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas, respectivamente, **integrais de linha de *f* ao longo de *C* com relação a *x* e *y***:

$$\boxed{5} \qquad \int_C f(x, y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta x_i$$

$$\boxed{6} \qquad \int_C f(x, y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta y_i$$

Quando queremos distinguir a integral de linha original $\int_C f(x, y)\,ds$ das Equações 5 e 6, esta é chamada de **integral de linha com relação ao comprimento do arco**.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a x e y podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$.

$$\boxed{7} \qquad \boxed{\begin{aligned}\int_C f(x, y)\,dx &= \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\,x'(t)\,dt\\ \int_C f(x, y)\,dy &= \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t)\,dt\end{aligned}}$$

Frequentemente acontece de as integrais de linha com relação a x e y ocorrerem em conjunto. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Quando estamos nos preparando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar na representação paramétrica da curva cuja descrição geométrica foi dada. Em especial, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, portanto, é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em $\mathbf{r}_0$ e termina em $\mathbf{r}_1$ é dada por

8 $$\boxed{\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1}$$

(Veja a Equação 12.5.4.)

EXEMPLO 4 Calcule $\int_C y^2\, dx + x\, dy$, onde (a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e (b) $C = C_2$ é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Veja a Figura 7.)

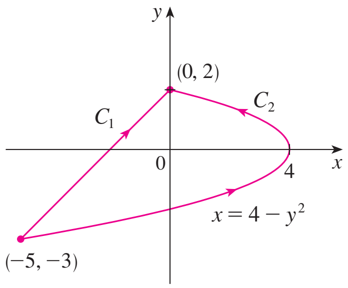


FIGURA 7

SOLUÇÃO

(a) A representação parametrizada para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Utilize a Equação 8 com $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Assim, $dx = 5\, dt$, $dy = 5\, dt$ e a Fórmula 7 fornecem

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2\, dx + x\, dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5\, dt) + (5t - 5)(5\, dt)\\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\, dt\\ &= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

(b) Como a parábola é dada em função de y, usamos y como parâmetro e escrevemos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Então $dx = -2y\, dy$ e, pela Fórmula 7, temos

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\, dx + x\, dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y)\, dy + (4 - y^2)\, dy\\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)\, dy\\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^2 = 40\tfrac{5}{6}\end{aligned}$$

Observe que as respostas para os itens (a) e (b) do Exemplo 4 são diferentes, apesar de as duas curvas terem as mesmas extremidades. Assim, em geral, o valor de uma integral de linha depende não apenas das extremidades da curva, mas também da trajetória. (Mas veja a Seção 16.3 para as condições em que a integral é independente do caminho.)

Observe também que as respostas do Exemplo 4 dependem da orientação ou sentido em que a curva é percorrida. Se $-C_1$ representa o segmento de reta que vai de $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, você pode verificar, usando a parametrização

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

que

$$\int_{-C_1} y^2\, dx + x\, dy = \tfrac{5}{6}$$

Em geral, dada a parametrização $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, esta determina-se uma **orientação** da curva C, com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do

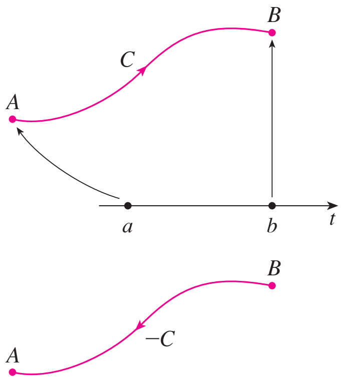


FIGURA 8

parâmetro t (veja a Figura 8, onde o ponto inicial A corresponde ao valor do parâmetro a e o ponto terminal B corresponde a $t = b$).

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que C, mas com orientação contrária (do ponto inicial B para o ponto terminal A na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha *não* se altera ao revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

Isso ocorre porque Δs_i é sempre positivo, enquanto Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando invertemos a orientação de C.

Integrais de Linha no Espaço

Suponhamos agora que C seja uma curva espacial suave dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

ou por uma equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C, então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito nas curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \qquad \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C (veja a Seção 13.3.3).

Também podemos definir integrais de linha ao longo de C em relação a x, y e z. Por exemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

$$= \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, z'(t)\, dt$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano, podemos calcular integrais da forma

$$\boxed{10} \qquad \int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

escrevendo tudo (x, y, z, dx, dy, dz) em termos do parâmetro t.

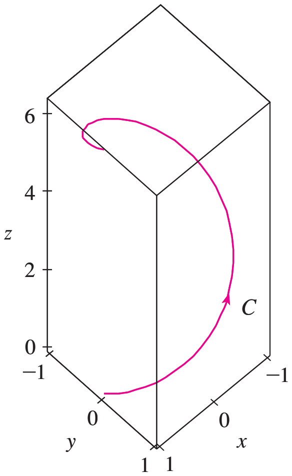


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Calcule $\int_C y \operatorname{sen} z\, ds$, onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (Veja a Figura 9.)

SOLUÇÃO A Fórmula 9 nos dá

$$\int_C y \operatorname{sen} z\, ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \Big[t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \Big]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

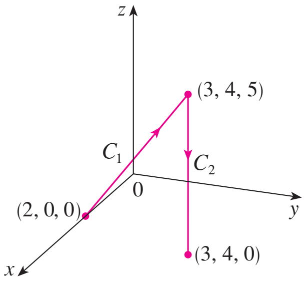


FIGURA 10

EXEMPLO 6 Calcule $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, onde C consiste no segmento de reta C_1 de (2, 0, 0) a (3, 4, 5), seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de (3, 4, 5) a (3, 4, 0).

SOLUÇÃO A curva C é mostrada na Figura 10. Usando a Equação 8, escrevemos C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t \rangle$$

ou, na forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \qquad y = 4t \qquad z = 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Logo,

$$\int_{C_1} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \int_0^1 (4t)\, dt + (5t)4\, dt + (2 + t)5\, dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)\, dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \Big]_0^1 = 24{,}5$$

Da mesma maneira, pode-se escrever C_2 na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

ou

$$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Então $dx = 0 = dy$, logo

$$\int_{C_2} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \int_0^1 3(-5)\, dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = 24{,}5 - 15 = 9{,}5$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Lembre-se, da Seção 6.4, no Volume I, de que o trabalho feito por uma força variável $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é dado por $W = \int_a^b f(x)\, dx$. Depois, na Seção 12.3, vimos que o trabalho feito por uma força constante $\mathbf{F}$ para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, onde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ seja um campo de força contínuo em $\mathbb{R}^3$, tal como o campo gravitacional do Exemplo 4 da Seção 16.1 ou o campo de força elétrica do Exemplo 5 da Seção 16.1 (um campo de força em $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y). Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C.

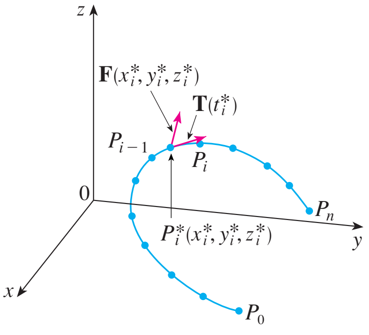

z
$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$
$\mathbf{T}(t_i^*)$
P_{i-1}
P_i
0
P_n
$P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$
y
x
P_0

FIGURA 11

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i através da divisão de intervalos de parâmetros $[a, b]$ em subintervalos de igual largura. (Veja a Figura 1 para o caso bidimensional, ou a Figura 11, para o caso tridimensional.) Escolha um ponto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i-ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro t_i^*. Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente unitário a P_i^*. Então, o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\, \Delta s_i \tag{11}$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) em C. Intuitivamente, vemos que estas aproximações devem se tornar melhor quando n torna-se maior. Portanto, definimos o **trabalho** W feito por um campo de força $\mathbf{F}$ como o limite da soma de Riemann dada por $\boxed{11}$, ou seja,

$$\boxed{12} \qquad W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

A Equação 12 nos diz que *o trabalho é a integral com relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força*.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, então $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, e, pela Equação 9, podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Essa última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física. Portanto, definimos a integral de linha de *qualquer* campo vetorial contínuo como a seguir:

$\boxed{13}$ **Definição** Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Então, **a integral de linha de F ao longo de *C*** é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Ao utilizar a Definição 13, tenha em mente que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é apenas uma abreviação de $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, então podemos avaliar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ simplesmente colocando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ na expressão para $\mathbf{F}(x, y, z)$. Observe também que podemos formalmente escrever que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$.

A Figura 12 mostra o campo de força e a curva do Exemplo 7. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.

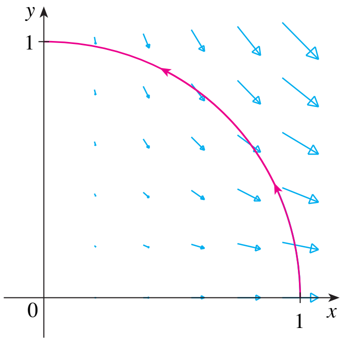


FIGURA 12

EXEMPLO 7 Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

e
$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

OBSERVAÇÃO Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ e as integrais em relação ao comprimento do arco não trocarem de sinal quando a orientação do caminho for invertida, é verdade que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

pois o vetor tangente da unidade $\mathbf{T}$ é substituído por sua negativa quando C é substituído por $-C$.

A Figura 13 mostra a cúbica retorcida *C* no Exemplo 8 e alguns vetores típicos atuando sobre três pontos em *C*.

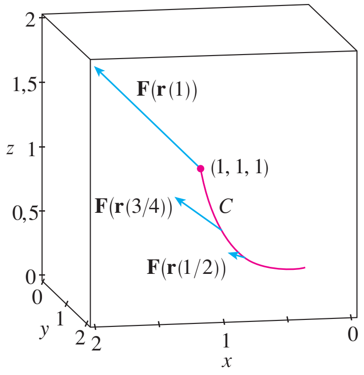


FIGURA 13

EXEMPLO 8 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ e C é a cúbica retorcida dada por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$$

Logo,
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}$$

Finalmente, observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que o campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ seja dado na forma de componente, a equação $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular a sua integral de linha ao longo de C:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k})\cdot\big(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\big)\,dt$$
$$= \int_a^b \big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\big]\,dt$$

Mas essa última integral é exatamente a integral de linha de $\boxed{10}$. Portanto, temos

$$\boxed{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{onde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}}$$

Por exemplo, a integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

16.2 Exercícios

1–16 Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y^3\,ds$, C: $x = t^3$, $y = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C xy\,ds$, C: $x = t^2$, $y = 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4\,ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

4. $\int_C x \operatorname{sen} y\,ds$, C é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.

5. $\int_C \big(x^2y^3 - \sqrt{x}\big)\,dy$, C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.

6. $\int_C xe^y\,dx$, C é o arco da curva $x = e^y$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$.

7. $\int_C (x + 2y)\,dx + x^2\,dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 1)$ e de $(2, 1)$ a $(3, 0)$.

8. $\int_C x^2dy + y^2\,dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(0, 2)$ e no segmento de reta de $(0, 2)$ a $(4, 3)$.

9. $\int_C xyz\,ds$, C: $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = t$, $z = -2\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

10. $\int_C xyz^2\,ds$, C é o segmento de reta de $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$.

11. $\int_C xe^{yz}\,ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

12. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$, C: $x = t$, $y = \cos 2t$, $z = \operatorname{sen} 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

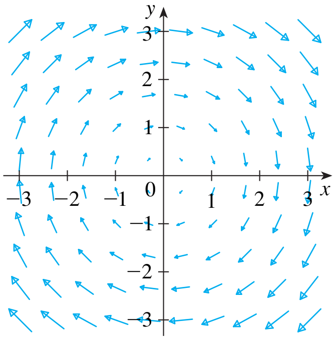
13. $\int_C xye^{yz}\,dy$, C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, C: $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

15. $\int_C z^2\,dx + x^2\,dy + y^2\,dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 0)$ a $(4, 1, 2)$.

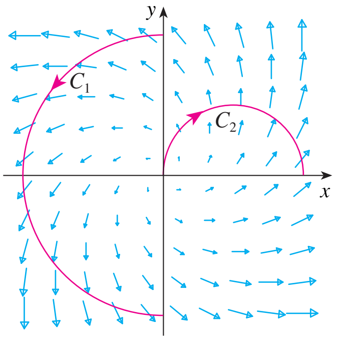
16. $\int_C (y + z)\,dx + (x + z)\,dy, + (x + y)\,dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 1)$ e de $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 2)$.

17. Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial mostrado na figura.
(a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.
(b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

18. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas C_1 e C_2. As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19–22 Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{r}(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

23–26 Use uma calculadora ou um SCA para calcular a integral de linha correta até a quarta casa decimal.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t^2}\,\mathbf{j}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + z \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

25. $\int_C x \operatorname{sen}(y + z)\, ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

26 $\int_C ze^{-xy}\, ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

SCA **27–28** Use um gráfico do campo vetorial $\mathbf{F}$ e a curva C para dizer se a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida, calcule a integral.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

28. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$,

C é a parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$

29. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).

30. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm \frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

SCA **31.** Encontre o valor exato de $\int_C x^3y^2z\, ds$, onde C é a curva com equações paramétricas $x = e^{-t} \cos 4t$, $y = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientada no sentido anti-horário.

SCA (b) Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta para a parte (a).

33. Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Se a densidade linear for uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

34. Um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a. Se a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, encontre a massa e o centro de massa do arame.

35. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com forma da curva espacial C se o fio tem função densidade $\rho(x, y, z)$.

(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade for uma constante k.

36. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da sua distância do ponto à origem.

37. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos por

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y)\, ds \qquad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y)\, ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.

38. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x, y e z são definidos por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 35.

39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$ sobre um objeto que se move sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

40. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + ye^x\,\mathbf{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x - y^2, y - z^2, z - x^2 \rangle$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta de $(0, 0, 1)$ a $(2, 1, 0)$.

42. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante. (Veja o Exemplo 5 da Seção 16.1.) Encontre o trabalho feito quando a partícula se move ao longo de uma linha reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

43. A posição de um objeto com massa m no instante t é $\mathbf{r}(t) = at^2\,\mathbf{i} + bt^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
(a) Qual é a força que age sobre o objeto no instante t?
(b) Qual é o trabalho realizado pela força durante o intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 1$?

44. Um objeto com massa m se move com função posição $\mathbf{r}(t) = a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + b \cos t\,\mathbf{j},\ ct\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Encontre o trabalho realizado sobre o objeto durante este período de tempo.

45. Um homem de 160 libras carrega uma lata de 25 libras de tinta subindo uma escada helicoidal que circunda um silo com um raio de 20 pés. Se o silo é de 90 pés de altura e o homem faz exatamente três rotações completas para subir ao topo, de quanto é o esforço feito pelo homem contra a gravidade?

46. Suponha que exista um furo na lata de tinta do Exercício 45 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo e uniforme durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?

47. (a) Mostre que um campo de força constante realiza trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Isso também é verdadeiro para um campo de força $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, onde k é uma constante e $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$?

48. A base de uma cerca circular com raio de 10 m é dada por $x = 10 \cos t$, $y = 10 \operatorname{sen} t$. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função $h(x, y) = 4 + 0{,}01(x^2 - y^2)$, de modo a altura varia de 3 m a 5 m. Suponha-se que 1 L de tinta cubra 100 m². Faça um esboço da cerca e determine de quanta tinta você precisará para pintar os dois lados da cerca.

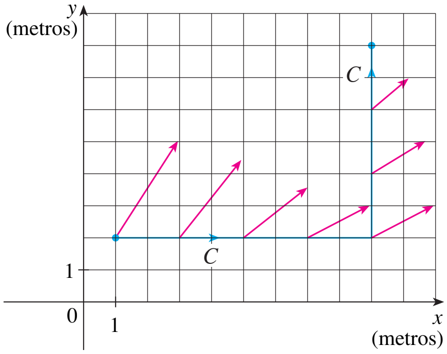
49. Se C é uma curva suave dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, e $\mathbf{v}$ é um vetor constante, mostre que

$$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v}\cdot[\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)]$$

50. Se C é uma curva suave dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, mostre que

$$\int_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\left[|\mathbf{r}(b)|^2 - |\mathbf{r}(a)|^2\right]$$

51. Um objeto se move sobre a curva C, mostrada na figura, de (1, 2) a (9, 8). Os comprimentos dos vetores do campo de força $\mathbf{F}$ são medidos em newtons pela escala nos eixos. Estime o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto.

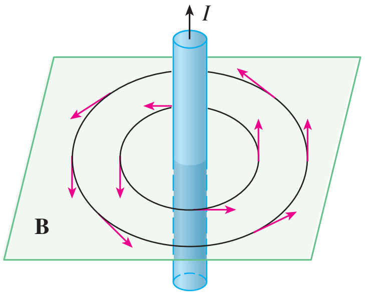


52. Experiências mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A *Lei de Ampère* relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e afirma que

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente total que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C, e μ_0 é uma constante chamada permeabilidade no vácuo. Tomando C como um círculo de raio r, mostre que o módulo $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Lembre-se, da Seção 5.3, no Volume I, que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

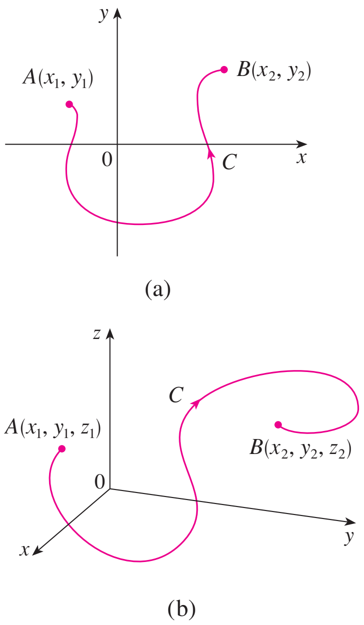
$$\boxed{1} \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F' é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 é também chamada Teorema da Variação Total: a integral de uma taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

$\boxed{2}$ **Teorema** Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



(a)

(b)

FIGURA 1

OBSERVAÇÃO O Teorema 2 diz que podemos avaliar a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial f) simplesmente sabendo o valor de f nos pontos finais de C. De fato, o Teorema 2 diz que a integral de linha de ∇f é a variação total em f. Se f é uma função de duas variáveis e C é uma curva plana com o ponto inicial $A(x_1, y_1)$ e ponto terminal $B(x_2, y_2)$, como na Figura 1, então o Teorema 2 torna-se

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C, uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Vejamos agora a demonstração do Teorema 2 para este caso.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2 Usando a Definição 16.2.13, temos

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\,dt \qquad \text{(pela Regra de Cadeia)} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))\end{aligned}$$

O último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Equação 1).

Apesar de termos demonstrado o Teorema 2 para curvas suaves, ele também vale para curvas suaves por partes. Isso pode ser confirmado subdividindo C em um número finito de curvas suaves e somando as integrais resultantes.

EXEMPLO 1 Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto (3, 4, 12) para o ponto (2, 2, 0) ao longo da curva suave por partes C. (Veja o Exemplo 4 da Seção 16.1.)

SOLUÇÃO Da Seção 16.1, sabemos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservador e, de fato, $\mathbf{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)\end{aligned}$$

Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes (denominadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B. Sabemos do Exemplo 4 da Seção 16.2 que, em geral, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínua. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente das extremidades da curva.

Em geral, se **F** for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho*.

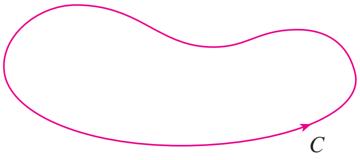


FIGURA 2
Uma curva fechada

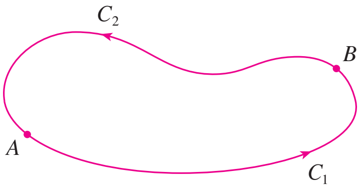


FIGURA 3

Uma curva é denominada **fechada** se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2). Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D, podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A. (Veja a Figura 3.) Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos inicial e final.

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D, podemos demonstrar a independência do caminho da seguinte forma. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e assim $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, demonstramos o seguinte teorema:

3 **Teorema** $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo **F** é independente do caminho, segue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = 0$ para qualquer caminho fechado. A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo (tal como o campo gravitacional ou o campo elétrico da Seção 16.1) para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir diz que *todos* os campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele foi enunciado e demonstrado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema. Admita que D seja **aberto**, o que significa que para todo ponto P em D existirá uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D. (Portanto, D não tem nenhum ponto de sua fronteira.) Além disso, vamos supor que D seja **conexo por caminhos**: isso significa que quaisquer dois pontos em D podem ser ligados por um caminho que se encontra em D.

4 **Teorema** Suponha que **F** seja um campo vetorial contínuo em uma região aberta conexa por caminhos D. Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D, então **F** é um campo vetorial conservativo em D, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $A(a, b)$ um ponto fixo em D. Vamos construir a função potencial f desejada definindo

$$f(x, y) = \int_{(a,\,b)}^{(x,\,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para qualquer ponto (x, y) em D. Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, não interessa qual o caminho C de integração utilizado de (a, b) a (x, y) para calcular $f(x, y)$. Como D é aberto, existe uma bola aberta contida em D com centro em (x, y). Escolha qualquer ponto (x_1, y) no disco com $x_1 < x$ e considere C como qualquer caminho C_1 de (a, b) a (x_1, y), seguido pelo segmento de reta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y). (Veja a Figura 4.) Então

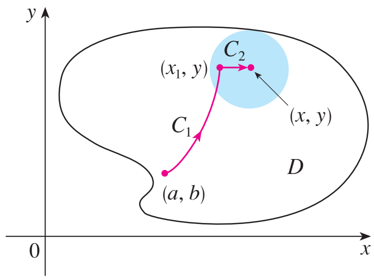


FIGURA 4

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,\,b)}^{(x_1,\,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Observe que a primeira dessas integrais não depende de x, e assim

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Se escrevemos $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, então

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Em C_2, y é constante, portanto $dy = 0$. Usando t como parâmetro, onde $x_1 \leqslant t \leqslant x$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t, y)\,dt = P(x, y)$$

pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3, no Volume I). Uma argumentação semelhante, usando um segmento de reta vertical (veja a Figura 5), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y)$$

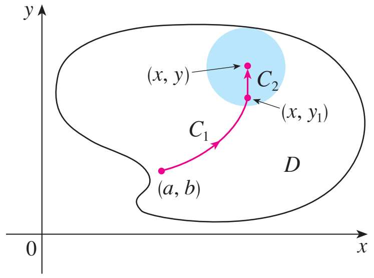


FIGURA 5

Logo,

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = \nabla f$$

o que mostra que $\mathbf{F}$ é conservativo. ■

A questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial $\mathbf{F}$ é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ é conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja,

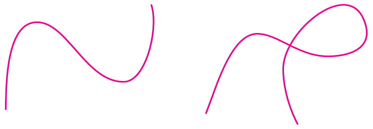
$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

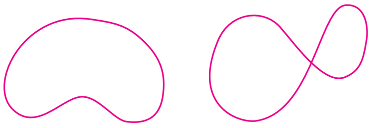
5 **Teorema** Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



simples,
não fechada

não simples,
não fechada



simples,
fechada

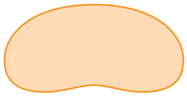
não simples,
fechada

FIGURA 6
Tipos de curva

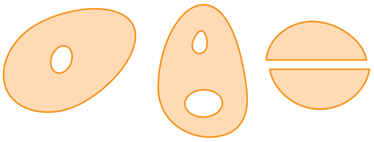
A recíproca do Teorema 5 só é verdadeira para um tipo especial de região. Para explicarmos isso, precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva fechada simples, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]

No Teorema 4 precisamos de região conexa por caminhos. Para o próximo teorema, precisaremos de uma condição mais forte. Uma **região simplesmente conexa** no plano é uma região conexa por caminhos D tal que toda curva fechada simples em D inclui apenas os pontos que estão em D. Observe a partir da Figura 7 que, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém nenhum buraco e não podem consistir em duas regiões separadas.

Para regiões simplesmente conexas podemos agora enunciar a recíproca do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é conservativo. A demonstração será esboçada na próxima seção, como consequência do Teorema de Green.



região simplesmente conexa



regiões que não são simplesmente conexas

FIGURA 7

6 **Teorema** Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D. Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o } D$$

Então $\mathbf{F}$ é conservativo.

EXEMPLO 2 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Sejam $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, **F** não é conservativo.

EXEMPLO 3 Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO Seja $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Além disso, o domínio de **F** é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$), que é aberto e simplesmente conexo. Portanto, podemos aplicar o Teorema 6 e concluir que **F** é conservativo.

No Exemplo 3, o Teorema 6 diz que **F** é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. A demonstração do Teorema 4 nos dá uma pista de como encontrar f. Usamos "integração parcial", como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4
(a) Se $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, encontre uma função de f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
(b) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

SOLUÇÃO
(a) Do Exemplo 3 sabemos que **F** é conservativo e, assim, existe uma função f com $\nabla f = \mathbf{F}$, ou seja,

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy \tag{7}$$

$$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2 \tag{8}$$

Integrando $\boxed{7}$ com relação a x, obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2 y + g(y) \tag{9}$$

Observe que a constante de integração é uma constante em relação a x, ou seja, uma função de y, que chamamos $g(y)$. Em seguida, derivamos ambos os lados de $\boxed{9}$ em relação a y:

$$f_y(x, y) = x^2 + g'(y) \tag{10}$$

Comparando $\boxed{8}$ e $\boxed{10}$, vemos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y, obtemos

$$g(y) = -\,y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em $\boxed{9}$, temos

$$f(x, y) = 3x + x^2 y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicarmos o Teorema 2, devemos conhecer os pontos inicial e final de C, isto é, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$. Na expressão para $f(x, y)$ da parte (a), qualquer valor da constante K serve. Então tomemos $K = 0$. Assim, temos

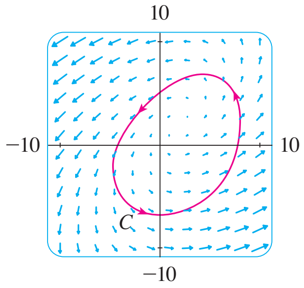


FIGURA 8

As Figuras 8 e 9 mostram os campos vetoriais dos Exemplos 2 e 3, respectivamente. Os vetores da Figura 8 que começam na curva fechada C parecem apontar aproximadamente para a mesma direção que C. Assim, parece que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ e portanto **F** não seria conservativo. Os cálculos no Exemplo 2 confirmam essa impressão. Alguns dos vetores perto das curvas C_1 e C_2 na Figura 9 apontam aproximadamente para a mesma direção que as curvas, enquanto outros apontam para a direção oposta. Portanto, parece razoável que as integrais de linha sobre toda curva fechada sejam 0. O Exemplo 3 mostra que, de fato, **F** é conservativo.

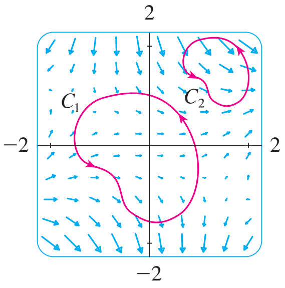


FIGURA 9

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esse método é mais curto que o método direto de cálculo para as integrais de linha que aprendemos na Seção 16.2.

Um critério para determinar se um campo vetorial **F** em $\mathbb{R}^3$ é conservativo é dado na Seção 16.5. Entretanto, o exemplo seguinte demonstra que a técnica para encontrar a função potencial é da mesma forma que nos campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, encontre uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Se existe tal função f, então

$$\boxed{11} \qquad f_x(x, y, z) = y^2$$

$$\boxed{12} \qquad f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

$$\boxed{13} \qquad f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Integrando $\boxed{11}$ em relação a x, obtemos

$$\boxed{14} \qquad f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

onde $g(y, z)$ é uma constante em relação a x. Em seguida, derivando $\boxed{14}$ em relação a y, temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

e, comparando com $\boxed{12}$ vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ e reescrevemos $\boxed{14}$ como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente, derivando em relação a z e comparando com $\boxed{13}$, obtemos $h'(z) = 0$ e, portanto, $h(z) = K$, uma constante. A função desejada é

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

É fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Conservação de Energia

Vamos aplicar as ideias deste capítulo a um campo de força contínuo **F** que move um objeto ao longo de um caminho C dado por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto terminal de C. De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton (ver Seção 13.4), a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ a um ponto em C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela a equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Assim, o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt \qquad \text{(Teorema 13.2.3, Fórmula 4)}$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt = \frac{m}{2} \Big[|\mathbf{r}'(t)|^2\Big]_a^b \qquad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)}$$

$$= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2\right)$$

Portanto,

$$\boxed{15} \qquad W = \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}\,m\,|\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

$$\boxed{16} \qquad W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças conservativo, ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto de (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, portanto temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

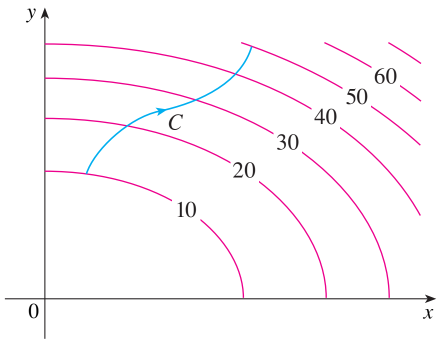
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei da Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas

$$x = t^2 + 1, \qquad y = t^3 + t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

y x	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservador. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4\,xy + 3)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^{-2})\,\mathbf{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\,\mathbf{j},\ y < 0$

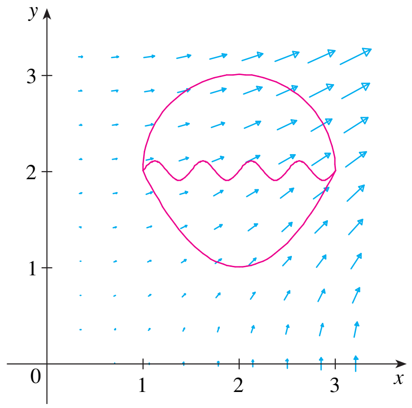
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \operatorname{senh} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\,\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

12–18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$,
C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t,\ t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2e^{xy}\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2)\,\mathbf{i} + 2\,xyz\,\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2z)\,\mathbf{k}$,
C: $x = \sqrt{t}$, $y = t + 1$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + xye^{xz}\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (x \cos y + \cos z)\,\mathbf{j} - y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

19–20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \operatorname{tg} y\,dx + x \sec^2 y\,dy$,
C é qualquer caminho de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$,
C é qualquer caminho de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

21. Suponha que você seja solicitado a determinar a curva que exige o mínimo de trabalho para um campo de força **F** para mover uma partícula de um ponto a outro ponto. Você decide verificar primeiro se **F** é conservativo, e de fato verifica-se que ela é. Como você responde à solicitação?

22. Suponhamos que uma experiência determine que a quantidade de trabalho necessária para um campo de força **F** para mover uma partícula do ponto $(1, 2)$ para o ponto de $(5, -3)$ ao longo de uma curva C_1 é de 1,2 **J** e do trabalho realizado por **F** em mover a partícula ao longo de outra curva C_2 entre os mesmos dois pontos é de 1,4 **J**. O que você pode dizer sobre **F**? Por quê?

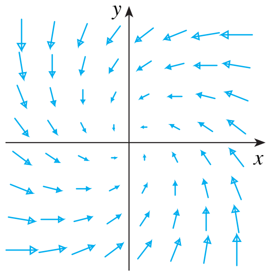
23–24 Determine o trabalho realizado pelo campo de força **F** ao mover um objeto de P para Q.

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $\quad P(1, 1)$, $Q(2, 4)$

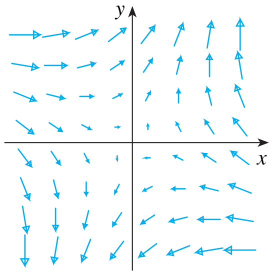
24. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\,\mathbf{i} - xe^{-y}\,\mathbf{j}$; $\quad P(0, 1)$, $Q(2, 0)$

25–26 A partir do gráfico de **F** você diria que o campo é conservativo? Explique.

25.



26.



SCA **27.** Se $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x \cos y)\,\mathbf{j}$, use um gráfico para conjecturar se **F** é conservativo. Então, determine se sua conjectura estava correta.

28. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Encontre curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.
(a) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use o Exercício 29 para mostrar que a integral de linha $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ não é independente do caminho.

31–34 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo por caminhos e (c) simplesmente conexo.

31. $\{(x, y) \mid 0 < y < 3\}$ $\qquad$ **32.** $\{(x, y) \mid 1 < |x| < 2\}$

33. $\{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\}$

34. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (2, 3)\}$

35. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [*Dica*: Calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isto contradiz o Teorema 6?

36. (a) Suponha que **F** seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\,\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por **F** ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo de quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 na Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1{,}52 \times 10^8$ km do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1{,}47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

(b) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\varepsilon = 8{,}985 \times 10^9$.)

16.4 Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C. (Veja a Figura 1. Assumimos que D é constituído por todos os pontos dentro de C, bem como todos os pontos de C.) Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C refere-se ao *sentido anti-horário* de C, percorrido uma só vez. Assim, se C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando $\mathbf{r}(t)$ percorre C. (Veja a Figura 2.)

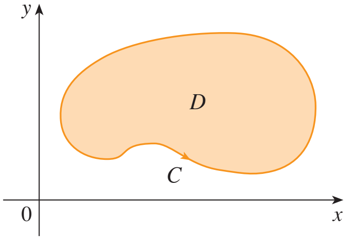


FIGURA 1

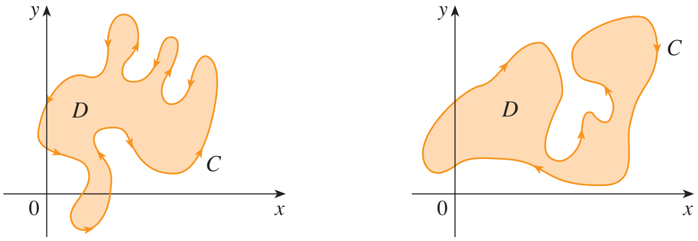


FIGURA 2 (a) Orientação positiva (b) Orientação negativa

Lembre-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$.

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int\!\!\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

OBSERVAÇÃO A notação

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{ou} \qquad \ointctrclockwise_C P\,dx + Q\,dy$$

é algumas vezes usada para indicar que a integral de linha é calculada usando a orientação positiva da curva fechada C. Outra notação para a curva na fronteira de D, positivamente orientada e ∂D, daí a equação do Teorema de Green pode ser escrita como

$$\boxed{1} \qquad \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

O Teorema de Green pode ser olhado como o correspondente do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais duplas. Compare a Equação 1 com o enunciado da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas (F', $\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) do lado esquerdo da equação. E em ambos os casos, o lado direito envolve os valores das funções originais (F, Q e P) apenas na fronteira do domínio. (No caso unidimensional, o domínio é um intervalo $[a, b]$ cuja fronteira consiste em apenas dois pontos, a e b.)

O Teorema de Green não é fácil de demonstrar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma demonstração para o caso especial onde a região é tanto de tipo I como de tipo II (veja a Seção 15.3). Chamamos tais regiões de **regiões simples**.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN NOS CASOS ONDE *D* É UMA REGIÃO SIMPLES Observe que o Teorema de Green estará demonstrado se mostrarmos que

$$\boxed{2} \qquad \int_C P\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

e

$$\boxed{3} \qquad \int_C Q\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

George Green

O teorema de Green tem esse nome por causa do cientista autodidata inglês George Green (1793-1841). Ele trabalhou em tempo integral na padaria de seu pai a partir dos 9 anos de idade e aprendeu sozinho a matemática em livros da biblioteca. Em 1828, Green publicou *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, aos 40 anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lorde Kelvin) encontrou uma cópia dos ensaios de Green, percebeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu estudo serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

Vamos demonstrar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\boxed{4} \quad \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\, dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união das quatro curvas C_1, C_2, C_3 e C_4 mostradas na Figura 3. Sobre C_1 tomamos x como parâmetro e escrevemos as equações paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Logo,

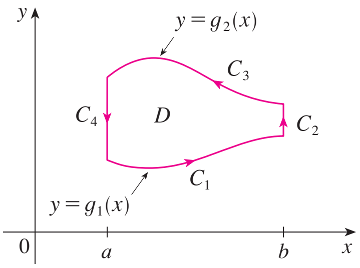


FIGURA 3

$$\int_{C_1} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita, então podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Portanto,

$$\int_{C_3} P(x, y)\, dx = -\int_{-C_3} P(x, y)\, dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\, dx$$

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante e, assim, $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y)\, dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y)\, dx$$

Portanto,

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx + \int_{C_3} P(x, y)\, dx + \int_{C_4} P(x, y)\, dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\, dx$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y)\, dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

A Equação 3 pode ser demonstrada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II (veja o Exercício 30). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green.

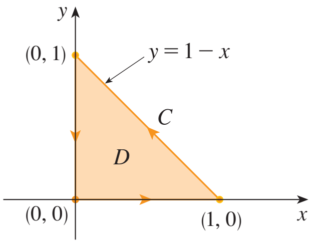


FIGURA 4

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C x^4\, dx + xy\, dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1), e de (0, 1) a (0, 0).

SOLUÇÃO Apesar desta integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\int_C x^4\, dx + xy\, dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3 \Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

EXEMPLO 2 Calcule $\oint_C (3y - e^{\sin x})\, dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy\ dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^{\sin x})\, dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3y - e^{\sin x}\right) \right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3)\, r\, dr\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\, dr = 36\pi$$

Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que D é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_D 4\, dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

Nos Exemplos 1 e 2, consideramos que a integral dupla era mais fácil de calcular que a integral de linha. (Tente configurar a integral de linha no Exemplo 2 e em breve você vai ser convencido!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesses casos, usaremos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo, se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C, então o Teorema de Green fornece

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\, dx + Q\, dy = 0$$

não importando quais os valores das funções P e Q em D.

Outra aplicação da direção inversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1\, dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2}y$$
$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2}x$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D:

$$\boxed{5} \qquad \boxed{A = \oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx}$$

EXEMPLO 3 Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \text{ sen } t$, onde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t)\, dt - (b \text{ sen } t)(-a \text{ sen } t)\, dt$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

A fórmula 5 pode ser usada para explicar como planímetros trabalham. Um **planímetro** é um instrumento mecânico usado para medir a área de uma região, traçando a curva limite. Esses dispositivos são úteis em todas as ciências: em biologia para medir a área de folhas ou asas, na medicina para medir o tamanho da secção transversal de órgãos ou tumores, em silvicultura, para estimar o tamanho das regiões florestais a partir de fotografias.

A Figura 5 mostra o funcionamento de um planímetro polar: o polo é fixo e, como o traçador é movido ao longo da curva limite da região, a roda desliza parcialmente e parcialmente rola perpendicular ao braço do traçador. O planímetro mede a distância a que a roda gira e é proporcional à área da região fechada. A explicação como consequência de Fórmula 5 pode ser encontrada nos seguintes artigos:

- R. W. Gatterman, "The planimeter as an example of Green's Theorem". *Amer. Mat. Monthly*, Vol. 88 (1981), p. 701– 4.
- Tanya Leise, "As the planimeter wheel turns". *College Math. Journal*, Vol. 38 (2007), p. 24 –31.

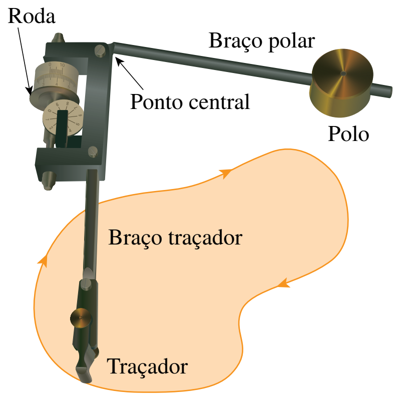


FIGURA 5
Um planímetro polar Keuffel e Esser

Versões estendidas do Teorema de Green

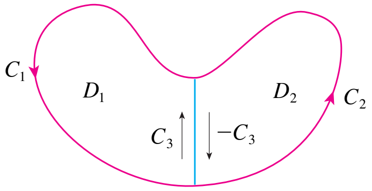


FIGURA 6

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green somente para o caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo, se D é uma região como a mostrada na Figura 6, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$; portanto, aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$ uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

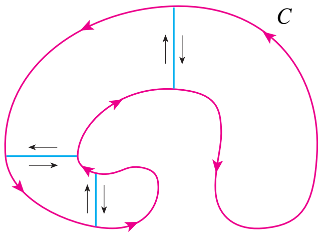


FIGURA 7

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não se sobreponham (veja a Figura 7).

EXEMPLO 4 Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

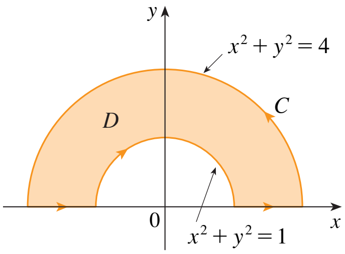


FIGURA 8

SOLUÇÃO Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide em duas regiões simples (veja a Figura 8). Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\begin{aligned}
\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\
&= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta)\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

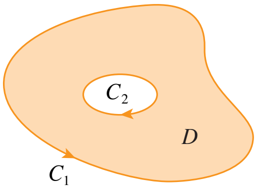


FIGURA 9

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 9 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2. Nós assumimos que estas curvas de contorno são orientadas de modo que a região D está sempre do lado esquerdo enquanto a curva C é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1, mas no sentido horário para o interior da curva C_2. Se dividirmos D em duas regiões D' e D'', pela introdução das retas mostradas na Figura 10, e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'', obteremos

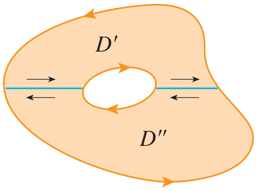


FIGURA 10

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\
&= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy
\end{aligned}$$

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

que é o Teorema de Green para a região D.

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

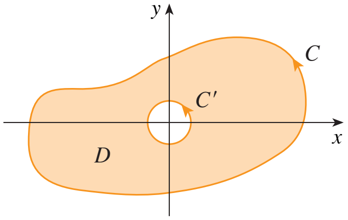


FIGURA 11

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Então, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a, onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contido em C (ver Figura 11). Seja D a região limitada por C e C'. Então a orientação positiva do limite é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0$$

Logo,
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

isto é,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t) + (a\cos t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$ ■

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado enunciado na seção anterior.

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 16.3.6 Assumimos que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D, que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C, o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em diversas curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C. Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue então que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo. ■

16.4 Exercícios

1–4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y)\,dx + (x + y)\,dy$,
C é o círculo com centro na origem e raio 2

2. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$,
C é o retângulo com vértices (0, 0) (3, 0), (3, 1) e (0, 1)

3. $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$,
C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)

4. $\oint_C x^2y^2\,dx + xy\,dy$, C consiste no arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) e os segmentos de reta de (1, 1) a (0, 1) e de (0, 1) a (0, 0)

5–10 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

5. $\int_C xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$,
C é o triângulo com vértices (0, 0), (2, 2) e (2, 4)

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

6. $\int_C \cos y\, dx + x^2 \operatorname{sen} y\, dy$,
C é o retângulo com vértices (0, 0), (5, 0), (5, 2) e (0, 2)

7. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)\, dy$,
C é o limite da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

8. $\int_C xe^{-2x}\, dx + (x^4 + 2x^2 y^2)\, dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

9. $\int_C y^3\, dx - x^3\, dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C \left(1 - y^3\right) dx + \left(x^3 + e^{y^2}\right) dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$

11–14 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y \cos x - xy \operatorname{sen} x,\ xy + x \cos x \rangle$,
C é o triângulo de (0, 0) a (0, 4) a (2, 0) a (0, 0)

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^{-x} + y^2,\ e^{-y} + x^2 \rangle$,
C consiste no arco da curva $y = \cos x$ de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ e o segmento de reta de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y,\ x \operatorname{sen} y \rangle$,
C é o círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado no sentido horário

14. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \sqrt{x^2 + 1},\ \operatorname{tg}^{-1} x \right\rangle$, C é o triângulo de (0, 0) a (1, 1) a (0, 1) a (0, 0)

SCA **15–16** Verifique o Teorema de Green usando um sistema de computação algébrica para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

15. $P(x, y) = y^2 e^x$, $\quad Q(x, y) = x^2 e^y$,
C consiste no segmento de reta de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ seguido pelo arco da parábola $y = 2 - x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$

16. $P(x, y) = 2x - x^3 y^5$, $\quad Q(x, y) = x^3 y^8$,
C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x para (1, 0), em seguida ao longo de um segmento de reta até (0, 1), e então de volta à origem ao longo do eixo y.

18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x para (2, 0), e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x,\ x^3 + 3xy^2 \rangle$.

19. Use uma das fórmulas em $\boxed{5}$ para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada *epicicloide*, com equações paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$. Faça o gráfico da epicicloide e use $\boxed{5}$ para calcular a área da região que ela envolve.

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

$$\int_C x\, dy - y\, dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, em sentido anti-horário, são $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ mostre que a área do polígono é

$$A = \tfrac{1}{2}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots \right.$$
$$\left. + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\right]$$

(c) Encontre a área do pentágono com vértices (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho fechado simples C no plano xy. Utilize o Teorema de Green para demonstrar que as coordenadas do centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2\, dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2\, dx$$

onde A é a área de D.

23. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide de um quarto de uma região circular de raio a.

24. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide da região triangular de vértices (0, 0), $(a, 0)$ e (a, b), onde $a > 0$ e $b > 0$.

25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C. Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3\, dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3\, dy$$

26. Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante ρ em relação a um diâmetro. (Compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5.)

27. Use o método do Exercício 5 para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy\,\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\,\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

e C é qualquer curva fechada simples positivamente orientada que envolve a origem.

28. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y,\ 3x - y^2 \rangle$ e C é a fronteira positivamente orientada de uma região D que tem área 6.

29. Se $\mathbf{F}$ é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passe pela origem e nem a circunde.

30. Complete a demonstração do Teorema de Green demonstrando a Equação 3.

31. Utilize o Teorema de Green para demonstrar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.10.9) para o caso onde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\, dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Aqui, R é a região do plano xy que corresponde à região S no plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$. [*Dica*: Observe que o lado esquerdo é $A(R)$ e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv.]

16.5 Rotacional e Divergente

Nesta seção, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais e que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

Rotacional

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boxed{1} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Para auxiliarmos na memorização, vamos reescrever a Equação 1 usando notação de operadores. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Quando ele opera sobre uma função escalar, produz o gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial $\mathbf{F}$ como segue:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \operatorname{rot}\mathbf{F}
\end{aligned}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}}$$

EXEMPLO 1 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

SOLUÇÃO Usando a Equação 2, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k} \\
&= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k} \\
&= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

SCA A maioria dos sistemas de computação algébrica tem comandos para calcular rotacional e divergência de campos vetoriais. Se você tem acesso a um SCA, use esses comandos para verificar as respostas dos exemplos e exercícios desta seção.

Lembre-se de que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$, de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é **0**.

3 **Teorema** Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO Temos

Observe a semelhança com o que sabemos da Seção 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para cada vetor tridimensional $\mathbf{a}$.

$$\text{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

pelo Teorema de Clairaut. ■

Como um campo vetorial conservativo é da forma $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

Compare isso com o Exercício 29 da Seção 16.3

$$\text{Se } \mathbf{F} \text{ é conservativo, então rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

E assim obtemos um modo de verificar que um campo vetorial não é conservativo.

EXEMPLO 2 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não é conservativo.

SOLUÇÃO No Exemplo 1, mostramos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Isso mostra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ e portanto, pelo Teorema 3, $\mathbf{F}$ não é conservativo. ■

Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se $\mathbf{F}$ for definido em todo o espaço, a recíproca vale. (Mais especificamente, a recíproca vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, "não apresenta furos".) O teorema 4 é a versão tridimensional do Teorema 16.3.6. Sua demonstração requer o teorema de Stokes e será esboçada no final da Seção 16.8.

4 **Teorema** Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ será um campo vetorial conservativo.

EXEMPLO 3

Mostre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

é um campo vetorial conservativo.

(b) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUÇÃO

(a) Calculemos o rotacional de $\mathbf{F}$:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{matrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\,\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

Como rot **F** = **0** e o domínio de **F** é $\mathbb{R}^3$, **F** é um campo vetorial conservativo pelo Teorema 4. (b) A técnica para encontrar *f* foi dada na Seção 16.3. Temos

5 $$f_x(x, y, z) = y^2z^3$$

6 $$f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

7 $$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Integrando $\boxed{5}$ em relação a *x*, obtemos

8 $$f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$$

Derivando $\boxed{8}$ em relação a *y*, obtemos $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$. Comparando com $\boxed{6}$, obtemos $g_y(y, z) = 0$. Assim, $g(y, z) = h(z)$ e

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Então $\boxed{7}$ fornece $h'(z) = 0$. Portanto,

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão será explicada no Exercício 37. Outra ocorre quando **F** representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (veja o Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas perto de (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de rot **F** (x, y, z), e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se rot **F** = **0** no ponto *P*, então o fluido é isento de rotações em *P* e **F** é chamado **irrotacional** em *P*. Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou redemoinho em *P*. Se rot **F** = **0**, uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se rot **F** ≠ **0**, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Veremos mais detalhes sobre essa explanação na Seção 16.8, como consequência do Teorema de Stokes.

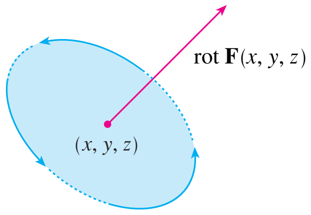


FIGURA 1

Divergente

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem, então o **divergente de F** é a função de três variáveis definida por

9 $$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Observe que rot **F** é um campo vetorial, mas div **F** é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, o divergente de **F** pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e **F**:

10 $$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

EXEMPLO 4 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, determine div **F**.

SOLUÇÃO Pela definição de divergente (Equação 9 ou 10), temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

Se **F** é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$, então rot **F** também é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$. Como tal, podemos calcular seu divergente. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

11 **Teorema** Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e *P*, *Q* e *R* têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO Usando as definições de divergente e rotacional, temos

Observe a analogia com o produto misto: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{div rot } \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

pois os termos se cancelam aos pares, pelo Teorema de Clairaut. ■

EXEMPLO 5 Mostre que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial, ou seja, $\mathbf{F} \neq \text{rot } \mathbf{G}$.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 mostramos que

$$\text{div } \mathbf{F} = z + xz$$

e, portanto, $\mathbf{F} \neq 0$. Se fosse verdade que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, então o Teorema 11 daria

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div rot } \mathbf{G} = 0$$

o que contradiz $\mathbf{F} \neq 0$. Portanto $\mathbf{F}$ não é o rotacional de outro campo vetorial. ■

A razão para essa interpretação de div $\mathbf{F}$ será explicada ao final da Seção 16.9 como consequência do Teorema do Divergente.

Novamente, a razão para o nome *divergente* pode ser entendida no contexto da mecânica dos fluidos. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a velocidade de um fluido (ou gás), então div $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa a taxa de variação total (com relação ao tempo) da massa do fluido (ou gás) escoando do ponto (x, y, z) por unidade de volume. Em outras palavras, div $\mathbf{F}(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z). Se $\mathbf{F} = 0$, então $\mathbf{F}$ é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f. Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\text{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão frequentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

é chamado **operador de Laplace** por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

em termos de suas componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil futuramente. Consideramos uma região plana D, sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Em seguida, consideramos o campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. A sua integral de linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

e, considerando $\mathbf{F}$ como um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ com terceira componente 0, temos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Portanto,

$$(\text{rot}\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot}\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA \tag{12}$$

A Equação 12 expressa a integral de linha da componente tangencial de **F** ao longo de C como uma integral dupla da componente vertical rotacional **F** sobre a região D delimitada por C. Vamos deduzir, agora, uma fórmula semelhante, envolvendo a componente *normal* de **F**.

Se C é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

então o vetor tangente unitário (veja a Seção 13.2) é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

Você pode verificar que o vetor normal unitário externo a C é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(Veja a Figura 2). Então, da Equação 16.2.3, temos

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\, y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\, x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt - Q(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt \\
&= \int_C P\, dy - Q\, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA
\end{aligned}$$

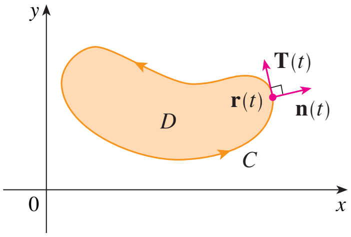


FIGURA 2

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é o divergente de **F**. Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div}\ \mathbf{F}(x, y)\, dA} \tag{13}$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de **F** ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de **F** na região D delimitada por C.

16.5 Exercícios

1–8 Determine (a) o rotacional e (b) o divergente do campo vetorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + yze^x\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen}\, yz\,\mathbf{i} + \text{sen}\, zx\,\mathbf{j} + \text{sen}\, xy\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\,\text{sen}\, z\,\mathbf{j} + y\,\text{tg}^{-1}(x/z)\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x\,\text{sen}\, y, e^y\,\text{sen}\, z, e^z\,\text{sen}\, x\rangle$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle \dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x} \right\rangle$

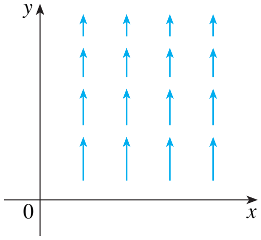
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

9–11 O campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais (em outras palavras, $\mathbf{F}$ é independente de z e sua componente z é 0).

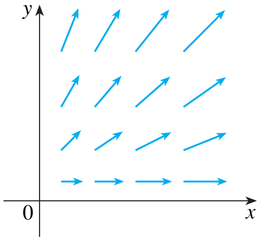
(a) O div $\mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Explique.

(b) Determine se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção rot $\mathbf{F}$ aponta?

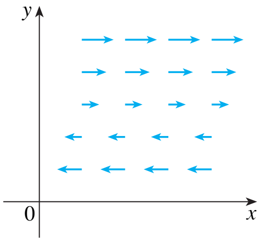
9.



10.



11.



---

12. Seja f um campo escalar e $\mathbf{F}$ um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f

(b) grad f

(c) div $\mathbf{F}$

(d) rot(grad f)

(e) grad $\mathbf{F}$

(f) grad(div $\mathbf{F}$)

(g) div(grad f)

(h) grad(div f)

(i) rot(rot $\mathbf{F}$)

(j) div(div $\mathbf{F}$)

(k) (grad f) $\times$ (div $\mathbf{F}$)

(l) div(rot(grad f))

13–18 Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2z^2\,\mathbf{i} + 2x^2yz^3\,\mathbf{j} + 3x^2y^2z^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + y\cos z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\,\mathbf{i} + xze^{yz}\,\mathbf{j} + xye^{yz}\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} yz\,\mathbf{i} + ze^x\cos yz\,\mathbf{j} + ye^x\cos yz\,\mathbf{k}$

---

19. Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy\rangle$? Explique.

20. Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle xyz, -y^2z, yz^2\rangle$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

22. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

é incompressível.

23–29 Demonstre a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ forem campos vetoriais, então $f\,\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ e $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ serão definidos por

$$(f\,\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

23 $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\,\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\,\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

30–32 Sejam $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique as identidades.

(a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(b) $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$

(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique as identidades.

(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$

(b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$

(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$

(d) $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Se $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, determine div $\mathbf{F}$. Existe um valor de p para que div $\mathbf{F} = 0$?

---

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para demonstrar a **primeira identidade de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g\,dA$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}}g$ aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal $\mathbf{n}$ e é chamada **derivada normal** de g.)

34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para demonstrar a **segunda identidade de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

35. Lembre-se, da Seção 14.3, de que uma função g é chamada *harmônica* em D se satisfaz a equação de Laplace, isto é, $\nabla^2 g = 0$ em D. Utilize primeira identidade de Green (com as mesmas hipóteses que no Exercício 33) para mostrar que se g é harmônica em D, então $\oint_C D_{\mathbf{n}}g\,ds = 0$. Aqui, $D_{\mathbf{n}}g$ é a derivada normal de g definida no Exercício 33.

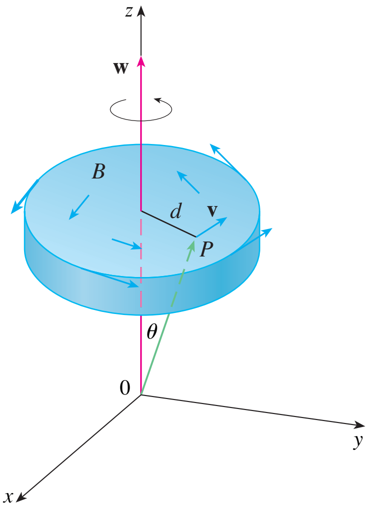
36. Use a primeira identidade de Green para mostrar que se f for harmônica em D, e se $f(x, y) = 0$ na curva limite C, então $\iint_D |\nabla f|^2\,dA = 0$. (Suponha que são válidas as mesmas hipóteses que no Exercício 33.)

37. Este exercício ilustra a relação entre vetor rotacional e rotações. Seja B ser um corpo rígido girando sobre o eixo z. A rotação pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, onde ω é a velocidade angular de B, ou seja, a velocidade tangencial de qualquer ponto P em B dividida pela distância d do eixo de rotação. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ o vetor posição de P.

(a) Considerando o ângulo θ da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.

(b) Mostre que $\mathbf{v} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}$.

(c) Mostre que rot $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico **E** e o campo magnético **H**, quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

onde c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

(a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2 \mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Sugestão:* Use o Exercício 29.]

(d) $\nabla^2 \mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Vimos que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfazem a equação rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ satisfazem a equação div $\mathbf{F} = 0$ (supondo a continuidade das correspondentes derivadas parciais). Isto sugere a pergunta: existe alguma equação que todas as funções da forma $f = \operatorname{div} \mathbf{G}$ devam satisfazer? Mostre que a resposta para essa pergunta é "Não" demonstrando que *toda* função contínua f em $\mathbb{R}^3$ é a divergência de algum campo de vetores. [*Dica*: Seja $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0\rangle$, onde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z)\,dt$.]

16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

Até agora temos considerado tipos especiais de superfícies: cilindros, superfícies quádricas, gráficos de funções de duas variáveis e superfícies de nível de funções de três variáveis. Aqui, usaremos funções vetoriais para descrever superfícies mais gerais, chamadas *superfícies parametrizadas* e calcularemos suas áreas. A seguir, tomaremos a fórmula para a área de superfícies gerais e veremos como se aplica a superfícies especiais.

Superfícies Parametrizadas

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v. Suponhamos que

$$\boxed{1} \qquad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv. Então x, y e z, os componentes de funções de $\mathbf{r}$, serão funções das duas variáveis u e v com domínio D. O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\boxed{2} \qquad x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

e (u, v) varia ao longo de D, é chamado de **superfície parametrizada** S e Equações 2 são chamados **equações parametrizadas** de S. Cada escolha de u e v resulta um ponto em S; fazendo todas as escolhas, temos todos os pontos de S. Em outras palavras, a superfície é traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ enquanto (u, v) se move ao longo da região D. (Veja a Figura 1.)

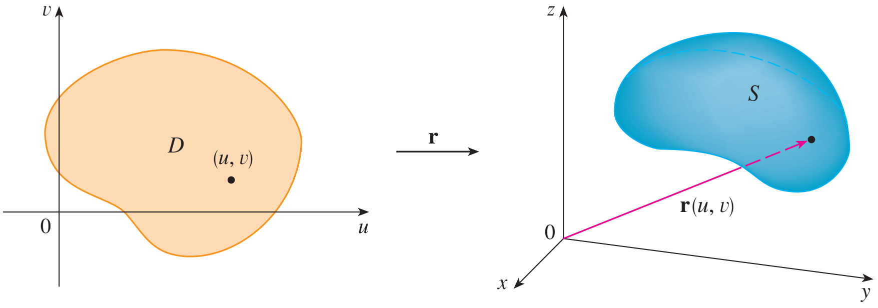


FIGURA 1
Uma superfície parametrizada

EXEMPLO 1 Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\,\text{sen}\,u$$

então, para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\,\text{sen}^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

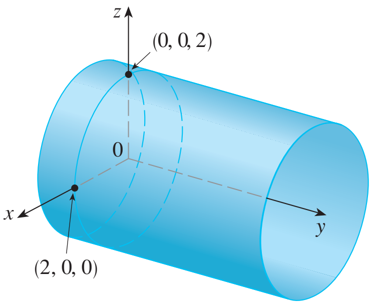


FIGURA 2

No Exemplo 1 não existiam restrições quanto aos parâmetros u e v e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v, escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

Então $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

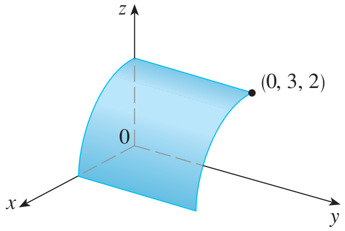


FIGURA 3

Se uma superfície parametrizada S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S, uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv. Se mantivermos u constante, impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v que define uma curva C_1 sobre S. (Veja a Figura 4.)

TEC *Visual 16.6* mostra versões animadas de Figuras 4 e 5, com o movimento das curvas de grade, para diversas superfícies parametrizadas.

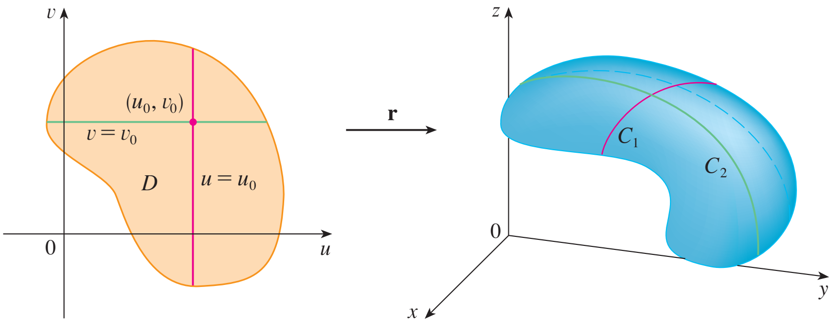


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S. Chamamos essas curvas **curva da grade**. (No Exemplo 1, por exemplo, as curvas da grade obtidas tornando u constante são linhas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências.) Na verdade, quando um computador elabora em gráfico uma superfície parametrizada, que normalmente apresenta a superfície traçando as curvas da grade, como podemos ver no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Use um sistema de computação algébrica para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \text{sen } v) \cos u,\ (2 + \text{sen } v) \text{ sen } u,\ u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? Quais têm v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o pedaço da superfície com os parâmetros delimitados por $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificarmos as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \text{sen } v) \cos u \qquad y = (2 + \text{sen } v) \text{sen } u \qquad z = u + \cos v$$

Se v é constante, então sen v e cos v são constantes, portanto, as equações paramétricas se assemelham às da hélice no Exemplo 4 na Seção 13.1. Assim, as curvas de grade com v constante são as curvas em espiral na Figura 5. Deduzimos que as curvas de grade com u constante devem ser curvas que parecem círculos na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u constante, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valores de z variam de $u_0 - 1$ até $u_0 + 1$.

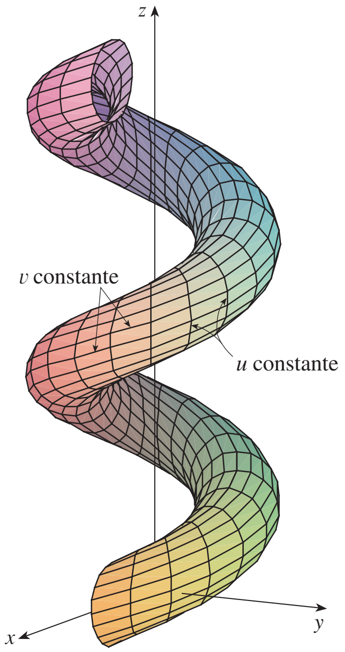


FIGURA 5

Nos Exemplos 1 e 2 nos foi dada uma equação vetorial e pedido o gráfico da superfície parametrizada correspondente. Nos exemplos seguintes, entretanto, teremos o problema mais desafiador de achar a função vetorial que representa uma superfície dada. No restante deste capítulo, teremos de fazer exatamente isso muitas vezes.

EXEMPLO 3 Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

SOLUÇÃO Se P é qualquer ponto no plano, podemos ir de P_0 até P movendo uma certa distância na direção de $\mathbf{a}$ e uma outra distância na direção de $\mathbf{b}$. Então, existem escalares u e v tais que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (A Figura 6 ilustra como isto funciona, por meio da lei do paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 46 na Seção 12.2.) Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

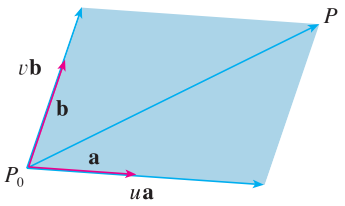


FIGURA 6

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, podemos escrever as equações paramétricas do plano pelo ponto (x_0, y_0, z_0) como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

EXEMPLO 4 Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos ϕ e θ das coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 15.9). Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 15.9.1), obtemos

$$x = a \text{ sen } \phi \cos \theta \qquad y = a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \qquad z = a \cos \phi$$

como equações parametrizadas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \text{ sen } \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

Temos $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os Polos Norte e Sul (veja a Figura 7).

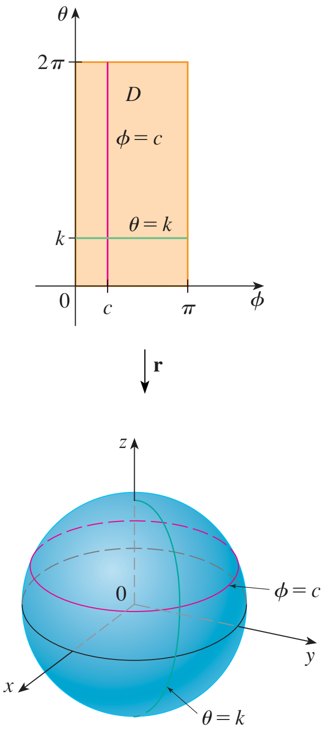


FIGURA 7

OBSERVAÇÃO Vimos no Exemplo 4 que as curvas de grade para uma esfera são curvas de latitude e longitude constantes. Para uma superfície parametrizada geral, estamos realmente fazendo um mapa e as curvas da grade são semelhantes a linhas de latitude e longitude. Descrever um ponto sobre uma superfície parametrizada (como o da Figura 5) dando valores específicos de u e v é como dar a latitude e a longitude de um ponto.

Um dos usos de superfícies parametrizadas é na computação gráfica. A Figura 8 mostra o resultado de tentar traçar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ resolvendo a equação para z e traçando os hemisférios de cima e de baixo separadamente. Parte da esfera parece estar ausente por causa do sistema de grade retangular utilizado pelo computador. A imagem, muito melhor na Figura 9, foi produzida por um computador, utilizando as equações parametrizadas encontradas no Exemplo 4.

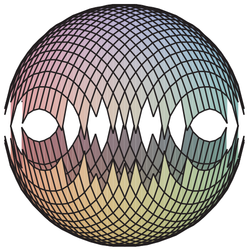


FIGURA 8

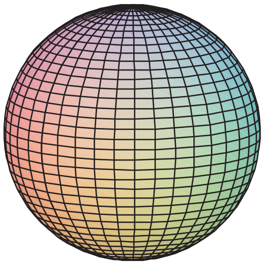


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Determine uma representação parametrizada do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação $r = 2$ em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros θ e z das coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2\cos\theta \qquad y = 2\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$. ■

EXEMPLO 6 Determine uma função vetorial que represente o paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{k}$$ ■

TEC Em *Module 16.6* você pode investigar várias famílias de superfícies parametrizadas.

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y, ou seja, com equação da forma $z = f(x, y)$, pode sempre ser olhada como uma superfície parametrizada, tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Representações parametrizadas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha das coordenadas polares r e θ. Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Assim, uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$$

onde $r \geqslant 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. ■

Para alguns propósitos, as representações parametrizadas das Soluções 1 e 2 são igualmente boas, mas a Solução 2 pode ser preferível em certas situações. Se estivermos interessados somente na parte do cone que está abaixo do plano $z = 1$, por exemplo, tudo que devemos fazer na Solução 2 é mudar o domínio do parâmetro para

$$0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Superfícies de Revolução

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada e, portanto, seus gráficos podem ser traçados usando-se um computador. Por exemplo, vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, sobre o eixo x, onde $f(x) \geqslant 0$. Seja θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 10. Se (x, y, z) é um ponto em S, então

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$

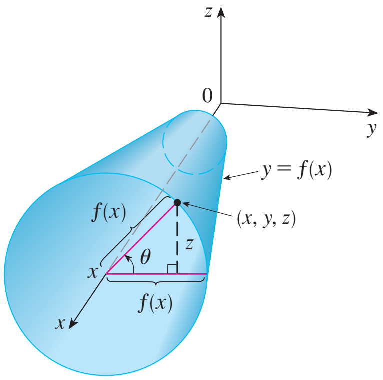


FIGURA 10

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S. O domínio do parâmetro é dado por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

EXEMPLO 8 Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela rotação da curva $y = \text{sen}\,x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ sobre o eixo x. Use essas equações para o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = \text{sen}\,x\cos\theta \qquad z = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\theta$$

e o domínio do parâmetro é $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Usando um computador para traçar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 11.

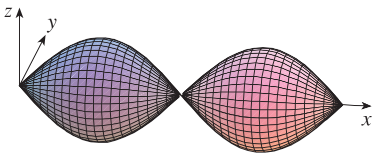


FIGURA 11

Podemos adaptar as Equações 3 para representar uma superfície obtida pela revolução em torno do eixo y ou do eixo z (veja o Exercício 30).

Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante usando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ torna-se uma função vetorial do parâmetro único v e define uma curva de grade C_1 em S. (Veja a Figura 12.) O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de $\mathbf{r}$ em relação a v:

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k} \tag{4}$$

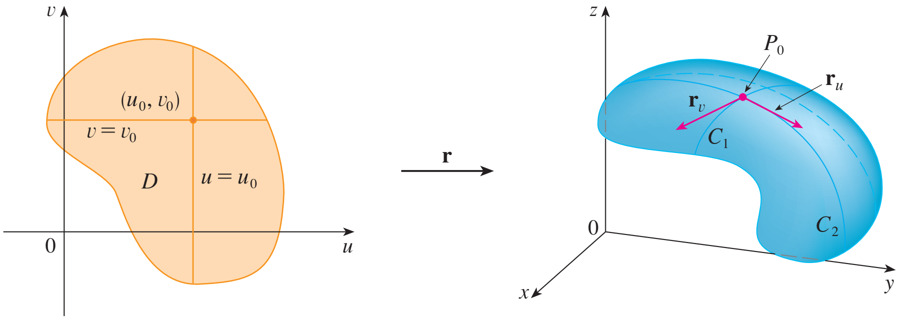


FIGURA 12

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S, e cujo vetor tangente em P_0 é

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k} \tag{5}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **suave** (sem "bicos"). Para uma superfície suave, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é o vetor normal ao plano tangente.

A Figura 13 mostra a superfície que se autointercepta no Exemplo 9 e seu plano tangente em (1, 1, 3).

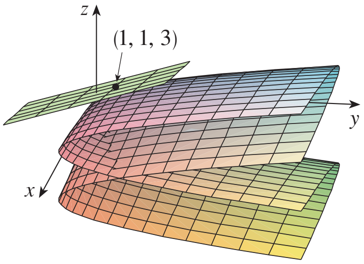


FIGURA 13

EXEMPLO 9 Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Observe que o ponto (1, 1, 3) corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Portanto, uma equação do plano tangente em (1, 1, 3) é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

ou $$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Área da Superfície

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada geral dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij}. Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto inferior esquerdo do retângulo R_{ij}. (Veja a Figura 14.)

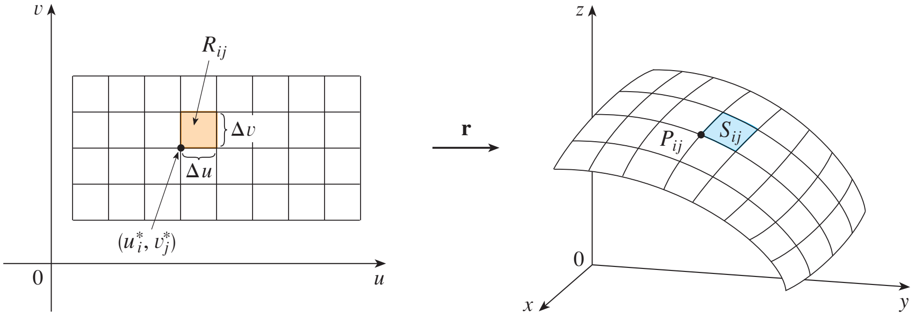


FIGURA 14
A imagem do sub-retângulo R_{ij} é o retalho S_{ij}

A parte S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Sejam

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.

A Figura 15(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 15(b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij}. A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u\,\mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\,\mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\;\Delta u\,\Delta v$$

e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\,\Delta u\,\Delta v$$

A intuição nos diz que essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv$. Isso justifica a seguinte definição:

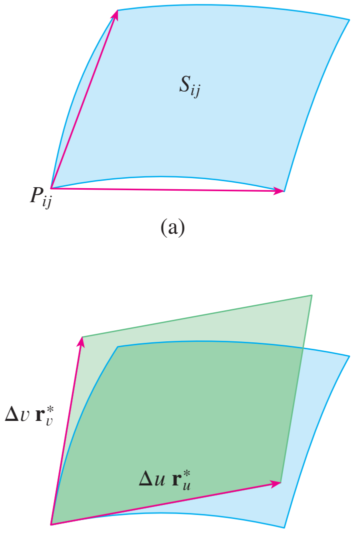


FIGURA 15
Aproximando um retalho por um paralelogramo

6 Definição Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

onde $\quad \mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$

EXEMPLO 10 Determine a área da esfera de raio a.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 encontramos a representação parametrizada

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Vamos calcular primeiro o produto cruzado dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_f \times \mathbf{r}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \ \cos \theta & a \cos \phi \ \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \phi \\ -a \operatorname{sen} \phi \ \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \ \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos \theta\,\mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \ \operatorname{sen} \theta\,\mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \ \cos \phi\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \ \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi} \\ &= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \ \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

uma vez que $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi \ d\phi\,d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \ d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

assim, $\qquad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

e

$$\boxed{7} \qquad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{matrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Então temos

$$\boxed{8} \qquad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

$$\boxed{9} \qquad \boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA}$$

Observe a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 9 e a fórmula do comprimento do arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

da Seção 8.1, no Volume I.

EXEMPLO 11 Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. (Veja a Figura 16.) Usando a Fórmula 9, temos

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

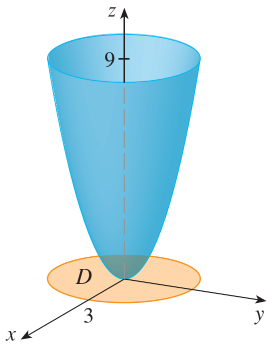


FIGURA 16

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície $\boxed{6}$ é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x, onde $f(x) \geqslant 0$ e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Para calcularmos a área da superfície S, precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\,\text{sen}\,\theta \\ 0 & -f(x)\,\text{sen}\,\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

E também

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\,\text{sen}^2\theta}$$

$$= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

porque $f(x) \geqslant 0$. Portanto, a área de S é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\, d\theta$$
$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Isso é precisamente a fórmula que usamos para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

16.6 Exercícios

1–2 Determine se os pontos P e Q estão na superfície dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v\rangle$
$P(7, 10, 4)$, $Q(5, 22, 5)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2\rangle$
$P(3, -1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$

3–6 Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + 3 \cos u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

5. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, t, t^2 - s^2\rangle$

6. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, \operatorname{sen} 2t, s^2, s \cos 2t\rangle$

7–12 Use um computador para traçar o gráfico da superfície parametrizada. Imprima o resultado e indique sobre essa impressão quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v\rangle$, $\quad -1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v^3, -v\rangle$, $\quad -2 \leqslant u \leqslant 2, -2 \leqslant v \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^5\rangle$, $\quad -1 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, \operatorname{sen}(u + v), \operatorname{sen} v\rangle$,
$-\pi \leqslant u \leqslant \pi, -\pi \leqslant v \leqslant \pi$

11. $x = \operatorname{sen} v$, $y = \cos u \operatorname{sen} 4v$, $z = \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen} 4v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, -\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$

12. $x = \operatorname{sen} u$, $\quad y = \cos u \operatorname{sen} v$, $\quad z = \operatorname{sen} v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

13–18 Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por I-VI e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$

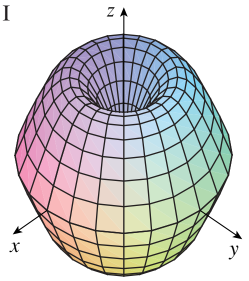
14. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$, $\quad -\pi \leqslant u \leqslant \pi$

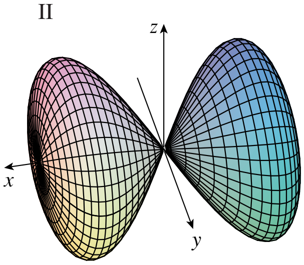
15. $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} 2v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} 2v\,\mathbf{k}$

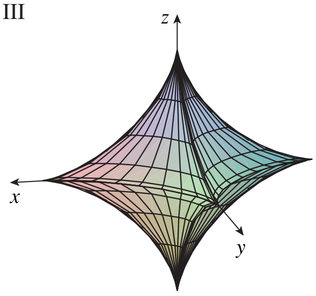
16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u$,
$y = (1 - u)(3 + \cos v) \operatorname{sen} 4\pi u$,
$z = 3u + (1 - u) \operatorname{sen} v$

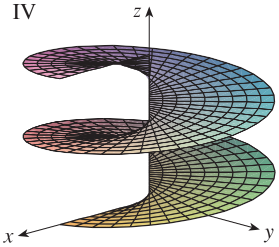
17. $x = \cos^3 u \cos^3 v$, $y = \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v$, $z = \operatorname{sen}^3 v$

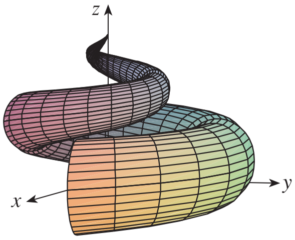
18. $x = (1 - |u|) \cos v$, $y = (1 - |u|) \operatorname{sen} v$, $z = u$

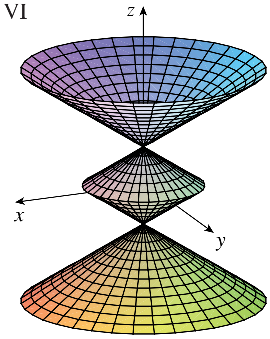
I


II


III


IV


V


VI


19–26 Determine uma representação parametrizada para a superfície.

19. O plano que passa pela origem que contém os vetores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

20. O plano que passa pelo ponto $(0, -1, 5)$ e contém os vetores $(2, 1, 4)$ e $(-3, 2, 5)$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

21. A parte do hiperboloide $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ que está em frente do plano yz

22. A parte do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ que se encontra à esquerda do plano xz

23. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se situa acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

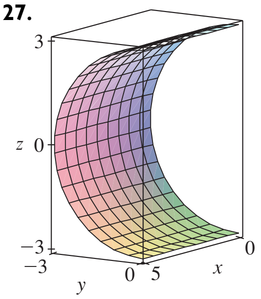
24. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $z = -2$ e $z = 2$

25. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$

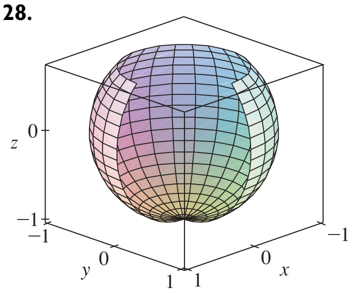
26. A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

SCA **27–28** Use um sistema de computação algébrica para produzir um gráfico semelhante ao das figuras.

27.



28.



29. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, em torno do eixo x e use-as para traçar o gráfico da superfície.

30. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, em torno do eixo y e use-as para traçar o gráfico da superfície.

31. (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos $\cos u$ por $\operatorname{sen} u$ e $\operatorname{sen} u$ por $\cos u$?
(b) O que acontece se substituirmos $\cos u$ por $\cos 2u$ e $\operatorname{sen} u$ por $\operatorname{sen} 2u$?

32. A superfície com as equações paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$

$$y = 2\operatorname{sen}\theta + r\cos(\theta/2)$$

$$z = r\operatorname{sen}(\theta/2)$$

onde $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, é chamada **Faixa de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície sob vários pontos de vista. O que há de estranho nela?

33–36 Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado.

33. $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v; \qquad (2, 3, 0)$

34. $x = u^2 + 1, \quad y = v^3 + 1, \quad z = u + v; \qquad (5, 2, 3)$

35. $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, v = \pi/3$

36. $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + \cos u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}; \quad u = \pi/6, v = \pi/6$

SCA **37–38** Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado. Desenhe a superfície e o plano tangente.

37. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\cos v\,\mathbf{k}$; $u = 1$, $v = 0$

38. $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} - u\,\mathbf{k}$; $(-1, -1, -1)$

39–50 Determine a área da superfície.

39. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante

40. A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v\rangle$ que é dada por $0 \leqslant u \leqslant 2$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$

41. A parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 3$

42. A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que se encontra entre o plano $y = x$ e o cilindro $y = x^2$

43. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

44. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$

45. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

46. A parte do paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$

47. A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que se encontra entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

48. O helicoide (ou rampa em espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

49. A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

50. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $0 < a < b$

51. Se a equação de uma superfície S é $z = f(x, y)$, onde $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, e você sabe que $|f_x| \leqslant 1$ e $|f_y| \leqslant 1$, o que você pode dizer sobre $A(S)$?

52–53 Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

52. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

53. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$

SCA **54.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

55. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com seis quadrados para estimar a área da superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.
SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

SCA **56.** Determine a área da superfície de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$,

$0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Dê sua resposta com precisão de quatro casas decimais.

SCA **57.** Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

58. (a) Determine, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

(b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um paraboloide elíptico e escreva outra integral dupla que forneça sua área.

(c) Use as equações paramétricas da parte (a) com $a = 2$ e $b = 3$ para traçar o gráfico da superfície.

SCA (d) Para o caso $a = 2$, $b = 3$, use um sistema de computação algébrica para achar a área da superfície com precisão de quatro casas decimais.

59. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$, representam um elipsoide.

(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsoide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

(c) Determine, mas não calcule, uma integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsoide da parte (b).

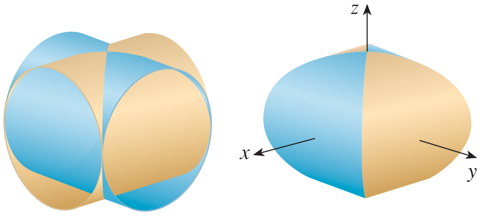
60. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$ representam um hiperboloide de uma folha.

(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperboloide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

(c) Determine, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperboloide da parte (b) que está entre os planos $z = -3$ e $z = 3$.

61. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$.

62. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.

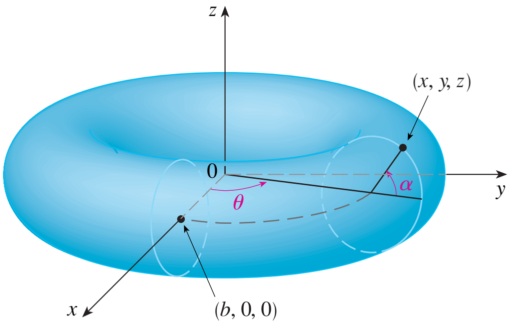


63. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

64. (a) Determine a representação parametrizada do toro obtido ao girar pelo eixo z o círculo no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [*Dica*: Tome-se como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]

(b) Use as equações paramétricas encontradas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de a e b.

(c) Use a representação parametrizada da parte (a) para achar a área do toro.



16.7 Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S. Definiremos a integral de superfície de f sobre S de tal forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área da superfície de S. Começamos com superfícies parametrizadas e trataremos em seguida o caso especial onde S é o gráfico de uma função de duas variáveis.

Superfícies parametrizadas

Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv. Então, a superfície S é dividida em retalhos correspondentes S_{ij}, como na Figura 1. Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retalho e formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

A seguir, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a **integral de superfície de *f* na superfície *S*** como

1 $$\boxed{\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}}$$

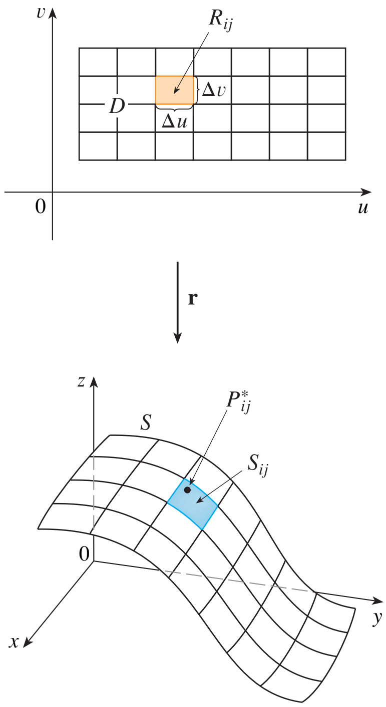


FIGURA 1

Nós assumimos que a superfície é coberta apenas uma vez quando (u, v) varia ao longo de D. O valor do integral de superfície não depende da parametrização usada.

Observe a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição de integral dupla (15.1.5).

Para calcularmos a integral de superfície na Equação 1, aproximamos a área do retalho ΔS_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente. Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u \Delta v$$

onde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij}. Se as componentes são contínuas e $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são não nulos e não paralelos no interior de D, pode ser mostrado, da Definição 1, mesmo quando D não é retangular, que

2 $$\boxed{\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA}$$

Compare com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Observe também que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

A Fórmula 2 permite calcular uma integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio do parâmetro D. Ao usar essa fórmula, lembre-se de que $f(\mathbf{r}(u, v))$ é avaliado ao escrever $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula $f(x, y, z)$.

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2\, dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação parametrizada

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

isto é, $$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}$$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \operatorname{sen}\phi$$

Portanto, pela Fórmula 2,

Aqui, usamos as identidades

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$
$$\operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

Em vez disso, poderíamos usar as Fórmulas 64 e 67 da Tabela de Integrais.

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\, dS &= \iint_D (\operatorname{sen}\phi \cos\theta)^2\, |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi)\, d\phi \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes àquelas das integrais que estudamos anteriormente. Por exemplo, se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tiver a forma de uma superfície S e se a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então o total da **massa** da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

e o **centro de massa** será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\, dS$$

Os momentos de inércia também podem ser definidos como antes (veja o Exercício 41).

Gráficos

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser considerada uma superfície parametrizada com equações parametrizadas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

e, então, temos

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

de modo que

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Logo, neste caso, a Fórmula 2 se torna

$$\boxed{\boxed{4} \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA}$$

Existem fórmulas análogas para quando for mais conveniente projetar S no plano yz ou no plano xz. Por exemplo, se S for a superfície com equação $y = h(x, z)$ e D for sua projeção no plano xz, então

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S y\, dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (Veja a Figura 2.)

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

a Fórmula 4 dá

$$\begin{aligned}\iint_S y\, dS &= \iint_D y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA \\ &= \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 dx\,\sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy \\ &= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

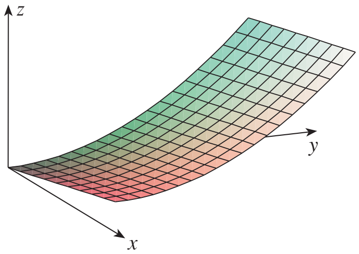


FIGURA 2

Se S é uma superfície suave por partes, ou seja, uma união finita de superfícies suaves $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\, dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\, dS$$

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_S z\,dS$, onde S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cujo fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no plano $z = 0$, e cujo topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2.

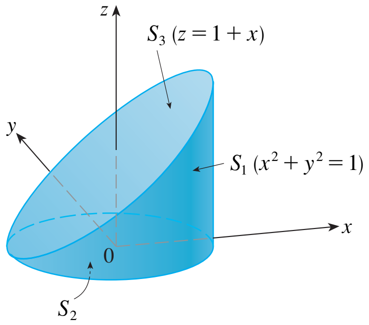


FIGURA 3

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 3 (trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S). Para S_1, usamos como parâmetros θ e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações parametrizadas como

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

onde $\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad$ e $\qquad 0 \leqslant z \leqslant 1 + x = 1 + \cos\theta$

Portanto,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

e $$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Então, a integral de superfície em S_1 é

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} z\,dS &= \iint_D z\,|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Como S_2 está no plano $z = 0$, temos

$$\iint_{S_2} z\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0$$

A superfície superior S_3 se encontra acima do disco D e faz parte do plano $z = 1 + x$. Assim, tomando $g(x, y) = 1 + x$ na Fórmula 4 e convertendo para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} z\,dS &= \iint_D (1 + x)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1 + 1 + 0}\;r\,dr\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S z\,dS &= \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS \\
&= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi
\end{aligned}$$

Superfícies Orientadas

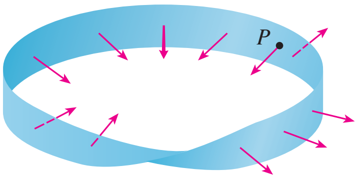


FIGURA 4
Uma faixa de Möbius

Para definir integrais de superfície de campos vetoriais, precisamos descartar superfícies não orientáveis tais como a faixa de Möbius mostrado na Figura 4. [Nomeado assim por causa do geômetra alemão August Möbius (1790–1868).] Você pode construir uma tomando uma faixa retangular longa de papel, dando-lhe uma meia-torção e juntando as arestas curtas, como na Figura 5. Se uma formiga andasse sobre uma faixa de Möbius começando no ponto *P*, ela acabaria do "outro lado" da faixa (ou seja, com sua parte de cima apontando para o sentido oposto). Então, se a formiga continuasse a andar na mesma direção, ela acabaria de volta no mesmo ponto *P* sem ter nunca cruzado uma aresta (se você construiu uma faixa de Möbius, tente desenhar uma linha a lápis pelo meio). Portanto, uma fita de Möbius realmente tem apenas um lado. Você pode traçar a faixa de Möbius usando as equações parametrizadas no Exercício 32 da Seção 16.6.

TEC Visual 16.7 mostra uma faixa de Möbius com um vetor normal que pode ser movido ao longo da superfície.

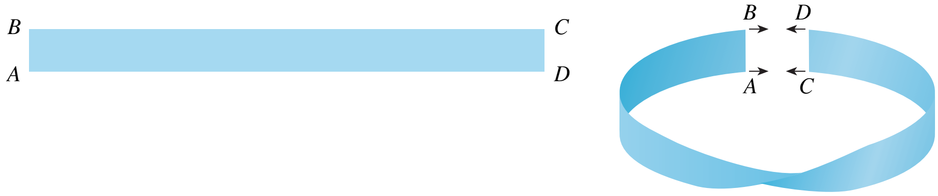


FIGURA 5
Construção de uma faixa de Möbius

Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície *S* que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) em *S* (exceto nos pontos da fronteira). Existem dois vetores normais unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ em (x, y, z) (veja a Figura 6).

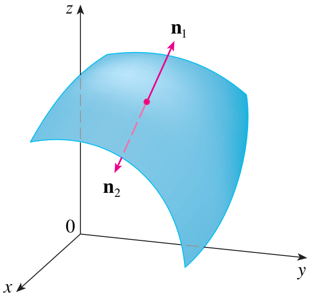


FIGURA 6

Se for possível escolher um vetor normal **n** em cada ponto (x, y, z) de modo que **n** varie continuamente sobre *S*, então *S* é chamada **superfície orientada** e a escolha dada de **n** fornece *S* com uma **orientação**. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 7).

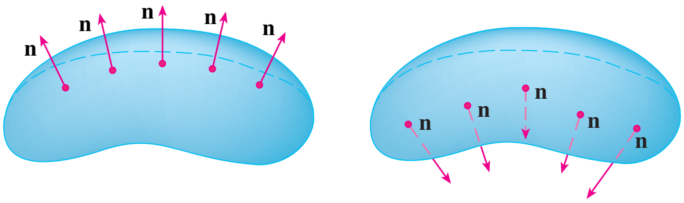


FIGURA 7
As duas orientações de uma superfície orientável

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de *g*, usamos a Equação 3 e vemos que a orientação induzida é dada pelo vetor normal unitário

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como a componente na direção de **k** é positiva, isso fornece a orientação ascendente da superfície.

Se *S* for uma superfície orientada suave dada na forma parametrizada pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente associada à orientação do vetor normal unitário.

$$\boxed{6} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo, no Exemplo 4 na Seção 16.6 nós encontramos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Então, no Exemplo 10 da Seção 16.6, encontramos que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, \mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

Assim, a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \operatorname{sen}\phi\,\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que **n** aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figura 8). A orientação oposta (para dentro) poderia ser obtida (veja a Figura 9) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.

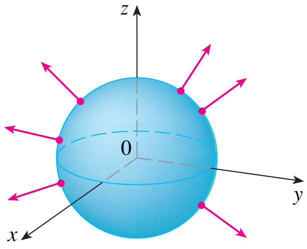


FIGURA 8
Orientação positiva

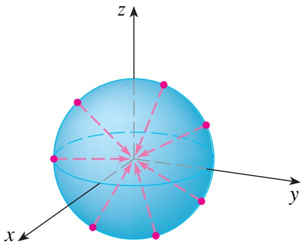


FIGURA 9
Orientação negativa

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida E, a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais *apontam para fora* de E, e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (veja as Figuras 8 e 9).

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

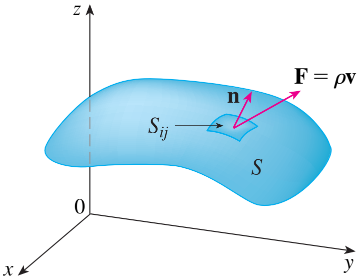


FIGURA 10

Suponha que S seja uma superfície orientada com vetor unitário normal **n**, e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ que flui através de S. (Pense em S como uma superfície imaginária que não impede o fluxo de fluido, tal como uma rede de pesca por um fluxo.) Em seguida, a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo) por unidade de área é $\rho\mathbf{v}$. Se dividirmos S em pequenos retalhos S_{ij}, como na Figura 10 (compare com a Figura 1), então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal **n** por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

onde ρ, **v** e **n** são avaliados em algum ponto em S_{ij}. (Recorde-se de que o componente do vetor de $\rho\mathbf{v}$ na direção da unidade de vetor **n** é $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral de superfície da função $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre S:

$$\boxed{7} \qquad \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

e ela é interpretada fisicamente como a vazão através de S.

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, então **F** também é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e a integral da Equação 7 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando **F** não é $\rho\mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de **F** em S.

$\boxed{8}$ **Definição** Se **F** for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário **n**, então a **superfície integral de F sobre *S*** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de **F** através de S.

Em palavras, a Definição 8 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de sua componente normal em S (como definido anteriormente).

Se S é uma função vetorial dada por $\mathbf{r}(u, v)$, então $\mathbf{n}$ é dado pela Equação 6 da Definição 8 e, da Equação 2, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Assim, temos

9

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA}$$

Compare a Equação 9 com a expressão análoga para o cálculo da integral de linha de campos vetoriais da Definição 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

EXEMPLO 4 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

A Figura 11 mostra o campo vetorial **F** do Exemplo 4 em pontos da esfera unitária

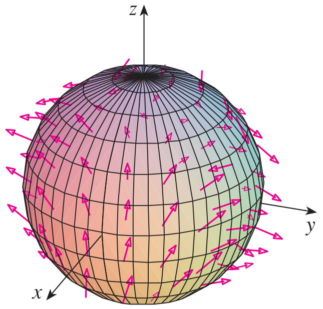


FIGURA 11

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, utilizamos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen}\,\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

Então $\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$

e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \text{sen}^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Portanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi\,\text{sen}^2\phi\cos\theta + \text{sen}^3\phi\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\,\text{sen}^2\phi\,\cos\phi\,\cos\theta + \text{sen}^3\phi\,\text{sen}^2\theta)\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \text{sen}^2\phi\cos\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi}\text{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\text{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi}\text{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\text{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\text{uma vez que } \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta = 0\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 1.

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 4 é um campo de velocidade descrevendo o escoamento de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

No caso de uma superfície S dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos considerar x e y como parâmetros e usar a Equação 3 para escrever

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Logo, a Fórmula 9 se torna

10

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA}$$

Esta fórmula pressupõe uma orientação ascendente de S; para uma orientação descendente, multiplicamos por -1. Fórmulas semelhantes podem ser trabalhadas se S é dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$. (Veja os Exercícios 37 e 38.)

EXEMPLO 5 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é o limite da região sólida E delimitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$.

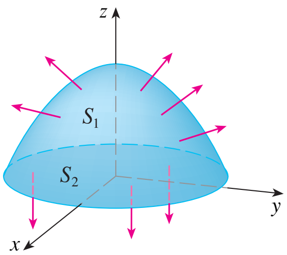


FIGURA 12

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabólica superior S_1 e pela superfície circular do fundo S_2 (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que S_1 é orientada para cima e podemos usar a Equação 10 com D sendo a projeção de S_1 sobre o plano xy, ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Como

$$P(x, y, z) = y \qquad Q(x, y, z) = x \qquad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

sobre S_1 e

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

temos

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \\
&= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2]\, dA \\
&= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos\theta \ \operatorname{sen}\theta - r^2)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos\theta \ \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4} + \cos\theta \ \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \tfrac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

O disco S_2 é orientado para baixo, então seu vetor normal unitário é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS = \iint_D (-z)\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

uma vez que $z = 0$ em S_2. Finalmente, calculamos, pela definição, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como a soma das integrais de superfície de $\mathbf{F}$ sobre as partes S_1 e S_2:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo, se $\mathbf{E}$ é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

chama-se a **fluxo elétrico** de $\mathbf{E}$ através da superfície S. Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície S é

$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{11}$$

onde ε_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/\mathrm{N{\cdot}m}^2$). Portanto, se o campo vetorial $\mathbf{F}$ do Exemplo 4 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -K\iint_S \nabla u\cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 6 A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 4, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

e assim
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas, sobre S temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, então $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de transmissão de calor através de S é

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -2aKC\iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$

16.7 Exercícios

1. Seja S a superfície que é fronteira da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0{,}1(x+y+z)}\,dS$ usando uma soma de Riemann, como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como os retângulos que são as faces da caixa S e os pontos P_{ij}^* como os centros destes retângulos.

2. Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, e por círculos no fundo e no topo Suponha que você saiba que f é uma função contínua com

   $f(\pm 1, 0, 0) = 2 \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3 \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$

   Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z)\,dS$ usando a soma de Riemann, tomando como retalhos S_{ij} os círculos do fundo e do topo e a lateral dividida em quatro partes.

3. Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Ao dividir H em quatro partes, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z)\,dS$.

4. Suponha que $f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z)\,dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5–20 Calcule a integral de superfície.

5. $\iint_S (x + y + z)\,dS$,
   S é o paralelogramo com equações paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 1$

6. $\iint_S xyz\,dS$,
   S é o cone com equações paramétricas $x = u\cos v$, $y = u\,\text{sen}\,v$, $z = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

7. $\iint_S y\,dS$, S é o helicoide com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u\,\text{sen}\,v, v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

8. $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$,
   S é o superfície com equação vetorial
   $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2\rangle$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$

9. $\iint_S x^2yz\,dS$,
   S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$

10. $\iint_S xz\,dS$,
    S é a parte do plano $2x + 2y + z = 4$ que está no primeiro octante

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11. $\iint_S x\,dS$,
S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ e $(0, 0, 4)$

12. $\iint_S y\,dS$,
S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

13. $\iint_S x^2 z^2\,dS$,
S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$

14. $\iint_S z\,dS$,
S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

15. $\iint_S y\,dS$,
S é a parte do paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$

16. $\iint_S y^2\,dS$,
S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy

17. $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\,dS$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

18. $\iint_S xz\,dS$,
S é o limite da região delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$ e $x + y = 5$

19. $\iint_S (z + x^2 y)\,dS$,
S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante

20. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$,
S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos inferior e superior

21–32 Avalie a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície orientada S. Em outras palavras, localize o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S. Para superfícies fechadas, use a orientação (para o exterior) positiva.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\,\mathbf{i} - 3ze^{xy}\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
S é o paralelogramo do Exercício 5 com orientação ascendente.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é o helicoide do Exercício 7 com orientação ascendente.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
S é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e com orientação ascendente.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$ com orientação descendente

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, com orientação para a origem

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geqslant 0$, orientado na direção do eixo positivo y

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$,
S é formada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e pelo disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 4x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$,
S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação ascendente

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$,
S é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$,
S é o limite da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
S é o limite do semicilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (z - y)\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

SCA **33.** Calcule $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$ com precisão de quatro casas decimais, quando S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **34.** Determine o valor exato de $\iint_S x^2 yz\,dS$, onde S é a superfície $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **35.** Determine o valor de $\iint_S x^2 y^2 z^2\,dS$ correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.

SCA **36.** Determine o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{i} + x^2 y\,\mathbf{j} + z^2 e^{x/5}\,\mathbf{k}$$

através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$ com orientação ascendente. Ilustre, usando um sistema de computação algébrica para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.

37. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $y = h(x, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a esquerda.

38. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).

39. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, se ele tiver densidade constante.

40. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

41. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I_z em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S se a função densidade é ρ.
(b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 40.

42. Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$. Se S tem densidade constante k, determine (a) o centro da massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z.

43. Um fluido tem densidade 870 kg/m^3 e escoa com velocidade $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, onde x, y e z são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$, em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

44. A água do mar tem densidade 1.025 kg/m^3 e flui em um campo de velocidade $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, onde x, y e z são medidos em metros e as componentes de **v**, em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

45. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

46. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

47. A temperatura no ponto (x, y, z) em uma substância com uma condutividade $K = 6{,}5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância para dentro superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

49. Seja **F** um campo inverso do quadrado, ou seja, $\mathbf{F}(r) = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Mostre que o fluxo de **F** através de uma esfera S com o centro de origem é independente do raio de S.

16.8 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário **n**. A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira *C*** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de **n**, então a superfície estará sempre à sua esquerda.

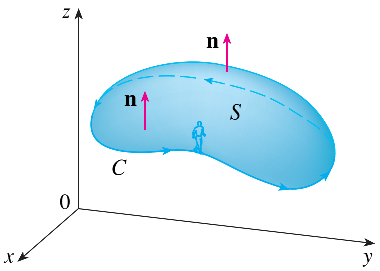


FIGURA 1

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja **F** um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{e} \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de **F** é igual à integral de superfície sobre S da componente normal do rotacional de **F**.

A curva na fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S, de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que rot **F** é uma espécie de derivada de **F**) e do lado direito, envolvendo valores de **F** calculados somente na *fronteira* de S.

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy, com orientação ascendente, o vetor normal unitário é **k**, a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Essa é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada na Equação 16.5.12. Assim, vemos que o Teorema de Green é realmente um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de demonstrar no caso geral, podemos fazer uma demonstração quando S for um gráfico e **F**, S e C forem bem comportados.

George Stokes

O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (ele detinha a mesma cadeira de Newton, Lucasian Professor of Mathematics) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thompson (1824- 1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.

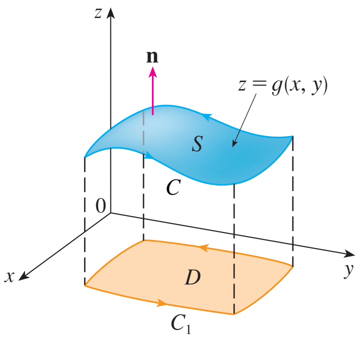


FIGURA 2

DEMONSTRAÇÃO DE UM CASO ESPECIAL DO TEOREMA DE STOKES Admitiremos que a equação de S é $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja curva fronteira C_1 corresponde a C. Se a orientação de S for ascendente, a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1. (Veja a Figura 2.) Foi-nos dado que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, onde as derivadas parciais de P, Q e R são contínuas.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Fórmula 16.7.10 com $\mathbf{F}$ substituído por rot $\mathbf{F}$. O resultado é

$$\boxed{2} \quad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

onde as derivadas parciais de P, Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Se

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

é a representação parametrizada de C_1, então a representação parametrizada de C é

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\
&= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\
&= \int_{C_1} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Green no último passo. Então, utilizando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que P, Q e R são funções de x, y e z e que z é, por sua vez, função de x e y, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Bigg[&\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \right) \\
&- \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} \right) \Bigg] dA
\end{aligned}$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser rearranjados para que coincidam com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

■

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ e C é a curva da interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando observado de cima.)

SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira C, a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é C. Se orientarmos S para cima, em seguida, C tem a orientação induzida positiva. A projeção D de S no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e portanto, usando a Equação 16.7.10 com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \,\text{sen}\,\theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \,\text{sen}\,\theta \right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$

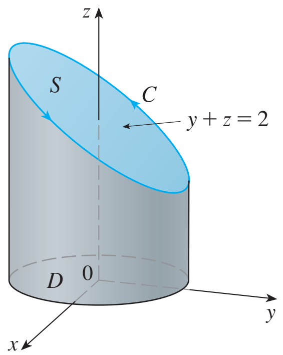


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy. (Veja a Figura 4.)

SOLUÇÃO Para acharmos a curva fronteira C, resolvemos as equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$. Subtraindo, obtemos $z^2 = 3$ e, portanto, $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$). Então C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Assim, $$\mathbf{r}'(t) = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Temos também

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \cos t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$$

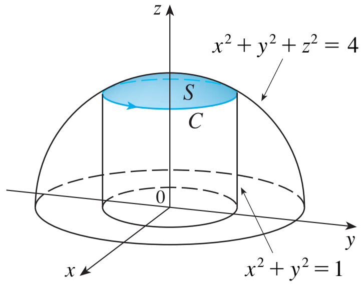


FIGURA 4

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t\,\text{sen}\,t + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\cos t\right) dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

Observe que no Exemplo 2, calculamos uma integral de superfície simplesmente conhecendo os valores de **F** na fronteira C. Isso significa que, se tivermos outra superfície orientada com a mesma fronteira C, obteremos o mesmo valor para a integral de superfície!

Em geral, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

3 $$\iint_{S_1} \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e **v** represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

e recorde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente do vetor **v** na direção do vetor tangente unitário **T**. Isto significa que quanto mais perto a direção de **v** é a direção de **T**, maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover em torno de C e é chamada **circulação** de **v** em torno de C. (Veja a Figura 5.)

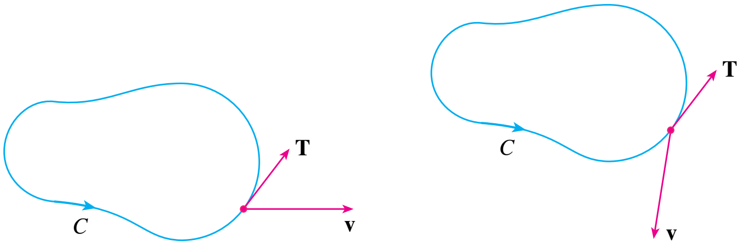


FIGURA 5

(a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulação positiva

(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulação negativa

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0. Então $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos os pontos P em S_a porque rot **F** é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação do fluxo em torno do círculo fronteira C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \to 0$ e temos

$$\boxed{4} \qquad \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que rot $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é uma medida do efeito de rotação do fluido em torno do eixo **n**. O efeito de ondulação é maior sobre o eixo paralelo a rot **v**.

Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto *P*, como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a rot **v**.

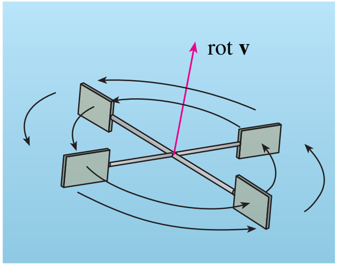


FIGURA 6

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 16.5.4 (que afirma que, se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre $\mathbb{R}^3$, então **F** é conservativo). Do nosso trabalho anterior (16.3.3 e 16.3.4 Teoremas), sabemos que **F** é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada caminho fechado *C*. Dado *C*, suponha que possamos encontrar uma superfície orientável *S* cuja fronteira é *C*. (Isso pode ser feito, mas a demonstração exige técnicas avançadas.) Em seguida, o teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada *C*.

16.8 Exercícios

1. Um hemisfério *H* e uma porção *P* de um paraboloide são mostrados. Suponha que **F** seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujas componentes tenham derivadas parciais contínuas. Explique por quê

$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

2–6 Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y \cos z \, \mathbf{i} + e^x \text{ sen } z \, \mathbf{j} + xe^y \mathbf{k}$, *S* é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$, de orientação ascendente

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2 \, \mathbf{i} + y^2z^2 \, \mathbf{j} + xyz \, \mathbf{k}$, *S* é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com orientação ascendente

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{tg}^{-1}\,(x^2 yz^2) \, \mathbf{i} + x^2y \, \mathbf{j} + x^2 z^2 \, \mathbf{k}$, *S* é o cone $x = \sqrt{y^2 - z^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, orientado na direção do eixo positivo *x*

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \, \mathbf{i} + xy \, \mathbf{j} + x^2yz \, \mathbf{k}$, *S* é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, com orientação para fora.

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \, \mathbf{i} + e^{xz} \, \mathbf{j} + x^2z \, \mathbf{k}$, *S* é a metade do elipsoide

$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que se situa à direita do plano xz orientado na direção do eixo positivo y

7–10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\,\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\,\mathbf{k}$, C é o limite da parte do plano $3x + 2y + z = 1$ no primeiro octante

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$, C é a curva da interseção do plano $x + z = 5$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e C é a curva da intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do paraboloide hiperbólico e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

13–15 Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície S.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$,
S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$, com orientação descendente

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$,
S é a parte do paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 1$, com orientação ascendente

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$, orientado na direção do eixo positivo y

16. Seja C uma curva fechada simples suave que se situa no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

depende apenas da área da região englobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

17. Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$, e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

Encontre o trabalho realizado.

18. Calcule

$$\int_C (y + \text{sen}\, x)\,dx + (z^2 + \cos y)\,dy + x^3\,dz$$

onde C é a curva curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, t, \cos t, \text{sen}\, 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. [*Dica*: observe que C está na superfície $z = 2xy$.]

19. Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para demonstrar o seguinte:

(a) $\int_C (f\,\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\,\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f\,\nabla g + g\,\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROJETO APLICADO

TRÊS HOMENS E DOIS TEOREMAS

A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.

Cortesia de Masters and Fellows of Gonville e Caius College, University of Cambridge, Inglaterra

Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e predizer fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e as relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em torná-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram em pesquisas em eletricidade e magnetismo e foram depois usados no estudo de diversos outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes e o livro de Thomson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem uma descrição da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

1. D. M. Cannell. *George Green, Matemático e Físico 1793–1841: O fundo para sua vida e obra* (Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

2. C. C. Gillispie, (Ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo em Green por P. J. Wallis no Volume XV e os artigos no Thomson por Jed Buchwald e em Stokes por E. M. Parkinson no Volume XIII.

3. I. Grattan-Guinness. "Por que George Green escrever seu ensaio de 1828 sobre eletricidade e magnetismo?" *Amer. Mat. mensal*, Vol. 102 (1995), p. 387–96.
4. J. Gray. "Houve um moleiro alegre". *The New Scientist*, Vol. 139 (1993), p. 24–27.
5. G. E. Hutchinson. *The Enchanted Voyage and Other Studies*. Westport, CT: Greenwood Press, 1978.
6. Victor Katz. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 678–80.
7. Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 683–85.
8. Sylvanus P. Thompson. *The Life of Lord Kelvin*. Nova York: Chelsea, 1976.

16.9 O Teorema do Divergente

Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

onde C é a fronteira positivamente orientada da região do plano D. Se quisermos estender esse teorema para campos de vetores em $\mathbb{R}^3$, podemos fazer a suposição de que

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E. A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas e é chamada Teorema do Divergente. Observe sua semelhança com os Teoremas de Green e de Stokes, pois ele relaciona a integral da derivada de uma função (div **F**, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original **F** sobre a fronteira da região.

Nesta fase você pode querer rever os vários tipos de regiões sobre as quais calculamos integrais triplas na Seção 15.7. Enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Divergente para regiões E que são, simultaneamente, dos tipos 1, 2 e 3 e que chamamos de **regiões sólidas simples**. (Por exemplo, as regiões delimitadas por elipsoides ou caixas retangulares são simples regiões sólidas.) A fronteira de E é uma superfície fechada e usaremos a convenção, introduzida na Seção 16.7, de que a orientação positiva é para fora, ou seja, o vetor normal unitário **n** apontará para fora de E.

O Teorema do Divergente é às vezes chamado Teorema de Gauss, em homenagem ao grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777 –1855), que descobriu esse teorema durante suas pesquisas sobre eletrostática. Em muitos países da Europa, o Teorema do Divergente é conhecido como Teorema de Ostrogradsky, em homenagem ao matemático russo Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), que publicou esse resultado em 1826.

O Teorema do Divergente Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja **F** um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de **F** pela fronteira de E é igual à integral tripla da divergência de **F** em E.

DEMONSTRAÇÃO Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

assim,

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Se **n** é o vetor normal unitário para fora de S, então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema do Divergente é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Portanto, para demonstrar o Teorema do Divergente, é suficiente demonstrar as três seguintes equações:

$$\iint_S P\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV \tag{2}$$

$$\iint_S Q\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV \tag{3}$$

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV \tag{4}$$

Para demonstrarmos a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy. Pela Equação 15.7.6, temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\,dz\right] dA$$

e, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[R\big(x, y, u_2(x, y)\big) - R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\right] dA \tag{5}$$

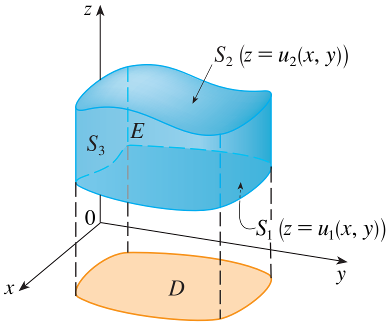


FIGURA 1

A fronteira S é constituída por três partes: a superfície inferior S_1, a superfície superior S_2, e, possivelmente, uma superfície vertical S_3, que se situa acima da curva fronteira de D. (Veja a Figura 1. S_3 pode não aparecer, tal como no caso de uma esfera.) Observe que em S_3 temos $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$, porque $\mathbf{k}$ é vertical e $\mathbf{n}$ é horizontal, e assim

$$\iint_{S_3} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_3} 0\,dS = 0$$

Logo, independentemente da existência de uma superfície vertical, podemos escrever

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{6}$$

A equação de S_2 é $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e o vetor normal que sai de $\mathbf{n}$ aponta para cima. Da Equação 16.7.10 (com $\mathbf{F}$ substituído por $R\,\mathbf{k}$), temos

$$\iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D R\big(x, y, u_2(x, y)\big)\,dA$$

Sobre S_1 temos $z = u_1(x, y)$, mas aqui a normal $\mathbf{n}$ aponta para baixo, então multiplicamos por -1:

$$\iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_D R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\,dA$$

Portanto, a Equação 6 fornece

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \left[R\big(x, y, u_2(x, y)\big) - R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\right] dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

As Equações 2 e 3 são demonstradas de modo análogo, usando as expressões para E como uma região do tipo 2 ou do tipo 3. ■

Observe que o método de demonstração do Teorema do Divergente é muito semelhante ao do Teorema de Green.

EXEMPLO 1 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ sobre a unidade esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos o divergente de $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_B 1\, dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

■

A solução do Exemplo 1 deve ser comparada com a solução do Exemplo 4 na Seção 16.7.

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\,\mathbf{k}$$

E S é a superfície da região E delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e os planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$. (Veja a Figura 2.)

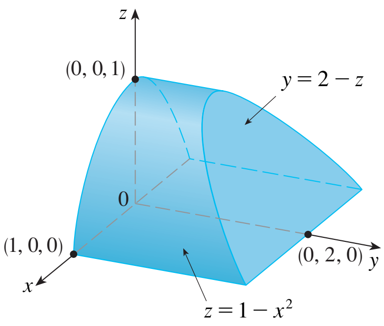


FIGURA 2

SOLUÇÃO Seria extremamente difícil calcular a integral de superfície determinada diretamente (teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S). Além disso, o divergente de $\mathbf{F}$ é muito menos complicado que o próprio $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = y + 2y = 3y$$

Portanto, usamos o Teorema do Divergente para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2, 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y\, dV \\
&= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\, dy\, dz\, dx = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\, dz\, dx \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right] dx \\
&= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\, dx = \frac{184}{35}
\end{aligned}$$

■

Apesar de termos demonstrado o Teorema do Divergente somente para o caso de regiões sólidas simples, ele pode ser demonstrado para regiões que são a união finita de regiões sólidas simples. (O procedimento é semelhante ao usado na Seção 16.4 para estender o Teorema de Green.)

Por exemplo, vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas S_1 e S_2, onde S_1 está dentro de S_2. Sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ as normais apontando para fora de S_1 e S_2. Então, a fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e a sua normal $\mathbf{n}$ é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ em S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ em S_2 (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema do Divergente para S, obtemos

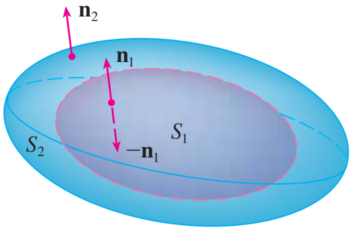


FIGURA 3

$$\begin{aligned}
\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS \\
&= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{7}$$

EXEMPLO 3 No exemplo 5 na Seção 16.1 consideramos o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

onde a carga elétrica Q está localizada na origem e $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ é um vetor posição. Use o Teorema do Divergente para mostrar que o fluxo elétrico de $\mathbf{E}$ através de qualquer superfície fechada S_2 que inclui a origem é

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

SOLUÇÃO A dificuldade é que não temos uma equação explícita para S_2 porque S_2 é *qualquer* superfície fechada envolvendo a origem. O exemplo mais simples de tal superfície seria uma esfera. Seja então S_1 uma pequena esfera de raio a e centrada à origem. Você pode verificar que div $\mathbf{E} = 0$. (Veja a Exercício 23.) Portanto, a Equação 7 dá

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em $\mathbf{x}$ é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\, \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

uma vez que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Assim, temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\, 4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de $\mathbf{E}$ é $4\pi\varepsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.11) para uma única carga. A relação entre ε e ε_0 é $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ. Então $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ é a taxa de vazão do fluido por unidade de área. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a, então div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos em B_a uma vez que div $\mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)\, dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \longrightarrow 0$ e sugere que

8
$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 diz que div $\mathbf{F}(P_0)$ é a taxa líquida de fluxo para o exterior por unidade de volume em P_0. (Esta é a razão para o nome *divergente*). Se div $\mathbf{F}(P) > 0$, o fluxo líquido é exteriormente perto de P e P é chamado uma **fonte**. Se div $\mathbf{F}(P) < 0$, o escoamento total perto de P é para dentro e P é denominado **sorvedouro**.

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1. Então, o fluxo total é para fora perto de P_1, assim, div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2, os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo total é para dentro, assim div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar essa impressão. Uma vez que $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, temos div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim, os pontos acima da linha $y = -x$ são fontes e os que estão abaixo são sorvedouros.

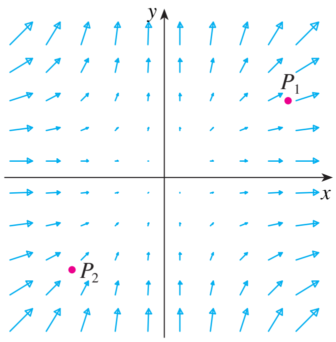


FIGURA 4
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

16.9 Exercícios

1–4 Verifique se o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$,
E é a bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2, -y, z \rangle$,
E é o cilindro sólido $y^2 + z^2 \leqslant 9$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

5–15 Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + xy^2z^3\,\mathbf{j} - ye^z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície da caixa delimitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$,
S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ e $z = c$, onde a, b e c são números positivos

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e os planos $x = -1$ e $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\,\mathbf{j} + (z^3 + x^3)\,\mathbf{k}$,
S é a esfera com origem no centro e raio 2

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x \cos y\,\mathbf{j} - xz \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S é a "esfera gorda" $x^8 + y^8 + z^8 = 8$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - zx\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

onde a, b e c são números positivos

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2z)\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = x + 2$ e $z = 0$

13. $\mathbf{F} = \mathbf{r}\,|\mathbf{r}|$, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S consiste no hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no plano xy

14. $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^2\,\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S é a esfera com raio R e origem no centro

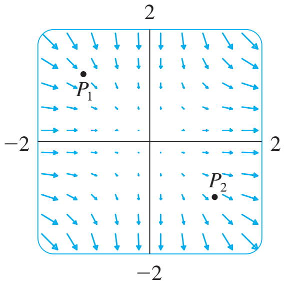
SCA **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \operatorname{tg} z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **16.** Use um sistema de computação algébrica para traçar o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$ no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ e $z = \pi/2$. Em seguida, calcule o fluxo através da superfície do cubo.

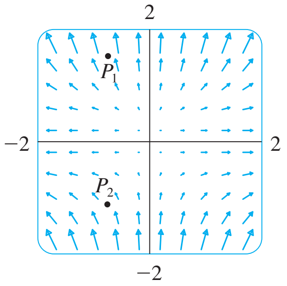
17. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$ e S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Dica*: Note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2, onde S_1 é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

18. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \operatorname{tg}^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e tem orientação descendente.

19. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado. Use a interpretação do Divergente deduzida nesta seção para determinar se div $\mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2.



20. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros no campo vetorial $\mathbf{F}$ mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
(b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use a definição de divergente para verificar sua resposta da parte (a).



SCA **21–22** Trace o campo do vetor e adivinhe onde div $\mathbf{F} > 0$ e onde div $\mathbf{F} < 0$. Então calcule div $\mathbf{F}$ para verificar o seu palpite.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$

22. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

---

23. Verifique se div $\mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$.

24. Use o Teorema do Divergente para avaliar

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\,dS$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25–30 Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

28. $\iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS = \iiint_E \nabla^2 f\,dV$

29. $\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV$

30. $\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV$

---

31. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Demonstre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

Estas integrais de superfície e triplos de funções vetoriais são vetores definidos por meio da integração de cada função do componente. [*Dica*: Comece por aplicar o Teorema do Divergente para $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.]

32. Um sólido ocupa uma região E com superfície S e é imerso num líquido com uma densidade constante ρ. Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo, adentrando o líquido. Então, a pressão na profundidade z é $p = \rho gz$, onde g é a aceleração da gravidade (veja a Seção 6.5, no Volume I). A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\mathbf{n}\, dS$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Use o resultado do Exercício 31 para mostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Observe que $\mathbf{F}$ é dirigida para cima porque z é dirigida para baixo.) O resultado é o *Princípio de Arquimedes*: A força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.

16.10 Resumo

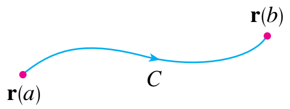
Os principais resultados deste capítulo são versões em dimensão maior do Teorema Fundamental do Cálculo. Para facilitarmos a memorização, reunimos os teoremas (sem suas hipóteses) para que você possa visualizar mais facilmente suas semelhanças essenciais. Observe que em cada caso temos uma integral de uma "derivada" sobre uma região do lado esquerdo e do lado direito temos os valores da função original somente na *fronteira* da região.

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

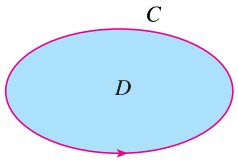
Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



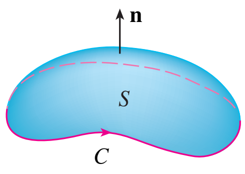
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\, dx + Q\, dy$$



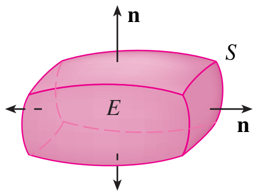
Teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema do Divergente

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



16 Revisão

Verificação de Conceitos

1. O que é um campo vetorial? Dê três exemplos com significado físico.

2. (a) O que é um campo vetorial conservativo?
   (b) O que é uma função potencial?

3. (a) Escreva a definição da integral de linha para uma função escalar f ao longo de uma curva suave C em relação ao comprimento de arco.
   (b) Como calcular tal integral?
   (c) Escreva expressões para a massa e para o centro de massa de um arame fino com o formato da curva C se o arame tiver função densidade linear $\rho(x, y)$.
   (d) Escreva as definições das integrais de linha sobre C de uma função escalar f com relação a x, y e z.
   (e) Como calcular essas integrais de linha?

4. (a) Defina a integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F}$ ao longo da curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
   (b) Se $\mathbf{F}$ é um campo de força, o que essa integral de linha representa?
   (c) Se $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$, qual é a relação entre a integral de linha de $\mathbf{F}$ e as integrais de linha das componentes P, Q e R?

5. Enuncie o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

6. (a) O que significa dizer que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho?
   (b) Se você souber que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, o que poderá dizer sobre $\mathbf{F}$?

7. Enuncie o Teorema de Green.

8. Escreva expressões para a área delimitada pela curva C em termos da integral de linha em torno de C.

9. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$.
   (a) Defina rot $\mathbf{F}$. (b) Defina div $\mathbf{F}$.
   (c) Se $\mathbf{F}$ for um campo de velocidade em um fluido, qual a interpretação física de rot $\mathbf{F}$ e de div $\mathbf{F}$?

10. Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, como é que você testa para determinar se $\mathbf{F}$ é conservativo? E se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$?

11. (a) O que é uma superfície parametrizada? O que são suas curvas de grade?
    (b) Escreva uma expressão para a área de uma superfície parametrizada.
    (c) Qual é a área da superfície dada pela equação $z = g(x, y)$?

12. (a) Escreva a definição da integral de superfície de uma função escalar f sobre uma superfície S.
    (b) Como calcular tal integral se S for uma superfície parametrizada dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (c) E se S for dada pela equação $z = g(x, y)$?
    (d) Se uma folha fina tem o formato de uma superfície S e a densidade em (x, y, z) é $\rho(x, y, z)$, escreva expressões para a massa e o centro de massa da folha.

13. (a) O que é uma superfície orientada? Dê um exemplo de superfície não orientável.
    (b) Defina a integral de superfície (ou fluxo) de um campo vetorial $\mathbf{F}$ sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$.
    (c) Como calcular tal integral se S for uma superfície parametrizada dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (d) E se S for dada pela equação $z = g(x, y)$?

14. Enuncie o Teorema de Stokes.

15. Enuncie o Teorema do Divergente.

16. Quais as semelhanças entre o Teorema Fundamental das Integrais de Linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial, então div $\mathbf{F}$ é um campo vetorial.

2. Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial, então rot $\mathbf{F}$ é um campo vetorial.

3. Se f tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas sobre $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \nabla f) = 0$.

4. Se f tem derivadas parciais contínuas sobre $\mathbb{R}^3$ e C for um círculo qualquer, então $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.

5. Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ e $P_y = Q_x$ em uma região aberta D, então $\mathbf{F}$ é conservativo.

6. $\int_{-C} f(x, y)\, ds = -\int_C f(x, y)\, ds$

7. Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais e $\mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{G}$, então $\mathbf{F} = \mathbf{G}$.

8. O trabalho feito por um campo de força conservativo em movimento de uma partícula em torno de um caminho fechado é igual a zero.

9. Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais, então
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$$

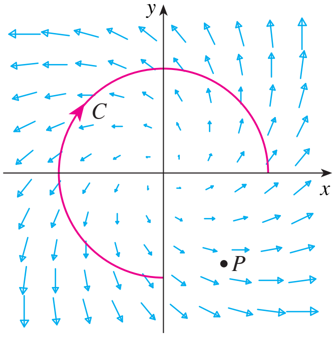
10. Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais, então
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G}$$

11. Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ é uma constante de campo vetorial, então $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

12. Existe um campo vetorial $\mathbf{F}$ tal que
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Exercícios

1. São mostrados um campo vetorial **F**, uma curva C e um ponto P.
(a) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero? Explique.
(b) div $\mathbf{F}(P)$ é positivo ou negativo? Explique.



2–9 Calcule a integral de linha.

2. $\int_C x\,ds$, C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$

3. $\int_C yz \cos x\,ds$, C: $x = t$, $y = 3 \cos t$, $z = 3 \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

4. $\int_C y\,dx + (x + y^2)\,dy$, C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ com a orientação anti-horária

5. $\int_C y^3\,dx + x^2\,dy$, C é o arco da parábola $x = 1 - y^2$ de $(0, -1)$ a $(0, 1)$

6. $\int_C \sqrt{xy}\,dx + e^y\,dy + xz\,dz$, C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^4\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

7. $\int_C xy\,dx + y^2\,dy + yz\,dz$, C é o segmento de reta de $(1, 0, -1)$ a $(3, 4, 2)$

8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$, e C é dado por $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

9. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

10. Encontre o trabalho feito pelo campo de força.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$$

ao mover uma partícula do ponto $(3, 0, 0)$ ao ponto $(0, \pi/2, 3)$ ao longo
(a) de uma reta
(b) da hélice $x = 3 \cos t$, $y = t$, $z = 3 \operatorname{sen} t$

11–12 Mostre que **F** é um campo vetorial conservativo. Então determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + (e^y + x^2 e^{xy})\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x \cos y\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$

13–14 Mostre que **F** é conservativo e use esse fato para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da curva dada.

13. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^2 - 2xy^3)\,\mathbf{i} + (2x^4 y - 3x^2y^2 + 4y^3)\,\mathbf{j}$, C: $\mathbf{r}(t) = (t + \operatorname{sen} \pi t)\,\mathbf{i} + (2t + \cos \pi t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + (xe^y + e^z)\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$, C é o segmento de reta que liga $(0, 2, 0)$ a $(4, 0, 3)$

15. Verifique que o Teorema de Green é verdadeiro para a integral de linha $\int_C xy^2\,dx - x^2y\,dy$, onde C consiste na parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ e no segmento de reta de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

16. Use o teorema de Green para calcular

$$\int_C \sqrt{1 + x^3}\,dx + 2xy\,dy$$

onde C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 3)$.

17. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C x^2y\,dx - xy^2\,dy$, onde C é o circulo $x^2 + y^2 = 4$ orientado no sentido anti-horário.

18. Determine rot **F** e div **F** se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^{-y} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + e^{-z} \operatorname{sen} x\,\mathbf{k}$$

19. Mostre que não existe um campo vetorial **G** tal que

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = 2x\,\mathbf{i} + 3yz\,\mathbf{j} - xz^2\,\mathbf{k}$$

20. Mostre que, sob algumas condições a serem enunciadas sobre campos vetoriais **F** e **G**,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

21. Se C é uma curva fechada simples suave por partes e f e g são funções diferenciáveis, mostre que $\int_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$.

22. Se f e g são funções com derivadas de segunda ordem, mostre que

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

23. Se f é uma função harmônica, ou seja, $\nabla^2 f = 0$, mostre que a integral de linha $\int f_y\,dx - f_x\,dy$ é independente do caminho em qualquer região simples D.

24. (a) Esboce a curva C com equações paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(b) Determine

$$\int_C 2xe^{2y}\,dx + (2x^2e^{2y} + 2y \operatorname{cotg} z)\,dy - y^2 \operatorname{cossec}^2 z\,dz.$$

25. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

26. (a) Determine uma equação do plano tangente no ponto $(4, -2, 1)$ à superfície parametrizada S dada por $\mathbf{r}(u, v) = v^2\,\mathbf{i} - uv\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 3$, $-3 \leqslant v \leqslant 3$
(b) Use um computador para traçar o gráfico da superfície S e do plano tangente encontrado na parte (a).
(c) Escreva, mas não calcule, uma integral que dê a área da superfície S.
SCA (d) Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2}\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2}\,\mathbf{k}$$

Encontre $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ correta até a quarta casa decimal.

27–30 Calcule a integral de superfície.

27. $\iint_S z\,dS$, onde S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 4$

28. $\iint_S (x^2z + y^2z)\,dS$, onde S é a parte do plano $z = 4 + x + y$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

29. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com orientação para fora

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

CAS É necessário usar um sistema de computação algébrica

30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$ com orientação ascendente

---

31. Verifique se o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, onde S é a parte do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy e S tem orientação ascendente.

32. Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + z^3e^{xy}\,\mathbf{k}$, S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que está acima do plano $z = 1$ e S tem orientação ascendente.

33. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientado no sentido horário, como visto de cima.

34. Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.

35. Verifique se o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, onde E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

36. Calcule o fluxo para fora de

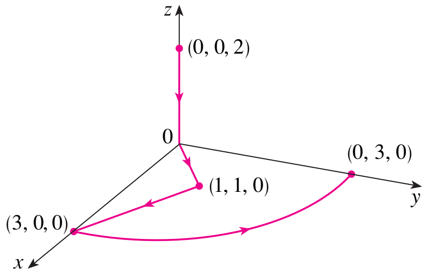
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

através do elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\,\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\,\mathbf{j} + (x^3y + 2z)\,\mathbf{k}$$

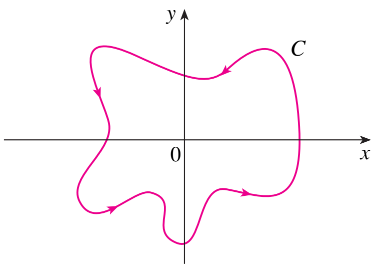
Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva com início em $(0, 0, 2)$ e término em $(0, 3, 0)$, como mostrado na figura.



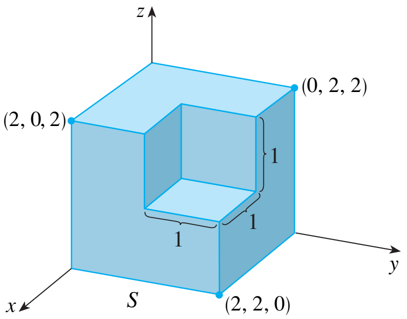
38. Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\,\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C está representado na figura.



39. Determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a superfície mostrada na figura, com orientação para fora (o limite do cubo com um cubo unitário removido).



40. Se as componentes de $\mathbf{F}$ têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e S é a superfície limite de uma região sólida simples, mostre que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

41. Se $\mathbf{a}$ é um vetor constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é uma superfície orientada suave com uma curva fronteira C fechada simples, suave e positivamente orientada, mostre que

$$\iint_S 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Problemas Quentes

1. Seja S uma superfície parametrizada suave e seja P um ponto tal que cada reta que comece em P intercepte S no máximo uma vez. O **ângulo sólido** $\Omega(S)$ subentendido por S em P é o conjunto de retas a partir de P e passando por S. Seja $S(a)$ a interseção de $\Omega(S)$ com a superfície da esfera com centro em P e raio a. Então, a medida do ângulo sólido (em *estereoradianos*) é definida como

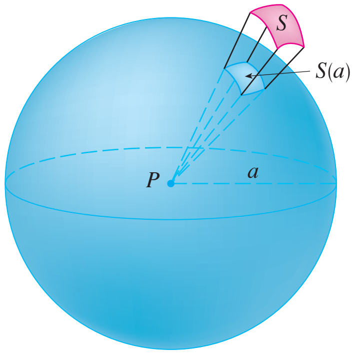
$$|\,\Omega(S)\,| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique o Teorema do Divergente para a parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ e S e mostre que

$$|\,\Omega(S)\,| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor radial de P a um ponto qualquer sobre S, $r = |\mathbf{r}|$, e o sentido do vetor normal unitário $\mathbf{n}$ é dirigido para longe de P.

Isso mostra que a definição de medida de um ângulo sólido independe do raio a da esfera. Assim, a medida do ângulo sólido é igual à área subtendida sobre uma esfera unitária (observe a analogia com a definição da medida em radianos). O ângulo sólido total subtendido por uma esfera em seu centro é, portanto, 4π esterradianos.



2. Encontre uma curva fechada simples C para a qual o valor da integral de linha

$$\int_C (y^3 - y)\,dx - 2x^3\,dy$$

é máxima.

3. Seja C uma curva espacial simples fechada suave por partes que esteja contida em um plano com vetor unitário normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ e orientada positivamente em relação a $\mathbf{n}$. Mostre que a área do plano delimitada por C é

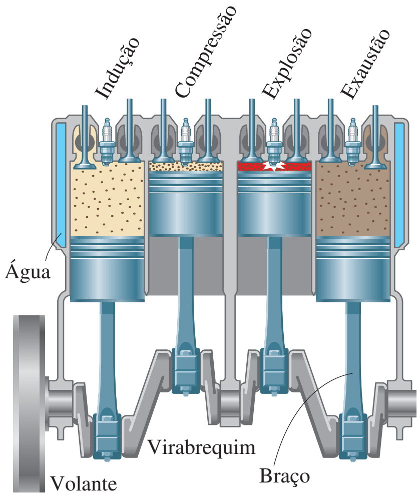
$$\tfrac{1}{2}\int_C (bz - cy)\,dx + (cx - az)\,dy + (ay - bx)\,dz$$

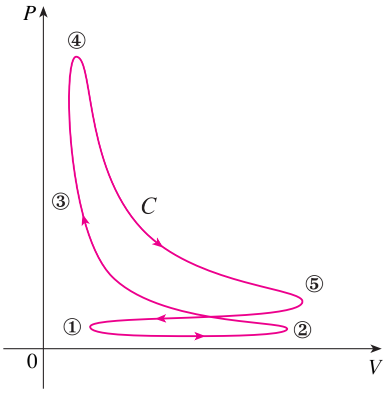
4. Investigue a forma da superfície com as equações parametrizadas $x = \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen}(u + v)$. Comece traçando a superfície sob diversos pontos de vista. Explique a aparência dos gráficos determinando os cortes nos planos horizontais $z = 0$, $z = \pm 1$ e $z = \pm \frac{1}{2}$.

5. Demonstre a seguinte identidade:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

6. A figura retrata a sequência de eventos em cada cilindro de um motor de quatro cilindros de combustão interna. Cada pistão se move para cima e para baixo e está ligado por um braço-pivô ao virabrequim. Sejam $P(t)$ e $V(t)$ a pressão e o volume dentro de um cilindro no instante t, onde $a \leqslant t \leqslant b$ é o tempo necessário para um ciclo completo. O gráfico mostra como P e V variam durante um ciclo em um motor de quatro tempos.





Durante o estágio de indução (de ① a ②) a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Então, o pistão comprime rapidamente a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de ② a ③), durante o qual a pressão aumenta e o volume diminui. Em ③ uma faísca proveniente da vela de ignição provoca a combustão da mistura, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até ④. Em seguida, com a válvula fechada, uma rápida expansão do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de ④ a ⑤). A válvula se abre, a temperatura e a pressão caem e a energia mecânica armazenada no volante em rotação impulsiona o pistão para cima, forçando a saída dos gases que se formaram no interior pela válvula, no estágio de exaustão. A válvula de exaustão se fecha e a válvula de entrada se abre. Estamos de volta a ① e o ciclo se reinicia.

(a) Mostre que o trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo de um motor de quatro tempos é $W = \int_C P\, dV$, onde C é a curva no plano PV mostrada na figura.

[*Dica*: Seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro e observe que a força sobre o pistão é $\mathbf{F} = AP(t)\,\mathbf{i}$, onde A é a área do topo do pistão. Então $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 é dado por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$, $a \leqslant t \leqslant b$. Um modo alternativo é trabalhar diretamente com as somas de Riemann.]

(b) Use a Fórmula 16.4.5 para mostrar que o trabalho é a diferença das áreas englobadas pelos dois laços de C.

17

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

O movimento de um amortecedor de um carro é descrito pelas equações diferenciais resolvidas na Seção 17.3.

© Pichugin Dmitry / Shutterstock

A ideia central das equações diferenciais está explicada no Capítulo 9, onde nos concentramos em equações de primeira ordem. Neste capítulo, estudaremos as equações diferenciais lineares de segunda ordem e aprenderemos aplicá-las na resolução de problemas de vibrações de mola e circuitos elétricos. Veremos também como séries infinitas podem ser usadas para resolver equações diferenciais.

17.1 Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma **equação diferencial linear de segunda ordem** tem a forma

$$\boxed{1} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

onde P, Q, R e G são funções contínuas. Vimos na Seção 9.1 que equações desse tipo surgem no estudo do movimento de uma mola. Na Seção 17.3 aprofundaremos essa aplicação, bem como sua aplicação aos circuitos elétricos.

Nesta seção, estudaremos o caso onde $G(x) = 0$ para todo x na Equação 1. Tais equações são chamadas equações lineares **homogêneas**. Assim, a forma de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem é

$$\boxed{2} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Se $G(x) \neq 0$ para algum x, a Equação 1 é **não homogênea** e será discutida na Seção 17.2.

Dois fatos básicos permitem-nos resolver equações lineares homogêneas. O primeiro é que, se conhecermos duas soluções y_1 e y_2 de tal equação, então a **combinação linear** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também será uma solução.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ambas soluções da equação linear homogênea $\boxed{2}$ e c_1 e c_2 são constantes quaisquer, então a função

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

é também uma solução da Equação 2.

DEMONSTRAÇÃO Uma vez que y_1 e y_2 são soluções da Equação 2, temos

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

e

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Portanto, usando as regras básicas para derivação, temos

$$\begin{aligned}
P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y & \\
&= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\
&= c_1(0) + c_2(0) = 0
\end{aligned}$$

Assim, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é uma solução da Equação 2. ■

O outro fato de que precisamos é dado pelo seguinte teorema, demonstrado em cursos mais avançados. Ele diz que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções **linearmente independentes** y_1 e y_2. Isso significa que nem y_1 nem y_2 são múltiplos por constantes um do outro. Por exemplo: as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes, mas $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

4 **Teorema** Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da Equação 2 em um intervalo, e $P(x)$ nunca for 0, então a solução geral será dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O Teorema 4 é muito útil, pois diz que, se conhecermos *duas* soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos *todas* as soluções.

Em geral, não é fácil descobrir soluções particulares de uma equação linear de segunda ordem. Mas é sempre possível fazer isso se as funções coeficientes P, Q e R forem funções constantes, isto é, se a equação diferencial tiver a forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5}$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.

Não é difícil pensar em alguns prováveis candidatos para as soluções particulares da Equação 5 se a enunciarmos verbalmente. Estamos procurando uma função y tal que uma constante vezes sua segunda derivada y'' mais outra constante vezes y' mais uma terceira constante vezes y é igual a 0. Sabemos que a função exponencial $y = e^{rx}$ (onde r é uma constante) tem a propriedade de que sua derivada é um múltiplo por constante dela mesma: $y' = re^{rx}$. Além disso, $y'' = r^2e^{rx}$. Se substituirmos essas expressões na Equação 5, veremos que $y = e^{rx}$ é uma solução se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

ou

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Mas e^{rx} nunca é 0. Assim, $y = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5 se r é uma raiz da equação

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{6}$$

A Equação 6 é denominada **equação auxiliar** (ou **equação característica**) da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Observe que ela é uma equação algébrica que pode ser obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por r^2, y' por r, e y por 1.

Algumas vezes as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar podem ser determinadas por fatoração. Em outros casos, elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

Separamos em três casos, de acordo com o sinal do discriminante $b^2 - 4ac$.

CASO I $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso as raízes r_1 and r_2 da equação auxiliar são reais e distintas, logo $y_1 = e^{r_1x}$ e $y_2 = e^{r_2x}$ são duas soluções linearmente independentes da Equação 5. (Observe que e^{r_2x} não é um múltiplo por constante de e^{r_1x}.) Portanto, pelo Teorema 4, temos o seguinte fato.

8 Se as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem reais e distintas, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

EXEMPLO 1 Resolva a equação $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cujas raízes são $r = 2, -3$. Portanto, por $\boxed{8}$, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Poderíamos verificar que isso é de fato uma solução derivando e substituindo na equação diferencial.

Na Figura 1, o gráfico das soluções básicas $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-3x}$ da equação diferencial do Exemplo 1 é exibido em azul e vermelho, respectivamente. Algumas das outras soluções, combinações lineares de f e g, são exibidas em preto.

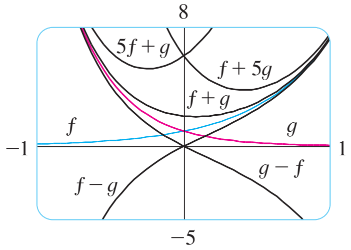


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Resolva $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

SOLUÇÃO Para resolvermos a equação auxiliar $3r^2 + r - 1 = 0$, usamos a fórmula quadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Uma vez que as raízes são reais e distintas, a solução geral é

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2 e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$

CASO II $b^2 - 4ac = 0$

Nesse caso, $r_1 = r_2$; isto é, as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Vamos denotar por r o valor comum de r_1 e r_2. Então, das Equações 7, temos

$$\boxed{9} \qquad r = -\frac{b}{2a} \qquad \text{então} \qquad 2ar + b = 0$$

Sabemos que $y_1 = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5. Agora verifiquemos que $y_2 = xe^{rx}$ também é uma solução:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

O primeiro termo é 0, pela Equação 9; o segundo termo é 0, pois r é uma raiz da equação auxiliar. Uma vez que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são soluções linearmente independentes, o Teorema 4 nos fornece a solução geral.

$\boxed{10}$ Se a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem apenas uma raiz real r, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

A Figura 2 apresenta as soluções básicas $f(x) = e^{-3x/2}$ e $g(x) = xe^{-3x/2}$ do Exemplo 3 e alguns outros membros da família de soluções. Observe que todas elas tendem a 0 quando $x \to \infty$.

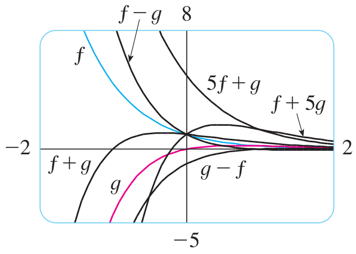


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar $4r^2 + 12r + 9 = 0$ pode ser fatorada como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

de modo que a única raiz é $r = -\frac{3}{2}$. Por $\boxed{10}$, a solução geral é

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 xe^{-3x/2}$$

CASO III $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são números complexos. (Veja o Apêndice H para informações sobre números complexos.) Podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

onde α e β são números reais. [Na verdade, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Então, usando a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

do Apêndice H, escrevemos a solução da equação diferencial como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

onde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Isso nos dá todas as soluções (reais ou complexas) da equação diferencial. As soluções serão reais quando as constantes c_1 e c_2 forem reais. Resumiremos a discussão da seguinte forma:

11 Se as raízes da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ será

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

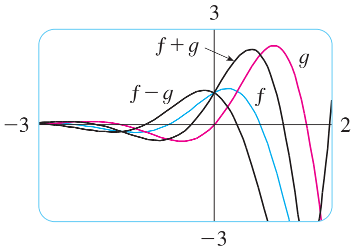


FIGURA 3

A Figura 3 apresenta os gráficos das soluções do Exemplo 4, $f(x) = e^{3x}\cos 2x$ e $g(x) = e^{3x}\operatorname{sen} 2x$, com algumas combinações lineares. Todas as soluções tendem a 0 como $x \to -\infty$.

EXEMPLO 4 Resolva a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 - 6r + 13 = 0$. Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por $\boxed{11}$, a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$

Problemas de Valores Iniciais e Valores de Contorno

Um **problema de valor inicial** para a Equação 1 ou 2 de segunda ordem consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que satisfaça às condições iniciais da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

onde y_0 e y_1 são constantes. Se P, Q, R e G forem contínuas em um intervalo onde $P(x) \neq 0$, então um teorema encontrado em livros mais avançados garante a existência e a unicidade de uma solução para esse problema de valor inicial. Os Exemplos 5 e 6 mostram como resolver tal problema.

EXEMPLO 5 Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

A Figura 4 apresenta o gráfico da solução do problema de valor inicial do Exemplo 5. Compare com a Figura 1.

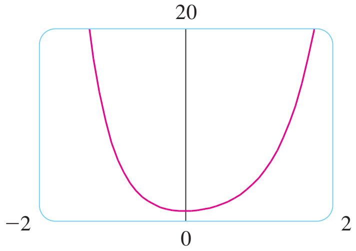


FIGURA 4

Derivando essa solução, obtemos

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

Para satisfazermos às condições iniciais exigimos que

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \tag{12}$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0 \tag{13}$$

De $\boxed{13}$, temos $c_2 = \frac{2}{3}c_1$; logo, $\boxed{12}$ resulta em

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Assim, a solução pedida do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$

EXEMPLO 6 Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$, ou $r^2 = -1$, cujas raízes são $\pm i$. Assim, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, e, uma vez que $e^{0x} = 1$, a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Uma vez que

$$y'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

as condições iniciais tornam-se

$$y(0) = c_1 = 2 \qquad y'(0) = c_2 = 3$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$$

A solução do Exemplo 6 tem seu gráfico na Figura 5. Ela parece ser uma senoide deslocada. Realmente, você pode verificar que outra maneira de escrever a solução é

$y = \sqrt{13}\,\operatorname{sen}(x + \phi)$ onde $\operatorname{tg} \phi = \frac{2}{3}$

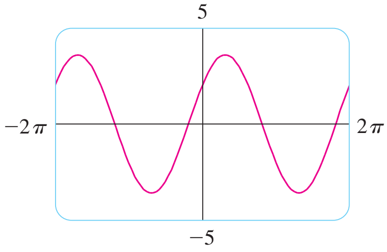


FIGURA 5

Um **problema de valor de contorno** para a Equação 1 ou 2 consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que também satisfaça às condições de contorno da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de valor de contorno nem sempre tem uma solução. O método está ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Resolva o problema de valor de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUÇÃO A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuja única raiz é $r = -1$. Além disso, a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

As condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

A primeira condição resulta em $c_1 = 1$, de modo que a segunda condição torna-se

$$e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

Isolando c_2 nessa equação, primeiro multiplicando ambos os membros por e, obtém-se

$$1 + c_2 = 3e \qquad \text{logo} \qquad c_2 = 3e - 1$$

Assim, a solução do problema de contorno é

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$

A Figura 6 mostra o gráfico da solução do problema de valor de contorno no Exemplo 7.

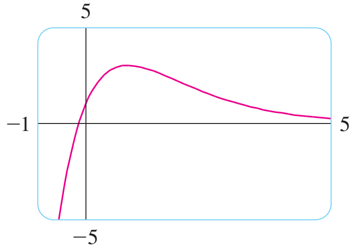


FIGURA 6

Resumo: Soluções de $ay'' + by' + c = 0$

Raízes de $ar^2 + br + c = 0$	Solução Geral
r_1, r_2 reais e distintas	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$
r_1, r_2 complexas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

17.1 Exercícios

1–13 Resolva a equação diferencial.

1. $y'' - y' - 6y = 0$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$

3. $y'' + 16y = 0$

4. $y'' - 8y' + 12y = 0$

5. $9y'' - 12y' + 4y = 0$

6. $25y'' + 9y = 0$

7. $y' = 2y''$

8. $y'' - 4y' + y = 0$

9. $y'' - 4y' + 13y = 0$

10. $y'' + 3y' = 0$

11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

12. $8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

13. $100\dfrac{d^2P}{dt^2} + 200\dfrac{dP}{dt} + 101P = 0$

14–16 Faça o gráfico das duas soluções básicas da equação diferencial e de várias outras soluções. Que aspecto as soluções têm em comum?

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 20y = 0$

15. $5\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

16. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

17–24 Resolva o problema de valor inicial.

17. $2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$

18. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

19. $9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

20. $2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3$

21. $y'' - 6y' - 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

22. $4y'' - 20y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$

23. $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

24. $4y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

25–32 Resolva o problema de valor de contorno, se possível.

25. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\pi/4) = 3$

26. $y'' = 4y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

27. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 0$

28. $y'' - 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = 2$

29. $y'' = y', \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

30. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(2) = 0$

31. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$

32. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{-2\pi}$

33. Seja L um número real não nulo.
  (a) Mostre que o problema de contorno $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ tem apenas a solução trivial $y = 0$ para os casos $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.
  (b) Para o caso $\lambda > 0$, determine os valores de λ para os quais este problema tenha uma solução não trivial e dê a solução correspondente.

34. Se a, b e c são todas constantes positivas e $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, mostre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

35. Considere o problema de valor de contorno $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(a) = c$, $y(b) = d$.
  (a) Se este problema tem uma solução única, como a e b estão relacionados?
  (b) Se este problema não tem uma solução única, como a, b, c e d estão relacionados?
  (c) Se este problema tem uma infinidade de soluções, como a, b, c e d estão relacionados?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

17.2 Equações Lineares Não Homogêneas

Nesta seção, aprenderemos a resolver equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$\boxed{1} \qquad ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde a, b e c são constantes e G é uma função contínua. A equação homogênea correspondente

$$\boxed{2} \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

é chamada **equação complementar** e desempenha um papel importante na solução da equação não homogênea original $\boxed{1}$.

$\boxed{3}$ **Teorema** A solução geral da equação diferencial não homogênea $\boxed{1}$ pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde y_p é uma solução particular da Equação 1 e y_c é a solução geral da Equação complementar 2.

DEMONSTRAÇÃO Verificamos que, se y for qualquer solução da Equação 1, então $y - y_p$ será uma solução da Equação complementar 2. De fato,

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0 \end{aligned}$$

Isso demonstra que cada solução é da forma $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$. É fácil verificar que cada função desta forma é uma solução.

Sabemos, da Seção 17.1, como resolver a equação complementar. (Recorde que a solução é $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da Equação 2.) Além disso, o Teorema 3 diz que conheceremos a solução geral da equação não homogênea assim que conhecermos uma solução particular y_p. Existem dois métodos para encontrar uma solução particular: O método dos coeficientes indeterminados é simples, mas funciona apenas para uma classe restrita de funções G. O método de variação de parâmetros funciona para todas as funções G, mas, geralmente, é mais difícil de aplicar na prática.

O Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos primeiro ilustrar o método dos coeficientes indeterminados para a equação

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde $G(x)$ é um polinômio. É razoável prever que exista uma solução particular y_p que seja um polinômio de mesmo grau de G, pois, se y for um polinômio, então $ay'' + by' + cy$ também será um polinômio. Portanto, substituímos $y_p(x) =$ a, um polinômio (de mesmo grau de G), na equação diferencial e determinamos os coeficientes.

EXEMPLO 1 Resolva a equação $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ é

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

com as raízes $r = 1, -2$. Logo, a solução da equação complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Uma vez que $G(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Então, $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$. Assim, substituindo na equação diferencial dada, temos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ou

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais. Assim,

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

A solução desse sistema de equações é

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Uma solução particular é, portanto,

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

e, pelo Teorema 3, a solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

A Figura 1 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 1 em termos da solução particular y_p e das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-2x}$.

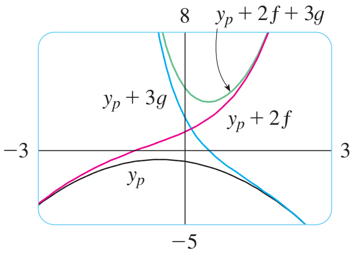


FIGURA 1

Se $G(x)$ (lado direito da Equação 1) é da forma Ce^{kx}, onde C e k são constantes, então tomamos como uma tentativa de solução uma função de mesma forma, $y_p(x) = Ae^{kx}$, pois as derivadas de e^{kx} são múltiplas por constantes de e^{kx}.

EXEMPLO 2 Resolva $y'' + 4y = e^{3x}$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 4 = 0$ com raízes $\pm 2i$, logo, a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

Para uma solução particular tentemos $y_p(x) = Ae^{3x}$. Então $y_p' = 3Ae^{3x}$ e $y_p'' = 9Ae^{3x}$. Substituindo na equação diferencial, temos

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

logo $13Ae^{3x} = e^{3x}$ e $A = \frac{1}{13}$. Assim, uma solução particular é

$$y_p(x) = \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

A Figura 2 mostra as soluções da equação diferencial do Exemplo 2 em termos de y_p e as funções $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2x$. Observe que todas as soluções tendem a ∞ quando $x \to \infty$ e todas as soluções (exceto y_p) parecem funções seno quando x é negativo.

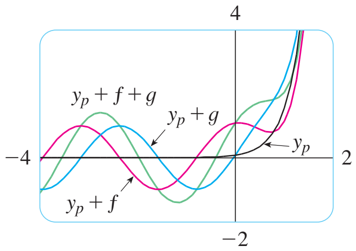


FIGURA 2

Se $G(x)$ é $C \cos kx$ ou $C \operatorname{sen} kx$, então, por causa das regras de derivação para as funções seno e cosseno, tentamos, como solução particular, uma função da forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

EXEMPLO 3 Resolva $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Tentemos uma solução particular

$$y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

Então, $\qquad y_p' = -A\operatorname{sen} x + B\cos x \qquad y_p'' = -A\cos x - B\operatorname{sen} x$

logo, substituindo na equação diferencial, temos

$$(-A\cos x - B\operatorname{sen} x) + (-A\operatorname{sen} x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

ou

$$(-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Isso acontece se

$$-3A + B = 0 \qquad \text{e} \qquad -A - 3B = 1$$

A solução deste sistema é

$$A = -\tfrac{1}{10} \qquad B = -\tfrac{3}{10}$$

logo, uma solução particular é

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{10}\cos x - \tfrac{3}{10}\operatorname{sen} x$$

No Exemplo 1, determinamos que a solução da equação complementar é $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen} x) \qquad \blacksquare$$

Se $G(x)$ for um produto de funções dos tipos precedentes, então tentamos a solução como um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo, ao resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x\cos 3x$$

tentamos

$$y_p(x) = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\operatorname{sen} 3x$$

Se $G(x)$ for uma soma de funções desses tipos, usamos o *princípio da superposição*, que é facilmente verificável e nos diz que se y_{p_1} e y_{p_2} forem soluções de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, então $y_{p_1} + y_{p_2}$ é uma solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

EXEMPLO 4 Resolva $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 - 4 = 0$ com as raízes ± 2, logo, a solução da equação complementar é $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Para a equação $y'' - 4y = xe^x$ tentamos

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

Então $y_{p_1}' = (Ax + A + B)e^x$, $y_{p_1}'' = (Ax + 2A + B)e^x$, Logo, substituindo na equação dada,

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

ou

$$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$

Assim $-3A = 1$ e $2A - 3B = 0$, logo $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$, e

$$y_{p_1}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)e^x$$

Na Figura 3 mostramos a solução particular $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ da equação diferencial do Exemplo 4. As outras soluções são dadas em termos de $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-2x}$

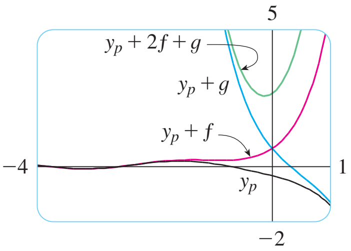


FIGURA 3

Para a equação $y'' - 4y = \cos 2x$, tentamos

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x$$

Substituindo, temos

$$-4C\cos 2x - 4D\,\text{sen}\,2x - 4(C\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x) = \cos 2x$$

ou

$$-8C\cos 2x - 8D\,\text{sen}\,2x = \cos 2x$$

Portanto $-8C = 1$, $-8D = 0$, e

$$y_{p_2}(x) = -\tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral é

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}\right)e^x - \tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Finalmente, observamos que a solução tentativa recomendada y_p algumas vezes resulta em uma solução da equação complementar e, portanto, não pode ser uma solução de uma equação não homogênea. Em tais casos, multiplicamos a solução tentativa recomendada por x (ou por x^2 se necessário) de modo que nenhum termo em $y_p(x)$ seja uma solução da equação complementar.

EXEMPLO 5 Resolva $y'' + y = \text{sen}\,x$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com raízes $\pm i$, logo, a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x$$

Os gráficos de quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 5 estão apresentados na Figura 4.

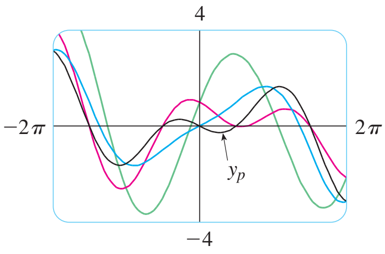


FIGURA 4

Geralmente, teríamos usado a solução tentativa

$$y_p(x) = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$$

mas observe que ela é uma solução da equação complementar. Então, em vez disso, tentemos

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\,\text{sen}\,x$$

Então

$$y_p'(x) = A\cos x - Ax\,\text{sen}\,x + B\,\text{sen}\,x + Bx\cos x$$

$$y_p''(x) = -2A\,\text{sen}\,x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\,\text{sen}\,x$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$y_p'' + y_p = -2A\,\text{sen}\,x + 2B\cos x = \text{sen}\,x$$

logo $A = -\tfrac{1}{2}$, $B = 0$, e

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x - \tfrac{1}{2}x\cos x$$

Resumimos o método dos coeficientes indeterminados como segue:

Resumo do Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Se $G(x) = e^{kx}P(x)$, onde P é um polinômio de grau n, então tente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de n-ésimo grau (cujos coeficientes são determinados através da substituição na equação diferencial).
2. Se $G(x) = e^{kx}P(x)\cos mx$ ou $G(x) = e^{kx}P(x)\,\text{sen}\,mx$, onde P é um polinômio de n-ésimo grau, então tente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x)\cos mx + e^{kx}R(x)\,\text{sen}\,mx$$

onde Q e R são polinômios de grau n-ésimo.

Modificação: Se algum termo de y_p for uma solução da equação complementar, multiplique y_p por x (ou por x^2 se necessário).

EXEMPLO 6 Determine a forma da solução tentativa para a equação diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x$.

SOLUÇÃO Aqui $G(x)$ tem a forma encontrada na parte 2 do resumo, onde $k = 2$, $m = 3$ e $P(x) = 1$. Assim, à primeira vista, a forma da solução tentativa deveria ser

$$y_p(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x)$$

Mas a equação auxiliar é $r^2 - 4r + 13 = 0$, com raízes $r = 2 \pm 3i$, portanto a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\,\text{sen}\,3x)$$

Isso significa que temos de multiplicar a solução tentativa sugerida por x. Então, em vez disso, usamos

$$y_p(x) = xe^{2x}(A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x)$$

O Método da Variação dos Parâmetros

Suponha que, após resolver a equação homogênea $ay'' + by' + cy = 0$, escrevamos a solução como

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{4}$$

onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 da Equação 4 pelas funções arbitrárias $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Procuramos uma solução particular da equação não homogênea $ay'' + by' + cy = G(x)$ da forma

$$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x) \tag{5}$$

(Esse método é chamado **variação dos parâmetros** porque variamos os parâmetros c_1 e c_2, tornando-os funções.) Derivando a Equação 5, obtemos

$$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2') \tag{6}$$

Uma vez que u_1 e u_2 são funções arbitrárias, podemos impor duas condições sobre eles. Uma condição é que y_p é uma solução da equação diferencial e podemos escolher a outra condição de modo a simplificar nossos cálculos. Considerando a expressão da Equação 6, vamos impor a condição de que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \tag{7}$$

Então, $$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

ou

$$\boxed{8} \qquad u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Mas y_1 e y_2 são soluções da equação complementar, logo

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

e a Equação 8 simplifica para

$$\boxed{9} \qquad a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

As Equações 7 e 9 formam um sistema de duas equações nas funções desconhecidas u_1' e u_2'. Após resolver esse sistema, podemos integrar para encontrar u_1 e u_2 e então a solução particular é dada pela Equação 5.

EXEMPLO 7 Resolva a equação $y'' + y = \text{tg}\, x$, $0 < x < \pi/2$.

SOLUÇÃO A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com as raízes $\pm i$; logo, a solução de $y'' + y = 0$ é $y(x) = c_1 \,\text{sen}\, x + c_2 \cos x$. Usando a variação dos parâmetros, buscamos uma solução da forma

$$y_p(x) = u_1(x)\,\text{sen}\, x + u_2(x) \cos x$$

Então $$y_p' = (u_1' \,\text{sen}\, x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \,\text{sen}\, x)$$

Faça

$$\boxed{10} \qquad u_1' \,\text{sen}\, x + u_2' \cos x = 0$$

Então, $$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \,\text{sen}\, x - u_1 \,\text{sen}\, x - u_2 \cos x$$

Para y_p ser uma solução, devemos ter

$$\boxed{11} \qquad y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \,\text{sen}\, x = \text{tg}\, x$$

Resolvendo as Equações 10 e 11, obtemos

$$u_1'(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \;\text{tg}\, x$$

$$u_1' = \text{sen}\, x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

(Procuramos uma solução particular, logo não precisaremos de uma constante de integração aqui.) Em seguida, a partir da Equação 10, obtém-se

$$u_2' = -\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\, u_1' = -\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

Então $$u_2(x) = \text{sen}\, x - \ln(\sec x + \text{tg}\, x)$$

(Observe que $\sec x + \text{tg}\, x > 0$ para $0 < x < \pi/2$.) Portanto

A Figura 5 mostra quatro soluções da equação diferencial do Exemplo 7.

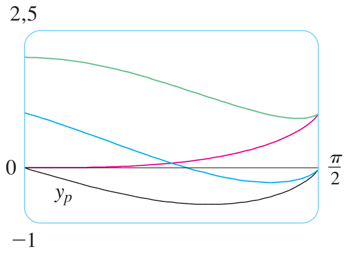


FIGURA 5

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)]\cos x \\ &= -\cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

17.2 Exercícios

1–10 Resolva a equação diferencial ou problema de valor inicial usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$

2. $y'' - y = x^3 - x$

3. $y'' + 9y = e^{-2x}$

4. $y'' + 2y' + 5y = 1 + e^x$

5. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

6. $y'' - 4y' + 4y = x - \operatorname{sen} x$

7. $y'' + y = e^x + x^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' - 4y = e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

9. $y'' - y' = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' + y' - 2y = x + \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11–12 Faça o gráfico da solução particular e de várias outras soluções. Que características essas soluções têm em comum?

11. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$

12. $y'' + 4y = e^{-x}$

13–18 Escreva uma solução tentativa para o método dos coeficientes indeterminados. Não determine os coeficientes.

13. $y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \operatorname{sen} x$

14. $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$

15. $y'' - 3y' + 2y = e^x + \operatorname{sen} x$

16. $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$

17. $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

18. $y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$

19–22 Resolva a equação diferencial usando (a) coeficientes indeterminados e (b) variação dos parâmetros.

19. $4y'' + y = \cos x$

20. $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

21. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

22. $y'' - y' = e^x$

23–28 Resolva a equação diferencial usando o método da variação dos parâmetros.

23. $y'' + y = \sec^2 x, \ 0 < x < \pi/2$

24. $y'' + y = \sec^3 x, \ 0 < x < \pi/2$

25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

26. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

27. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

28. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador **1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

17.3 Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem

As equações diferenciais lineares de segunda ordem têm diversas aplicações na ciência e na engenharia. Nesta seção exploraremos dois deles: a vibração de molas e os circuitos elétricos.

Vibração de Molas

Consideremos o movimento de um objeto com massa m na extremidade de uma mola que está na vertical (como na Figura 1) ou na horizontal sobre uma superfície plana (como na Figura 2).

Na Seção 6.4, no Volume I, discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

$$\text{força elástica} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante elástica**). Se ignorarmos qualquer força de resistência externa (devido à resistência do ar ou ao atrito), em seguida, pela Segunda Lei de Newton (força é igual a massa vezes aceleração), temos

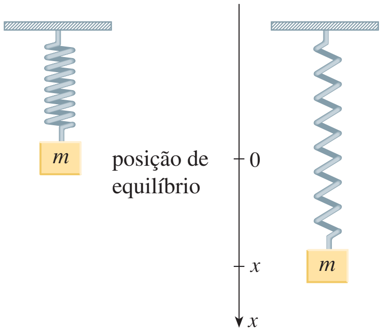


FIGURA 1

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{ou} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

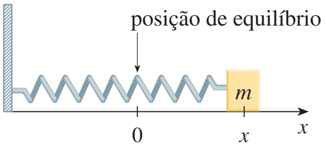


FIGURA 2

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Sua equação auxiliar é $mr^2 + k = 0$ com as raízes $r = \pm\omega i$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$. Assim, a solução geral é

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

que pode também ser escrita como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

onde

$$\omega = \sqrt{k/m} \qquad \text{(frequência)}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \text{(amplitude)}$$

$$\cos\delta = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen}\delta = -\frac{c_2}{A} \qquad (\delta \text{ é o ângulo de fase})$$

(Veja o Exercício 17.) Esse tipo de movimento é chamado **movimento harmônico simples**.

EXEMPLO 1 Uma mola com uma massa de 2 kg tem comprimento natural de 0,5 m. Uma força de 25,6 N é necessária para mantê-la esticada até um comprimento de 0,7 m. Se a mola é esticada até um comprimento de 0,7 m e, em seguida, libertada com uma velocidade inicial 0, encontre a posição da massa em qualquer momento t.

SOLUÇÃO Pela Lei de Hooke, a força necessária para estender a mola é

$$k(0{,}2) = 25{,}6$$

e, dessa forma, $k = 25{,}6/0{,}2 = 128$. Usando esse valor da constante da mola k, junto com $m = 2$ na Equação 1, temos

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como na discussão anterior, a solução dessa equação é

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t \tag{2}$$

Estamos dando a condição inicial que $x(0) = 0{,}2$. Mas, da Equação 2, $x(0) = c_1$. Portanto, $c_1 = 0{,}2$. Derivando a Equação 2, obtemos

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Uma vez que a velocidade inicial é dada como $x'(0) = 0$, temos $c_2 = 0$ e a solução é

$$x(t) = \tfrac{1}{5}\cos 8t$$

Vibrações Amortecidas

A seguir, estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola que está sujeita a uma força de atrito (no caso da mola horizontal da Figura 2) ou a uma força de amortecimento (no caso de uma mola vertical que se movimenta em meio a um fluido, como na Figura 3). Um exemplo é a força de amortecimento fornecida pelo amortecedor em um carro ou uma bicicleta.

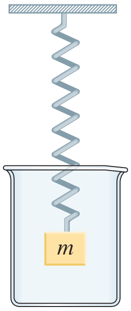


FIGURA 3

Vamos supor que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa e atue na direção oposta ao movimento. (Isso foi confirmado, pelo menos aproximadamente, por algumas experiências físicas.) Assim

$$\text{força de amortecimento} = -c\frac{dx}{dt}$$

Schwinn Cycling and Fitness

onde c é uma constante positiva, chamada **constante de amortecimento**. Assim, nesse caso, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

ou

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0} \tag{3}$$

A Equação 3 é uma equação diferencial linear de segunda ordem e sua equação auxiliar é $mr^2 + cr + k = 0$. As raízes são

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{4}$$

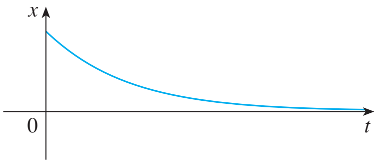
De acordo com a Seção 17.1, precisamos discutir três casos.

CASO I $c^2 - 4mk > 0$ (superamortecimento)

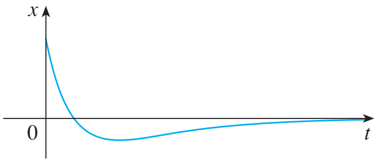
Nesse caso, r_1 e r_2 são raízes reais distintas e

$$x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

Uma vez que c, m e k são todas positivas, temos $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, logo, as raízes r_1 e r_2 dadas pela Equação 4 devem ser ambas negativas. Isto mostra que $x \to 0$ quando $t \to \infty$. Os gráficos característicos de x como função de t estão mostrados na Figura 4. Observe que não ocorrem oscilações. (É possível que a massa a passe para a posição de equilíbrio uma vez, porém apenas uma vez.) Isso porque $c^2 > 4mk$ significa que há uma forte força de amortecimento (óleo de alta viscosidade ou graxa) comparada com uma mola fraca ou com uma massa pequena.



(a) Superamortecimento



(b) Amortecimento crítico

FIGURA 4

CASO II $c^2 - 4mk = 0$ (amortecimento crítico)

Esse caso corresponde a raízes iguais

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = (c_1 + c_2t)e^{-(c/2m)t}$$

Isto é semelhante ao Caso I, e gráficos típicos são mostrados na Figura 4 (Veja o Exercício 12.), mas o amortecimento é só o suficiente para suprimir as vibrações. Qualquer decréscimo na viscosidade do fluido gera as vibrações do caso seguinte.

CASO III $c^2 = 4mk < 0$ (subamortecimento)

Aqui, as raízes são complexas:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

onde

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

A solução é dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Vemos que há oscilações amortecidas pelo fator $e^{-(c/2m)t}$. Uma vez que $c > 0$ e $m > 0$, temos $-(c/2m) < 0$, logo, $e^{-(c/2m)t} \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso implica que $x \to 0$ quando $t \to \infty$; isto é, o movimento decai a 0 à medida que o tempo cresce. Um gráfico característico é mostrado na Figura 5.

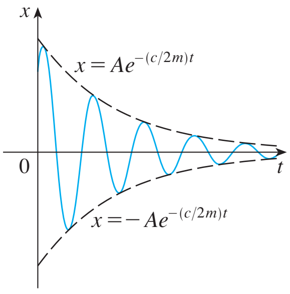


FIGURA 5
Subamortecimento

EXEMPLO 2 Suponha que a massa do Exemplo 1 esteja imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 40$. Determine a posição da massa em qualquer instante t se ele iniciar da posição de equilíbrio e for dado um empurrão para que a velocidade inicial seja de 0,6 m/s.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, a massa é $m = 2$ e a constante da mola é $k = 128$, logo a equação diferencial $\boxed{3}$ torna-se

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

A equação auxiliar é $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$ com raízes -4 e -16, logo o movimento é superamortecido e a solução é

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$$

Temos que $x(0) = 0$, logo $c_1 + c_2 = 0$. Derivando, obtemos

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t}$$

então

$$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0{,}6$$

Uma vez que $c_2 = -c_1$, isso nos fornece $12c_1 = 0{,}6$ ou $c_1 = 0{,}05$. Portanto

$$x = 0{,}05(e^{-4t} - e^{-16t})$$

A Figura 6 mostra o gráfico da função posição para o movimento superamortecido do Exemplo 2.

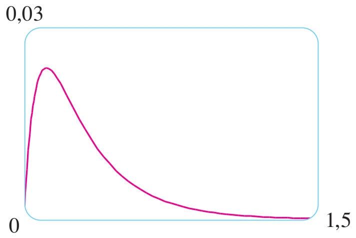


FIGURA 6

Vibrações Forçadas

Suponha que, em adição à força restauradora e à força de amortecimento, o movimento da massa presa à mola seja afetado pela força externa $F(t)$. Então, a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} + \text{força externa}$$

$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Assim, em lugar da equação homogênea $\boxed{3}$, o movimento da massa é agora governado pela seguinte equação diferencial não homogênea:

$$\boxed{5} \qquad \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)}$$

O movimento da massa pode ser determinado pelos métodos da Seção 17.2.

Uma força externa que ocorre comumente é uma função força periódica

$$F(t) = F_0\cos\omega_0 t \qquad \text{onde} \quad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

Nesse caso, e na falta de uma força de amortecimento ($c = 0$), será pedido no Exercício 9 que você use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que

$$\boxed{6} \qquad x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\,\text{sen}\,\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\cos\omega_0 t$$

Se $\omega_0 = \omega$, então a frequência aplicada reforça a frequência natural e o resultado são vibrações de grande amplitude. Esse é o fenômeno da **ressonância** (veja o Exercício 10).

Circuitos Elétricos

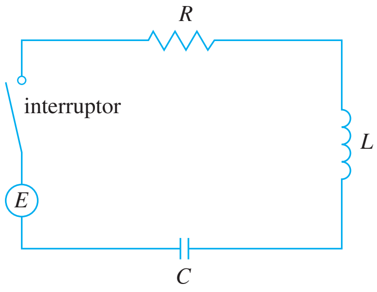


FIGURA 7

Nas Seções 9.3 e 9.5 usamos equações lineares e separáveis de primeira ordem para analisar circuitos elétricos que contêm resistor e indutor (veja a Figura 5 na Seção 9.3 e a Figura 4 na Seção 9.5) ou um resistor e um capacitor (veja o Exercício 29 na Seção 9.5). Agora que sabemos como resolver equações lineares de segunda ordem, estamos em posição de analisar o circuito mostrado na Figura 7, que contém uma força eletromotriz E (proporcionada pela pilha ou gerador), um resistor R, um indutor L e um capacitor C, em série. Se a carga no capacitor no instante t é $Q = Q(t)$, então a corrente é a taxa de variação de Q em relação a t: $I = dQ/dt$. Como na Seção 9.5, é sabido da física que as quedas de voltagem no resistor, indutor e capacitor são dadas por

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. A lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma destas quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Uma vez que $I = dQ/dt$, essa equação se torna

$$\boxed{7} \qquad \boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)}$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Se a carga Q_0 e a corrente I_0 forem conhecidas no instante 0, então temos as condições iniciais

$$Q(0) = Q_0 \qquad Q'(0) = I(0) = I_0$$

e o problema de valor inicial pode ser resolvido pelos métodos da Seção 17.2.

Uma equação diferencial para a corrente pode ser obtida derivando-se a Equação 7 em relação a t e lembrando que $I = dQ/dt$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

EXEMPLO 3 Determine a carga e a corrente no instante t no circuito da Figura 7 se $R = 40\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 16 \times 10^{-4}$ F, $E(t) = 100\cos 10t$ e a carga e a corrente inicial forem ambas 0.

SOLUÇÃO Com os valores dados de L, R, C e $E(t)$, a Equação 7 torna-se

$$\boxed{8} \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100\cos 10t$$

A equação auxiliar é $r^2 + 40r + 625 = 0$ com raízes

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

de modo que a solução da equação complementar é

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \operatorname{sen} 15t)$$

Para o método dos coeficientes indeterminados, tentamos a solução particular

$$Q_p(t) = A\cos 10t + B\,\text{sen}\,10t$$

Então

$$Q_p'(t) = -10A\,\text{sen}\,10t + 10B\cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A\cos 10t - 100B\,\text{sen}\,10t$$

Substituindo na Equação 8, temos

$$(-100A\cos 10t - 100B\,\text{sen}\,10t) + 40(-10A\,\text{sen}\,10t + 10B\cos 10t)$$
$$+ 625(A\cos 10t + B\,\text{sen}\,10t) = 100\cos 10t$$

ou

$$(525A + 400B)\cos 10t + (-400A + 525B)\,\text{sen}\,10t = 100\cos 10t$$

Igualando os coeficientes, temos

$$\begin{aligned} 525A + 400B &= 100 \\ -400A + 525B &= 0 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 21A + 16B &= 4 \\ -16A + 21B &= 0 \end{aligned}$$

A solução deste sistema é $A = \frac{84}{697}$ e $B = \frac{64}{697}$, logo, uma solução particular é

$$Q_p(t) = \tfrac{1}{697}(84\cos 10t + 64\,\text{sen}\,10t)$$

e a solução geral é

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_c(t) + Q_p(t) \\ &= e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2\,\text{sen}\,15t) + \tfrac{4}{697}(21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t) \end{aligned}$$

Impondo a condição inicial $Q(0) = 0$, obtemos

$$Q(0) = c_1 + \tfrac{84}{697} = 0 \qquad c_1 = -\tfrac{84}{697}$$

Para impormos a outra condição inicial, primeiro vamos derivar para determinar a corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)\cos 15t + (-15c_1 - 20c_2)\,\text{sen}\,15t]$$
$$+ \tfrac{40}{697}(-21\,\text{sen}\,10t + 16\cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \tfrac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\tfrac{464}{2\,091}$$

Assim, a fórmula para a carga é

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63\cos 15t - 116\,\text{sen}\,15t) + (21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t)\right]$$

e a expressão para a corrente é

$$I(t) = \tfrac{1}{2\,091}[e^{-20t}(-1\,920\cos 15t + 13\,060\,\text{sen}\,15t) + 120(-21\,\text{sen}\,10t + 16\cos 10t)]$$

OBSERVAÇÃO 1 No Exemplo 3 a solução para $Q(t)$ consiste em duas partes. Uma vez que $e^{-20t} \to 0$ quando $t \to \infty$ e tanto $\cos 15t$ quanto $\text{sen}\,15t$ são funções limitadas,

$$Q_c(t) = \tfrac{4}{2\,091}e^{-20t}(-63\cos 15t - 116\,\text{sen}\,15t) \to 0 \qquad \text{quando} \quad t \to \infty$$

Logo, para valores grandes de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \tfrac{4}{697}(21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t)$$

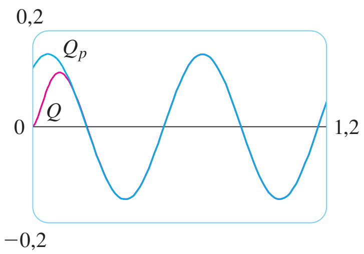


FIGURA 8

e, por essa razão, $Q_p(t)$ é denominada **solução estacionária.** A Figura 8 mostra uma comparação entre o gráfico de Q nesse caso e a solução estacionária.

OBSERVAÇÃO 2 Comparando as Equações 5 e 7, vemos que matematicamente elas são idênticas. Isso sugere a analogia dada na tabela a seguir entre situações físicas que, à primeira vista, são muito diferentes.

$$\boxed{5} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$\boxed{7} \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Sistema de molas		Circuito elétrico	
x	deslocamento	Q	carga
dx/dt	velocidade	$I = dQ/dt$	corrente
m	massa	L	indutância
c	amortecimento constante	R	resistência
k	constante da mola	$1/C$	elastância
$F(t)$	força externa	$E(t)$	força eletromotriz

Podemos também transferir outras ideias de uma situação para outra. Por exemplo, a solução estacionária discutida na Obs. 1 faz sentido no sistema de massa-mola. E o fenômeno da ressonância no sistema de massa-mola pode ser proveitosamente transportado para circuitos elétricos como ressonância elétrica.

17.3 Exercícios

1. Uma mola tem comprimento natural 0,75 m e 5 kg de massa. Uma força de 25 N é necessária para manter a mola esticada até um comprimento de 1 m. Se a mola for esticada para um comprimento de 1,1 m e então solta com velocidade 0, encontre a posição da massa após *t* segundos.

2. Uma mola com uma massa de 8 kg presa a ela é mantida esticada 0,4 m além de seu comprimento natural por uma força de 32 N. A mola começa em sua posição de equilíbrio com velocidade inicial de 1 m/s. Localize a posição da massa em qualquer momento *t*.

3. Uma mola presa a uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento 14 e uma força de 6 N é necessária para manter a mola esticada 0,5 m além de seu comprimento natural. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então é solta com velocidade 0. Localize a posição da massa em qualquer momento *t*.

4. Uma força de 13 N é necessária para manter uma mola presa a uma massa de 2 kg esticada 0,25 m além de seu comprimento natural. A constante de amortecimento da mola é $c = 8$.

(a) Se a massa começa na posição de equilíbrio com velocidade de 0,5 m/s, encontre a posição no instante *t*.

(b) Faça o gráfico da função posição da massa.

5. Para a mola do Exercício 3, determine a massa que produziria amortecimento crítico.

6. Para a mola do Exercício 4, determine a constante de amortecimento que produziria amortecimento crítico.

7. Uma mola tem massa de 1 kg e a sua constante de mola é $k = 100$. A mola é liberada em um ponto 0,1 m acima da sua posição de equilíbrio. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante de amortecimento c: 10, 15, 20, 25, 30. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?

8. A mola tem uma massa de 1 kg e a sua constante de amortecimento é $c = 10$. A mola começa a partir da sua posição de equilíbrio a uma velocidade de 1 m/s. Faça os gráficos da função posição para os seguintes valores da constante de mola k: 10, 20, 25, 30, 40. Que tipo de amortecimento ocorre em cada caso?

9. Suponha que uma mola tenha uma massa m e constante de mola k e seja $\omega = \sqrt{k/m}$. Suponha uma constante de amortecimento tão pequena que a força de amortecimento seja desprezível. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ for aplicada, onde $\omega_0 \neq \omega$, use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é descrito pela Equação 6.

10. Como no Exercício 9, considere uma mola com uma massa m, constante da mola k e constante de amortecimento $c = 0$, e seja $\omega = \sqrt{k/m}$. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ for aplicada (a frequência aplicada é igual à frequência natural), use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é dado por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + F_0/2m\omega t \operatorname{sen} \omega t$$

11. Mostre que se $\omega_0 \neq \omega$, mas ω/ω_0 é um número racional, então o movimento descrito pela Equação 6 é periódico.

12. Considere uma massa presa a uma mola sujeita a uma força de atrito ou de amortecimento.

(a) No caso de amortecimento crítico, o movimento é dado por $x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Mostre que o gráfico de x cruza o eixo t sempre que c_1 e c_2 tiverem sinais opostos.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   **1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(b) No caso de superamortecimento, o movimento é dado por $x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$, onde $r_1 > r_2$. Determine uma condição sobre os módulos relativos de c_1 e c_2 sob a qual o gráfico de x cruza o eixo t para um valor positivo de t.

13. Um circuito em série consiste em um resistor com $R = 20\ \Omega$, um indutor com $L = 1$ H, um capacitor com $C = 0{,}002$ F, e uma pilha de 12 V. Se a carga inicial e a corrente forem 0, encontre a carga e a corrente no instante t.

14. Um circuito em série contém um resistor com $R = 24\ \Omega$, um indutor com $L = 2$ H, um capacitor com $C = 0{,}005$ F e uma pilha de 12 V. A carga inicial é $Q = 0{,}001\ C$ e a corrente inicial é 0.

(a) Determine a carga e a corrente no instante t.

(b) Faça o gráfico das funções carga e corrente.

15. A pilha no Exercício 13 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$. Determine a carga no instante t.

16. A pilha no Exercício 14 é substituída por um gerador produzindo uma voltagem de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$.

(a) Determine a carga no instante t.

(b) Faça o gráfico da função carga.

17. Verifique se a solução para a Equação 1 pode ser escrita na forma $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$.

18. A figura exibe um pêndulo com comprimento L e o ângulo θ a partir da vertical do pêndulo. Pode ser mostrado que θ, como uma função do tempo, satisfaz a equação diferencial não linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

onde g é a aceleração da gravidade. Para valores pequenos de θ podemos usar a aproximação linear $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e então a equação diferencial se torna linear.

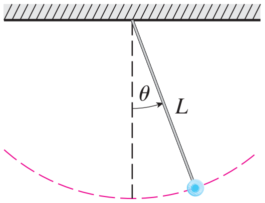
(a) Determine a equação do movimento de um pêndulo com comprimento 1 m se θ é inicialmente 0,2 rad e a velocidade angular inicial é $d\theta/dt = 1$ rad/s.

(b) Qual o ângulo máximo a partir da vertical?

(c) Qual o período do pêndulo (isto é, o tempo necessário para uma oscilação completa)?

(d) Quando o pêndulo estará pela primeira vez na vertical?

(e) Qual a velocidade angular do pêndulo quando ele está na vertical?



17.4 Soluções em Séries

Muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas explicitamente em termos de combinações finitas de funções usuais simples. Isso é verdade mesmo para uma equação com aparência bem simples, como

$$\boxed{1} \qquad y'' - 2xy' + y = 0$$

Todavia, é importante poder resolver equações como a que foi dada acima, pois elas surgem de problemas físicos, especialmente em conexão com a equação de Schrödinger na mecânica quântica. Em tais casos, vamos usar o método das séries de potência, isto é, procuraremos por uma solução da forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

O método é substituir essa expressão na equação diferencial e determinar os valores dos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Essa técnica assemelha-se ao método dos coeficientes indeterminados, discutido na Seção 17.2.

Antes de usarmos as séries de potências para resolver a Equação 1, ilustraremos o método com uma equação mais simples, $y'' + y = 0$, no Exemplo 1. Realmente já sabemos como resolver essa equação pelas técnicas da Seção 17.1, contudo é mais fácil entender o método das séries de potências quando ele é aplicado a essa equação mais simples.

EXEMPLO 1 Use séries de potências para resolver a equação $y'' + y = 0$.

SOLUÇÃO Vamos supor que haja uma solução da forma

$$\boxed{2} \qquad y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Escrevendo os primeiros termos de $\boxed{4}$, você verá que são iguais a $\boxed{3}$. Para obtermos $\boxed{4}$, substituímos n por $n + 2$ e começamos a somatória em 0 em vez de 2

Podemos derivar a série de potências termo a termo. Assim

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

$$\boxed{3} \qquad y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$$

A fim de compararmos as expressões de y e y'' mais facilmente, reescrevemos y'' como segue:

$$\boxed{4} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

Substituindo as expressões nas Equações 2 e 4 na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

ou

$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0$$

Se duas séries de potências são iguais, então os coeficientes correspondentes devem ser iguais. Portanto, os coeficientes de x^n da Equação 5 devem ser 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

$$\boxed{6} \qquad c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A Equação 6 é chamada *relação de recorrência*. Se c_0 e c_1 forem conhecidos, essa equação nos permite determinar os coeficientes restantes recursivamente, usando $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ em sucessão.

Usando $n = 0$: $\quad c_2 = -\dfrac{c_0}{1 \cdot 2}$

Usando $n = 1$: $\quad c_3 = -\dfrac{c_1}{2 \cdot 3}$

Usando $n = 2$: $\quad c_4 = -\dfrac{c_2}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{4!}$

Usando $n = 3$: $\quad c_5 = -\dfrac{c_3}{4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{5!}$

Usando $n = 4$: $\quad c_6 = -\dfrac{c_4}{5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{4!\,5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{6!}$

Usando $n = 5$: $\quad c_7 = -\dfrac{c_5}{6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{5!\,6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{7!}$

Agora, já percebemos o seguinte padrão:

Para os coeficientes pares, $\quad c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$

Para os coeficientes ímpares, $\quad c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n+1)!}$

Colocando esses valores na Equação 2, escrevemos a solução como

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) \\ &\qquad + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Observe que há duas constantes arbitrárias, c_0 e c_1.

OBSERVAÇÃO 1 Reconhecemos as séries obtidas no Exemplo 1 como as séries de Maclaurin para cos x e sen x. (Veja as Equações 11.10.16 e 11.10.15.) Portanto, podemos escrever a solução como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$$

Entretanto, em geral não somos capazes de expressar soluções das equações diferenciais em séries de potências em termos de funções conhecidas.

EXEMPLO 2 Resolva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUÇÃO Vamos supor que haja uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Então $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

e $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

como no Exemplo 1. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n]x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n$$

Essa equação estará satisfeita se o coeficiente de x^n for 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$$

$$\boxed{7} \qquad c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Resolvemos essa relação de recursão usando $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sucessivamente na Equação 7:

Usando $n = 0$: $\quad c_2 = \dfrac{-1}{1 \cdot 2} c_0$

Usando $n = 1$: $\quad c_3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} c_1$

Usando $n = 2$: $c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$

Usando $n = 3$: $c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$

Usando $n = 4$: $c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4!\, 5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$

Usando $n = 5$: $c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\, 6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$

Usando $n = 6$: $c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$

Usando $n = 7$: $c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$

Em geral, os coeficientes pares são dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} c_0$$

e os coeficientes ímpares são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} c_1$$

A solução é

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!}x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!}x^8 - \cdots\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!}x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!}x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!}x^9 + \cdots\right) \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} y &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 2 No Exemplo 2, *supusemos* que a equação diferencial tivesse uma solução em série. Mas agora podemos verificar diretamente que a função dada pela Equação 8 é de fato uma solução.

OBSERVAÇÃO 3 Ao contrário da situação do Exemplo 1, as séries de potências que surgem na solução do Exemplo 2 não definem funções elementares. As funções

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}$$

e

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}$$

são perfeitamente boas, entretanto não podem ser expressas em termos de funções familiares. Podemos usar essas expressões em série de potência de y_1 e y_2 para calcular os valores aproximados das funções e até mesmo seus gráficos. A Figura 1 mostra as primeiras somas parciais $T_0, T_2, T_4, \dots$ (polinômios de Taylor) para $y_1(x)$, e vemos como eles convergem para y_1. Dessa maneira, podemos fazer ambos os gráficos de y_1 e y_2 na Figura 2.

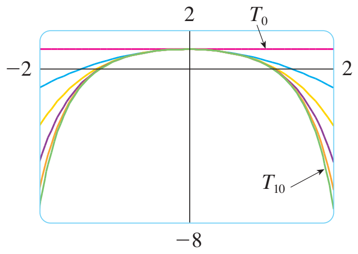


FIGURA 1

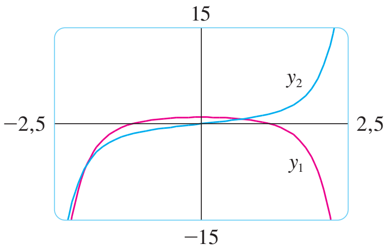


FIGURA 2

OBSERVAÇÃO 4 Se nos pedirem para resolver o problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

devemos observar, do Teorema 11.10.5, que

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad c_1 = y'(0) = 1$$

Isso simplificaria os cálculos no Exemplo 2, uma vez que todos os coeficientes pares seriam 0. A solução para o problema de valor inicial é

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

17.4 Exercícios

1–11 Use séries de potências para resolver a equação diferencial.

1. $y' - y = 0$

2. $y' = xy$

3. $y' = x^2 y$

4. $(x - 3)y' + 2y = 0$

5. $y'' + xy' + y = 0$

6. $y'' = y$

7. $(x - 1)y'' + y' = 0$

8. $y'' = xy$

9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11. $y'' + x^2 y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

12. A solução do problema de valor inicial

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

é chamada função de Bessel de ordem 0.

(a) Resolva o problema de valor inicial para determinar uma expansão em série de potências da função de Bessel.

(b) Faça o gráfico de vários polinômios de Taylor até atingir um que pareça uma boa aproximação para a função de Bessel no intervalo $[-5, 5]$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

17 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.
(b) Escreva a equação auxiliar.
(c) Como você usaria as raízes da equação auxiliar para resolver a equação diferencial? Escreva a forma da solução para cada um dos três casos que podem ocorrer.

2. (a) O que é um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem?
(b) O que é o problema de contorno para tal equação?

3. (a) Escreva a forma geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes.
(b) O que é a equação complementar? Como ela pode ajudar a resolver a equação diferencial original?
(c) Explique o funcionamento do método dos coeficientes indeterminados.
(d) Explique o funcionamento do método da variação dos parâmetros.

4. Discuta duas aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem.

5. Como você usaria as séries de potência para resolver uma equação diferencial?

Testes Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se y_1 e y_2 forem soluções de $y'' + y = 0$, então $y_1 + y_2$ também é uma solução da equação.
2. Se y_1 e y_2 forem soluções de $y'' + 6y' + 5y = x$, então $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é uma solução da equação.
3. A solução geral de $y'' - y = 0$ pode ser escrita como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$$

4. A equação $y'' - y = e^x$ tem uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x$$

Exercícios

1–10 Resolva a equação diferencial.

1. $4y'' - y = 0$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0$
3. $y'' + 3y = 0$
4. $4y'' + 4y' + y = 0$
5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$
6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$
7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x \cos x$
8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \operatorname{sen} 2x$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$
10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cossec} x, \quad 0 < x < \pi/2$

11–14 Resolva o problema de valor inicial.

11. $y'' + 6y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 12$
12. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
13. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

15–16 Resolva o problema de contorno, se possível.

15. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1$
16. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^{-2\pi}$

17. Use séries de potências para resolver o problema de valor inicial.

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

18. Use a série de potência para resolver a equação

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

19. Um circuito em série contém um resistor com $R = 40\ \Omega$, um indutor com $L = 2$ H, um capacitor com $C = 0{,}0025$ F, e uma pilha de 12 V. A carga inicial é $Q = 0{,}01$ C e a corrente inicial é 0. Encontre a carga no instante t.
20. Uma mola com uma massa de 2 kg presa a ela tem uma constante de amortecimento 16 e uma força de 12,8 N mantém a mola esticada 0,2 m além de seu comprimento original. Determine a posição da massa no instante t se ela iniciar na posição de equilíbrio com velocidade de 2,4 m/s.
21. Suponha que a Terra seja uma esfera sólida de densidade uniforme com massa M e raio $R = 6\,370$ km. Para uma partícula de massa m a uma distância r a partir do centro da Terra, a força gravitacional que atrai a partícula para o centro é

$$F_r = \frac{-GM_r m}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e M_r é a massa de Terra dentro de uma esfera de raio r.

(a) Mostre que $F_r = \dfrac{-GMm}{R^3} r$.

(b) Suponha que um buraco seja perfurado na Terra ao longo de um diâmetro. Mostre que, se uma partícula de massa m cair a partir do repouso da superfície para dentro do buraco, então a distância $y = y(t)$ da partícula a partir do centro da Terra no instante t é dada por

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

onde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Conclua, a partir da parte (b), que a partícula está submetida a um movimento harmônico simples. Encontre o período T.

(d) Com que velocidade a partícula passa pelo centro da Terra?

Apêndices

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos
B Geometria Analítica e Retas
C Gráficos das Equações de Segundo Grau
D Trigonometria
E Notação de Somatória (ou Notação Sigma)
F Demonstrações dos Teoremas
G O Logaritmo Definido como uma Integral
H Números Complexos
I Respostas para os Exercícios Ímpares

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos

O cálculo baseia-se no sistema de números reais. Começamos com os **inteiros**:

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

Então, construímos os **números racionais**, que são as razões de inteiros. Assim, qualquer número racional r pode ser expresso como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{onde } m \text{ e } n \text{ são inteiros e } n \neq 0$$

Os exemplos são

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0{,}17 = \tfrac{17}{100}$$

(Lembre-se de que a divisão 0 sempre é descartada, portanto expressões como $\frac{3}{0}$ e $\frac{0}{0}$ são indefinidas.) Alguns números reais, como $\sqrt{2}$, não podem ser expressos como a razão de números inteiros e são, portanto, chamados **números irracionais**. Pode ser mostrado, com variado grau de dificuldade, que os números a seguir são irracionais:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \text{sen } 1° \qquad \log_{10} 2$$

O conjunto de todos os números reais é geralmente denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Quando usarmos a palavra *número* sem qualificativo, estaremos nos referindo a um "número real".

Todo número tem uma representação decimal. Se o número for racional, então a dízima correspondente é repetida indefinidamente (periódica). Por exemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0{,}317171717\ldots = 0{,}3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1{,}285714285714\ldots = 1{,}\overline{285714}$$

(A barra indica que a sequência de dígitos se repete indefinidamente.) Caso contrário, se o número for irracional, a dízima não será repetitiva:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots \qquad \pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

Ao pararmos a expansão decimal de qualquer número em uma certa casa decimal, obtemos uma aproximação dele. Por exemplo, podemos escrever

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

onde o símbolo $\approx$ deve ser lido como "é aproximadamente igual a". Quanto mais casas decimais forem mantidas, melhor será a aproximação obtida.

Os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, como na Figura 1. A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha. Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem**, que corresponde ao número real 0. Dada qualquer unidade conveniente de medida, cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância, à direita, da origem e cada número negativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está a x unidades de distância, à esquerda, da origem. Assim, todo número real é representado por um ponto sobre a reta, e todo ponto P sobre a reta corresponde a um único número real. O número real associado ao ponto P é chamado **coordenada** de P, e a reta é dita então **reta coordenada**, ou **reta dos números reais**, ou simplesmente **reta real**. Frequentemente, identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos em um número como um ponto na reta real.

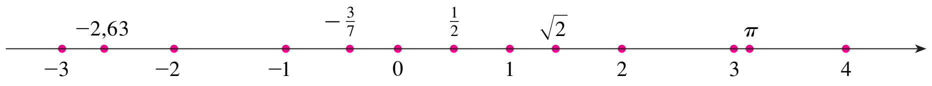


FIGURA 1

Os números reais são ordenados. Dizemos que *a é menor que b* e escrevemos $a < b$ se $b - a$ for um número positivo. Geometricamente, isso significa que a está à esquerda de b sobre a reta real. (De maneira equivalente, dizemos que *b é maior que a* e escrevemos $b > a$.) O símbolo $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) significa que $a < b$ ou $a = b$ e deve ser lido como "a é menor ou igual a b". Por exemplo, são verdadeiras as seguintes desigualdades:

$$7 < 7{,}4 < 7{,}5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

A seguir, vamos precisar usar a *notação de conjunto*. Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados **elementos** do conjunto. Se S for um conjunto, a notação $a \in S$ significa que a é um elemento de S, e $a \notin S$ significa que a não é um elemento de S. Por exemplo, se Z representa o conjunto dos inteiros, então $-3 \in Z$, mas $\pi \notin Z$. Se S e T forem conjuntos, então sua **união**, $S \cup T$, é o conjunto que consiste em todos os elementos que estão em S ou T (ou ambos, S e T). A **intersecção** de S e T é o conjunto $S \cap T$ consistindo em todos os elementos que estão em S e em T. Em outras palavras, $S \cap T$ é a parte comum de S e T. O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é o conjunto que não contém nenhum elemento.

Alguns conjuntos podem ser descritos listando-se seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto A consistindo em todos os inteiros positivos menores que 7 pode ser escrito como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Podemos também descrever A na *notação construtiva de conjuntos* como

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 7\}$$

que deve ser lido "A é o conjunto dos x tal que x é um inteiro e $0 < x < 7$".

Intervalos

Certos conjuntos de números reais, denominados **intervalos**, ocorrem frequentemente no cálculo e correspondem geometricamente a segmentos de reta. Por exemplo, se $a < b$, o **intervalo aberto** de a até b consiste em todos os números entre a e b e é denotado pelo símbolo (a, b). Usando a notação construtiva de conjuntos, podemos escrever

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

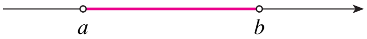


FIGURA 2
Intervalo aberto (a, b)

Observe que as extremidades do intervalo, isto é, a e b, estão excluídas. Isso é indicado pelos parênteses ( ) e pelas bolinhas vazias na Figura 2. O **intervalo fechado** de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

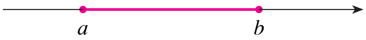
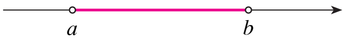
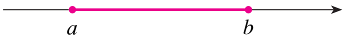
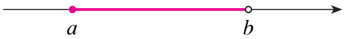
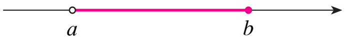
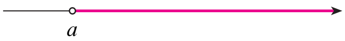
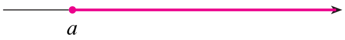
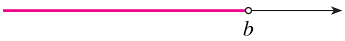
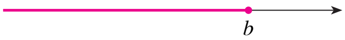
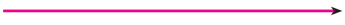


FIGURA 3
Intervalo fechado $[a, b]$

Aqui, as extremidades do intervalo estão incluídas. Isso é indicado pelos colchetes [ ] e pelas bolinhas cheias na Figura 3. Também é possível incluir somente uma extremidade em um intervalo, conforme mostrado na Tabela 1.

1 Tabela de Intervalos

Notação	Descrição do conjunto	Ilustração
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)	

A Tabela 1 dá uma lista dos nove tipos possíveis de intervalos. Em todos os casos, sempre presumimos que $a < b$.

É necessário também considerar intervalos infinitos, como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

Isso não significa que ∞ (“infinito”) seja um número. A notação (a, ∞) representa o conjunto de todos os números maiores que a; dessa forma, o símbolo ∞ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção positiva.

Desigualdades

Quando trabalhar com desigualdades, observe as seguintes regras:

$\boxed{2}$ Regras para Desigualdades

1. Se $a < b$, então $a + c < b + c$.
2. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
5. Se $0 < a < b$, então $1/a > 1/b$.

A Regra 1 diz que podemos adicionar qualquer número a ambos os lados de uma desigualdade e a Regra 2 diz que duas desigualdades podem ser adicionadas. Porém, devemos ter cuidado com a multiplicação. A Regra 3 diz que podemos multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um *número* positivo, mas a Regra 4 diz que se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, então inverteremos o sentido da desigualdade. Por exemplo, se tomarmos a desigualdade $3 < 5$ e multiplicar por 2, obtemos $6 < 10$, mas se multiplicarmos por -2, obtemos $-6 > -10$. Por fim, a Regra 5 diz que se tomarmos recíprocos, então inverteremos o sentido de uma desigualdade (desde que os números sejam positivos).

EXEMPLO 1 Resolva a inequação $1 + x < 7x + 5$.

SOLUÇÃO A desigualdade dada é satisfeita por alguns valores de x, mas não por outros. *Resolver* uma inequação significa determinar o conjunto dos números x para os quais a desigualdade é verdadeira. Isto é conhecido como *conjunto solução*.

Primeiro, subtraímos 1 de cada lado da desigualdade (usando a Regra 1 com $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Então subtraímos $7x$ de ambos os lados (Regra 1 com $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Vamos dividir agora ambos os lados por -6 (Regra 4 com $c = -\frac{1}{6}$):

$$x > -\tfrac{4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

Esses passos podem ser todos invertidos; dessa forma, o conjunto solução consiste em todos os números maiores que $-\frac{2}{3}$. Em outras palavras, a solução da inequação é o intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

EXEMPLO 2 Resolva as inequações $4 \leqslant 3x - 2 < 13$.

SOLUÇÃO Aqui o conjunto solução consiste em todos os valores de x que satisfazem a ambas as desigualdades. Usando as regras dadas em $\boxed{2}$, vemos que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$
\begin{aligned}
4 &\leqslant 3x - 2 < 13 \\
6 &\leqslant 3x < 15 && \text{(adicione 2)} \\
2 &\leqslant x < 5 && \text{(divida por 3)}
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto solução é $[2, 5)$.

EXEMPLO 3 Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos fatorar o lado esquerdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Sabemos que a equação correspondente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tem as soluções 2 e 3. Os números 2 e 3 dividem o eixo real em três intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

Em cada um desses intervalos, determinamos os sinais dos fatores. Por exemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Vamos então registrar esses sinais na seguinte tabela:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Outro método para obter a informação da tabela é usar *valores-teste*. Por exemplo, se usarmos o valor-teste $x = 1$ para o intervalo $(-\infty, 2)$, então, substituindo em $x^2 - 5x + 6$, obteremos

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

O polinômio $x^2 - 5x + 6$ não muda de sinal dentro de cada um dos três intervalos; logo, concluímos que é positivo em $(-\infty, 2)$.

Então, vemos a partir da tabela que $(x - 2)(x - 3)$ é negativo quando $2 < x < 3$. Assim, a solução da inequação $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ é

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3].$$

Observe que incluímos as extremidades 2 e 3, pois estávamos procurando os valores de x tais que o produto fosse negativo ou zero. A solução está ilustrada na Figura 5.

O método visual de resolver o Exemplo 3 é usar uma ferramenta gráfica para esboçar a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como na Figura 4) e observar que a curva está sobre ou abaixo do eixo x quando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

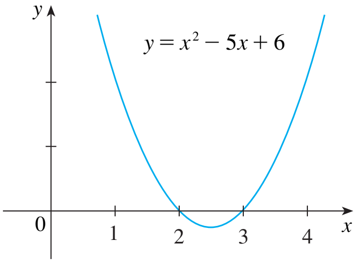


FIGURA 4

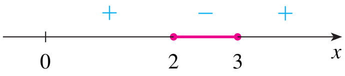


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUÇÃO Primeiro deixamos todos os termos não nulos de um lado do sinal de desigualdade e então fatoramos a expressão resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x - 1)(x + 4) > 0$$

Como no Exemplo 3, resolvemos a equação correspondente $x(x - 1)(x + 4) = 0$ e usamos as soluções $x = -4$, $x = 0$ e $x = 1$ para dividir a reta real nos quatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Em cada intervalo o produto mantém um sinal constante, conforme mostra a tabela:

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	$+$

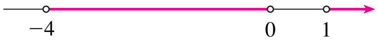


FIGURA 6

Vemos a partir da tabela que o conjunto solução é

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ ou } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

A solução está ilustrada na Figura 6.

Valor Absoluto

O **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 na reta real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a.$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.

3

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a \qquad \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \qquad \text{se } a < 0 \end{aligned}}$$

EXEMPLO 5 Expresse $|3x - 2|$ sem usar o símbolo de valor absoluto.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} |3x - 2| &= \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{se } 3x - 2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Lembre-se de que o símbolo $\sqrt{}$ significa "raiz quadrada positiva de". Então $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ e $s \geqslant 0$. Portanto, a equação $\sqrt{a^2} = a$ não é sempre verdadeira. Só é verdadeira quando $a \geqslant 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$, portanto obtemos $\sqrt{a^2} = -a$. Em vista de $\boxed{3}$, temos então a equação

4

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

que é verdadeira para todos os valores de a.

As sugestões para as demonstrações das propriedades a seguir serão dadas nos exercícios.

5 **Propriedades dos Valores Absolutos** Suponhamos que a e b sejam números reais quaisquer e n um inteiro. Então

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver as equações e as inequações envolvendo valores absolutos, é frequentemente muito útil usar as seguintes afirmações.

6 Suponha $a > 0$. Então

4. $|x| = a$ se e somente se $x = \pm a$

5. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$

6. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$

Por exemplo, a desigualdade $|x| < a$ diz que a distância de x à origem é menor que a, e você pode ver a partir da Figura 7 que isso é verdadeiro se e somente se x estiver entre $-a$ e a.

Se a e b forem números reais quaisquer, então a distância entre a e b é o valor absoluto da diferença, isto é, $|a - b|$, que também é igual a $|b - a|$. (Veja a Figura 8.)

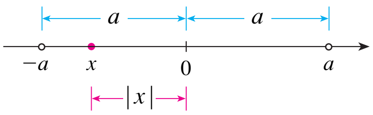


FIGURA 7

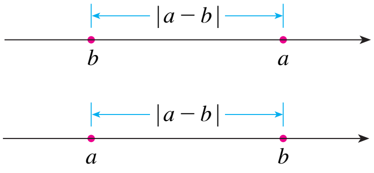


FIGURA 8
Comprimento de um segmento de reta = $|a - b|$

EXEMPLO 6 Resolva $|2x - 5| = 3$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 4 de $\boxed{6}$, $|2x - 5| = 3$ é equivalente a

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{ou} \qquad 2x - 5 = -3$$

Logo, $2x = 8$ ou $2x = 2$. Assim, $x = 4$ ou $x = 1$.

EXEMPLO 7 Resolva $|x - 5| < 2$.

SOLUÇÃO 1 Pela Propriedade 5 de $\boxed{6}$, $|x - 5| < 2$ é equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Assim, adicionando 5 a cada lado, temos

$$3 < x < 7$$

e o conjunto solução é o intervalo (3, 7).

SOLUÇÃO 2 Geometricamente, o conjunto solução consiste em todos os números x cuja distância de 5 é menor que 2. Pela Figura 9, vemos que este é o intervalo (3,7).

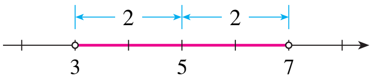


FIGURA 9

EXEMPLO 8 Resolva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUÇÃO Pelas Propriedades 4 e 6 de $\boxed{6}$, $|3x + 2| \geqslant 4$ é equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

No primeiro caso $3x \geqslant 2$, o que resulta em $x \geqslant \frac{2}{3}$. No segundo caso $3x \leqslant -6$, o que resulta em $x \leqslant -2$. Logo, o conjunto solução é

$$\left\{x \,\middle|\, x \leqslant -2 \;\text{ ou }\; x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$

Outra propriedade importante do valor absoluto, denominada Desigualdade Triangular, é frequentemente usada não apenas no cálculo, mas em geral em toda a matemática.

$\boxed{7}$ **A Desigualdade Triangular** Se a e b forem quaisquer números reais, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que se os números a e b forem ambos positivos ou negativos, então os dois lados na Desigualdade Triangular serão realmente iguais. Mas se a e b tiverem sinais opostos, o lado esquerdo envolve uma subtração, ao passo que o lado direito, não. Isso faz com que a Desigualdade Triangular pareça razoável, mas podemos demonstrá-la da forma a seguir.

Observe que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

é sempre verdadeira, pois a é igual a $|a|$ ou $-|a|$. A afirmação correspondente a b é

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Somando-se essas desigualdades, obtemos

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Se aplicarmos agora as Propriedades 4 e 5 (com x substituído por $a + b$ e a por $|a| + |b|$), obteremos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que é o que queríamos mostrar.

EXEMPLO 9 Se $|x - 4| < 0{,}1$ e $|y - 7| < 0{,}2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUÇÃO A fim de usarmos a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo,

$$|(x + y) - 11| < 0{,}3$$ ■

A Exercícios

1–12 Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|5| - |-23|$

3. $|-\pi|$

4. $|\pi - 2|$

5. $|\sqrt{5} - 5|$

6. $||-2| - |-3||$

7. $|x - 2|$ se $x < 2$

8. $|x - 2|$ se $x > 2$

9. $|x + 1|$

10. $|2x - 1|$

11. $|x^2 + 1|$

12. $|1 - 2x^2|$

13–38 Resolva a inequação em termos de intervalos e represente o conjunto solução na reta real.

13. $2x + 7 > 3$

14. $3x - 11 < 4$

15. $1 - x \leqslant 2$

16. $4 - 3x \geqslant 6$

17. $2x + 1 < 5x - 8$

18. $1 + 5x > 5 - 3x$

19. $-1 < 2x - 5 < 7$

20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

21. $0 \leqslant 1 - x < 1$

22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$

24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

25. $(x - 1)(x - 2) > 0$

26. $(2x + 3)(x - 1) \leqslant 0$

27. $2x^2 + x \leqslant 1$

28. $x^2 < 2x + 8$

29. $x^2 + x + 1 > 0$

30. $x^2 + x > 1$

31. $x^2 < 3$

32. $x^2 \geqslant 5$

33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

35. $x^3 > x$

36. $x^3 + 3x < 4x^2$

37. $\dfrac{1}{x} < 4$

38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual é o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use a relação entre C e F dada no Exercício 39 para determinar o intervalo na escala Fahrenheit correspondente à temperatura no intervalo $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de 1 ºC para cada 100 m de subida, até cerca de 12 km.

(a) Se a temperatura do solo for de 20 ºC, escreva uma fórmula para a temperatura a uma altura h.

(b) Que variação de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge uma altura máxima de 5 km?

42. Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com 30 m de altura com velocidade inicial de 10 m/s, então a altura h acima do solo t segundos mais tarde será

$$h = 30 + 10t - 5t^2$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a 15 m acima do solo?

43–46 Resolva a equação para x.

43. $|2x| = 3$

44. $|3x + 5| = 1$

45. $|x + 3| = |2x + 1|$

46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47–56 Resolva a inequação.

47. $|x| < 3$

48. $|x| \geqslant 3$

49. $|x - 4| < 1$

50. $|x - 6| < 0{,}1$

51. $|x + 5| \geqslant 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0{,}4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$

56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57–58 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59–60 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponha que $|x - 2| < 0{,}01$ e $|y - 3| < 0{,}04$. Use a Desigualdade Triangular para mostrar que $|(x + y) - 5| < 0{,}05$.

62. Mostre que se $|x + 3| < \frac{1}{2}$, então $|4x + 13| < 3$.

63. Mostre que se $a < b$, então $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use a Regra 3 para comprovar a Regra 5 de $\boxed{2}$.

65. Demonstre que $|ab| = |a||b|$. [*Dica:* Use a Equação 4.]

66. Demonstre que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

68. Demonstre que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. [*Dica:* Use a Desigualdade Triangular com $a = x - y$ e $b = y$.]

69. Mostre que a soma, a diferença e o produto dos números racionais são números racionais.

70. (a) A soma de dois números irracionais é sempre irracional?
(b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional?

B Geometria Analítica e Retas

Da mesma forma que os pontos sobre uma reta podem ser identificados com números reais atribuindo-se a eles coordenadas, conforme descrito no Apêndice A, também os pontos no plano podem ser identificados com pares ordenados de números reais. Vamos começar desenhando duas retas coordenadas perpendiculares que se interceptam na origem O de cada reta. Geralmente uma reta é horizontal com direção positiva para a direita e é chamada reta x; a outra reta é vertical com direção positiva para cima e é denominada reta y.

Qualquer ponto P no plano pode ser localizado por um par ordenado de números exclusivos como a seguir. Desenhe as retas pelo ponto P perpendiculares aos eixos x e y. Essas retas interceptam os eixos nos pontos com as coordenadas a e b como mostrado na Figura 1. Então ao ponto P é atribuído o par ordenado (a, b). O primeiro número a é chamado de **coordenada *x*** (ou **abscissa**) do P; o segundo número b é chamado de coordenada ***y*** (ou **ordenada**) de P. Dizemos que P é o ponto com as coordenadas (a, b) e denotamos o ponto pelo símbolo $P(a, b)$. Na Figura 2 estão vários pontos com suas coordenadas.

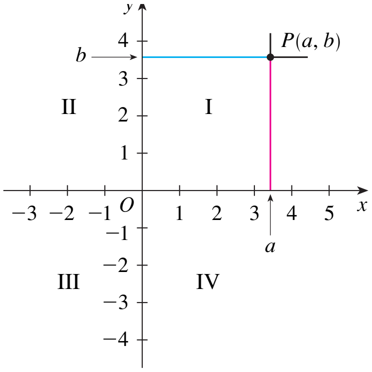


FIGURA 1

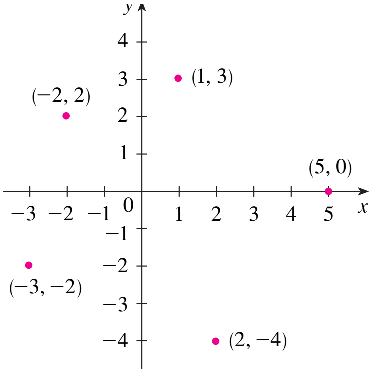


FIGURA 2

Ao revertermos o processo anterior, podemos começar com um par ordenado (a, b) e chegar ao ponto correspondente P. Muitas vezes, identificamos o ponto com o par ordenado (a, b) e nos referimos ao "ponto (a, b)". [Embora a notação usada para um intervalo aberto (a, b) seja a mesma usada para o ponto (a, b), você será capaz de distinguir pelo contexto qual o significado desejado.]

Esse sistema de coordenadas é dito **sistema coordenado retangular** ou **sistema de coordenadas cartesianas**, em homenagem ao matemático René Descartes (1596-1650), embora outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), tenha inventado os princípios da geometria analítica ao mesmo tempo que Descartes. O plano fornecido por esse sistema de coordenadas, denominado **plano coordenado** ou **cartesiano**, é denotado por $\mathbb{R}^2$.

Os eixos x e y são chamados **eixos coordendos** e dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes denotados por I, II, III, e IV na Figura 1. Observe que o primeiro quadrante consiste nos pontos com coordenadas x e y positivas

EXEMPLO 1 Descreva e esboce as regiões dadas pelos seguintes conjuntos.

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUÇÃO

(a) Os pontos cujas coordenadas x são 0 ou são positivas estão situados no eixo y ou à direita dele, como indicado pela região sombreada da Figura 3(a).

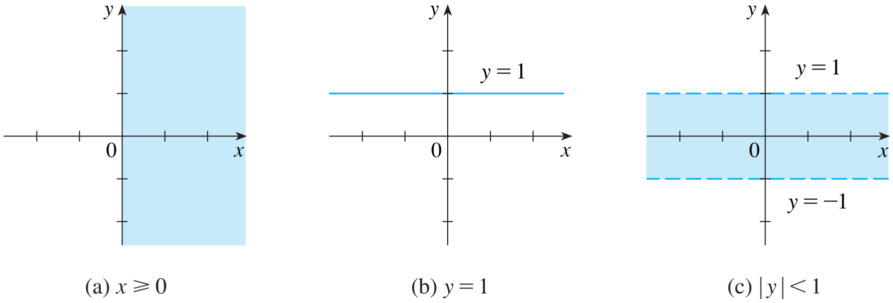


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) O conjunto de todos os pontos com coordenada y igual a 1 é uma reta horizontal uma unidade acima do eixo x [veja a Figura 3(b)].

(c) Lembre-se, do Apêndice A, de que

$$|y| < 1 \qquad \text{se e somente se} \qquad -1 < y < 1$$

A região dada consiste naqueles pontos do plano cuja coordenada y está entre -1 e 1. Assim, a região consiste em todos os pontos que estão entre (mas não sobre) as retas horizontais $y = 1$ e $y = -1$. [Essas retas estão mostradas como retas tracejadas na Figura 3(c) para indicar que os pontos sobre essas retas não estão no conjunto.] ▬

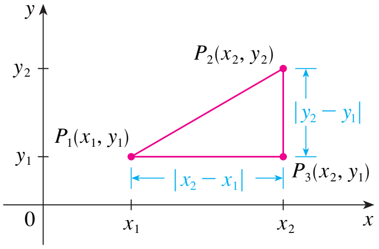


FIGURA 4

Lembre-se, a partir do Apêndice A, de que a distância entre os pontos a e b sobre o eixo real é $|a - b| = |b - a|$. Portanto, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma linha horizontal deve ser $|x_2 - x_1|$ e a distância entre $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma linha vertical deve ser $|y_2 - y_1|$. (Veja a Figura 4.)

Para encontrarmos a distância $|P_1P_2|$ entre dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, observamos que o triângulo $P_1P_2P_3$ na Figura 4 é retângulo e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1 **Fórmula de Distância** A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXEMPLO 2 A distância entre $(1, -2)$ e $(5, 3)$ é

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$ ▬

Retas

Desejamos encontrar uma equação para uma dada reta L; essa equação é satisfeita pelas coordenadas dos pontos em L e por nenhum outro ponto. Para encontrarmos a equação de L, usamos sua *inclinação*, que é uma medida do grau de declividade da reta.

$\boxed{2}$ **Definição** A **inclinação** (ou coeficiente angular) de uma reta não vertical que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A inclinação de uma reta vertical não está definida.

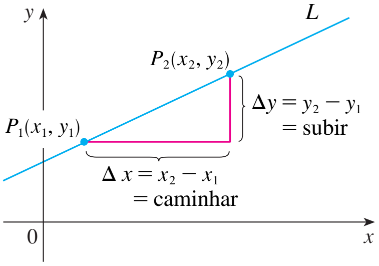


FIGURA 5

Assim, a inclinação de uma reta é a razão da variação em y, Δy, e da variação em x, Δx. (Veja a Figura 5.) A inclinação é, portanto, a taxa de variação de y com relação a x. O fato de tratar-se de uma reta significa que a taxa de variação é constante.

A Figura 6 mostra várias retas acompanhadas de suas inclinações. Observe que as retas com inclinação positiva inclinam-se para cima à direita, enquanto as retas com inclinação negativa inclinam-se para baixo à direita. Observe também que as retas mais íngremes são aquelas para as quais o valor absoluto da inclinação é maior, e que uma reta horizontal tem inclinação zero.

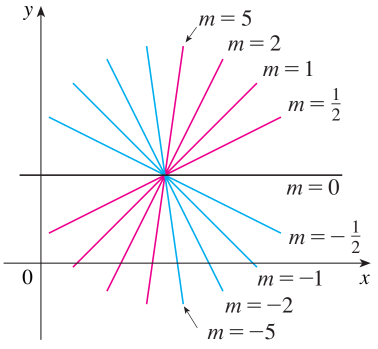


FIGURA 6

Agora determinemos uma equação da reta que passa por um determinado ponto $P_1(x_1, y_1)$ e tem inclinação m. Um ponto $P(x, y)$ com $x \neq x_1$ está nesta reta se e somente se a inclinação da reta por P_1 e P for igual a m; isto é,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

e observamos que essa equação também é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$. Portanto, ela é uma equação da reta dada.

$\boxed{3}$ **Equação de uma Reta na Forma Ponto-Inclinação** Uma equação da reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e tendo inclinação m é

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EXEMPLO 3 Determine uma equação da reta por $(1, -7)$ com inclinação $-\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Usando $\boxed{3}$ com $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ e $y_1 = -7$, obtemos uma equação da reta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

que pode ser reescrita como

$$2y + 14 = -x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x + 2y + 13 = 0$$

EXEMPLO 4 Determine uma equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -4)$.

SOLUÇÃO Pela Definição 2, a inclinação da reta é

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando a forma ponto-inclinação com $x_1 = -1$ e $y_1 = 2$, obtemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que se simplifica para

$$3x + 2y = 1$$

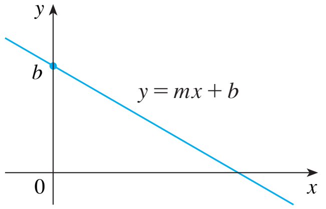


FIGURA 7

Suponha que uma reta não vertical tenha inclinação m e intersecção com o eixo y igual a b. (Veja a Figura 7.) Isso significa que ela intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$, logo, a equação da reta na forma ponto-inclinação, com $x_1 = 0$ e $y_1 = b$, torna-se

$$y - b = m(x - 0)$$

Isso pode ser simplificado como a seguir.

> $\boxed{4}$ **Equação de uma Reta na Forma Inclinação-Intersecção com o Eixo** Uma equação da reta com inclinação m e intersecção com o eixo y em b é
>
> $$y = mx + b.$$

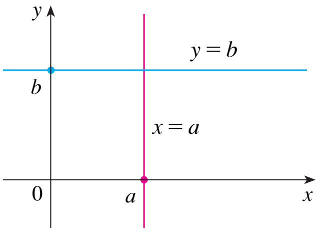


FIGURA 8

Em particular, se a reta for horizontal, sua inclinação é $m = 0$, logo sua equação é $y = b$, onde b é a intersecção com o eixo y. (Veja a Figura 8.) Uma reta vertical não tem uma inclinação, mas podemos escrever sua equação como $x = a$, onde a é a intersecção com o eixo x, pois a coordenada x de todo ponto sobre a reta é a.

Observe que a equação de toda reta pode ser escrita na forma

$$\boxed{5} \qquad \boxed{Ax + By + C = 0}$$

porque uma reta vertical tem a equação $x = a$ ou $x - a = 0$ ($A = 1, B = 0, C = -a$) e uma reta não vertical tem a equação $y = mx + b$ ou $-mx + y - b = 0$ ($A = -m$, $B = 1$, $C = -b$). Reciprocamente, se começarmos com uma equação geral de primeiro grau, isto é, uma equação da forma $\boxed{5}$, onde A, B e C são constantes e A e B não são ambos 0, então podemos mostrar que ela é a equação de uma reta. Se $B = 0$, a equação torna-se $Ax + C = 0$ ou $x = -C/A$, que representa uma reta vertical com intersecção com o eixo x em $-C/A$. Se $B \neq 0$, a equação pode ser reescrita isolando-se y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

e reconhecemos isso como a equação de uma reta na forma inclinação-intersecção com o eixo ($m = -A/B, b = -C/B$). Portanto, uma equação da forma $\boxed{5}$ é chamada **equação linear** ou **equação geral de uma reta**. Para resumirmos, nos referimos frequentemente “à reta $Ax + By + C = 0$” em vez de “à reta cuja é $Ax + By + C = 0$”.

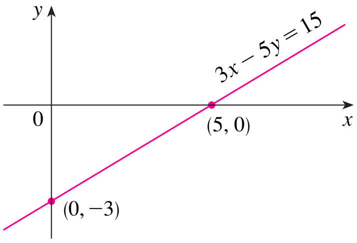


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $3x - 5y = 15$.

SOLUÇÃO Uma vez que a equação é linear, seu gráfico é uma reta. Para desenharmos o gráfico, podemos simplesmente determinar dois pontos sobre a reta. É fácil determinar as intersecções com os eixos. Substituindo $y = 0$ (a equação do eixo x) na equação dada, obtemos $3x = 15$, portanto $x = 5$ é a intersecção com o eixo x. Substituindo $x = 0$ na equação, vemos que a intersecção com o eixo y é -3. Isso nos permite esboçar o gráfico na Figura 9.

EXEMPLO 6 Represente graficamente a inequação $x + 2y > 5$.

SOLUÇÃO Devemos esboçar o gráfico do conjunto $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$ e começamos ao isolar y *na* desigualdade:

$$x + 2y > 5$$

$$2y > -x + 5$$

$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

Compare essa desigualdade com a equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa uma reta com inclinação $-\frac{1}{2}$ e intersecção com o eixo y igual a $\frac{5}{2}$. Observamos que inequação em questão consiste nos pontos cuja coordenada y é *maior* do que aquela sobre a reta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Assim, a representação gráfica é a da região que se situa *acima* da reta, conforme ilustrado na Figura 10.

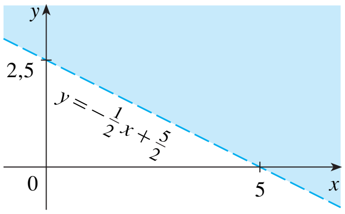


FIGURA 10

Retas Paralelas e Perpendiculares

As inclinações podem ser usadas para mostrar que as retas são paralelas ou perpendiculares. Os fatos a seguir são comprovados, por exemplo, em *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 6ª edição de Stewart, Redlin e Watson (Belmont, CA, 2012).

6 Retas Paralelas e Perpendiculares

1. Duas retas não verticais são paralelas se e somente se tiverem a mesma inclinação.
2. Duas retas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$; isto é, suas inclinações são recíprocas opostas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO 7 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto (5, 2) e que é paralela à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUÇÃO A reta dada pode ser escrita na forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que está na forma inclinação-intersecção com o eixo com $m = -\frac{2}{3}$. As retas paralelas têm a mesma inclinação, logo, a reta pedida tem a inclinação $-\frac{2}{3}$ e sua equação na forma ponto-inclinação é

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos reescrever essa equação como $2x + 3y = 16$.

EXEMPLO 8 Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y - 1 = 0$ são perpendiculares.

SOLUÇÃO As equações podem ser escritas como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de onde vemos que as inclinações são

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1 m_2 = -1$, as retas são perpendiculares.

B Exercícios

1–6 Determine a distância entre os dois pontos.

1. (1, 1), (4, 5)
2. (1, −3), (5, 7)
3. (6, −2), (−1, 3)
4. (1, −6), (−1, −3)
5. (2, 5), (4, −7)
6. (a, b), (b, a)

7–10 Determine a inclinação da reta que passa por P e Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$
8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$
9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$
10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.

12. (a) Mostre que o triângulo com vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ e $C(2, -2)$ é um triângulo retângulo usando a recíproca do Teorema de Pitágoras.
(b) Use as inclinações para mostrar que ABC é um triângulo retângulo.
(c) Determine a área do triângulo.

13. Mostre que os pontos (−2, 9), (4, 6), (1, 0) e (−5, 3) são os vértices de um quadrado.

14. (a) Mostre que os pontos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ e $C(5, 15)$ são colineares (pertencem à mesma reta) mostrando que $|AB| + |BC| = |AC|$.

(b) Use as inclinações para mostrar que A, B, e C são colineares.

15. Mostre que $A(1,1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ e $D(-1, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

16. Mostre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ e $D(0, 6)$ são vértices de um retângulo.

17–20 Esboce o gráfico da equação.

17. $x = 3$

18. $y = -2$

19. $xy = 0$

20. $|y| = 1$

21–36 Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas.

21. Passa pelo ponto $(2, -3)$, inclinação 6

22. Passa pelo ponto $(-1, 4)$, inclinação -3

23. Passa pelo ponto $(1, 7)$, inclinação $\frac{2}{3}$

24. Passa pelo ponto $(-3, -5)$, inclinação $-\frac{7}{2}$

25. Passa pelos pontos $(2, 1)$ e $(1, 6)$

26. Passa pelos pontos $(-1, -2)$ e $(4, 3)$

27. Inclinação 3, intersecção com o eixo y igual a -2

28. Inclinação $\frac{2}{5}$, intersecção com o eixo y igual a 4

29. Intersecção com o eixo x igual a 1, intersecção com o eixo y igual a -3

30. Intersecção com o eixo x igual a -8, intersecção com o eixo y igual a 6

31. Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x

32. Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo y

33. Passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$

34. Intersecção com o eixo y igual a 6, paralela à reta $2x + 3y + 4 = 0$

35. Por $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$

37–42 Ache a inclinação e a intersecção da reta e faça o esboço de seu gráfico.

37. $x + 3y = 0$

38. $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$

40. $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$

42. $4x + 5y = 10$

43–52 Esboce a região no plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

44. $\{(x, y) \mid y > 0\}$

45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$

46. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ e } y < 3\}$

47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$

48. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ e } |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ e } x \leqslant 2\}$

50. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

53. Ache um ponto sobre o eixo y que seja equidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.

54. Mostre que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ até $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Encontre o ponto médio do segmento de reta que une os pontos dados.

(a) $(1, 3)$ e $(7, 15)$ (b) $(-1, 6)$ e $(8, -12)$

56. Determine os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ e $C(8, 2)$. (A mediana é um segmento de reta de um vértice até o ponto médio do lado oposto.)

57. Mostre que as retas $2x - y = 4$ e $6x - 2y = 10$ não são paralelas e ache o seu ponto de intersecção.

58. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e ache o seu ponto de intersecção.

59. Ache uma equação da mediatriz do segmento de reta com extremidades nos pontos $A(1, 4)$ e $B(7, -2)$.

60. (a) Encontre as equações dos lados do triângulo com vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ e $R(-1, 6)$.

(b) Ache equações para as medianas desse triângulo. Onde elas se interceptam?

61. (a) Mostre que as intersecções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b diferentes de zero, então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta equação é chamada a **forma a partir das duas intersecções** da equação de uma reta.

(b) Use a parte (a) para encontrar a equação da reta cuja intersecção com o eixo x é 6 e cuja intersecção com o eixo y é -8.

62. Kelly parte de Winnipeg às 14 h e dirige a uma velocidade constante para oeste na rodovia Trans-Canadá. Ela passa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.

(a) Expresse a distância percorrida em termos do tempo decorrido.

(b) Trace o gráfico da equação na parte (a).

(c) Qual a inclinação desta reta? O que ela representa?

C Gráficos das Equações de Segundo Grau

No Apêndice B vimos que uma equação $Ax + By + C = 0$, de primeiro grau ou linear, representa uma reta. Nesta seção vamos discutir as equações do segundo grau, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representam uma circunferência, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

O gráfico de tais equações em x e y é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem aquela equação; ele dá uma representação visual da equação. Reciprocamente, dada uma curva no plano xy, podemos ter de achar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos na curva e por nenhum outro ponto. Esta é a outra metade dos princípios básicos da geometria analítica conforme formulada por Descartes e Fermat. A ideia é que se uma curva geométrica pode ser representada por uma equação algébrica, então as regras da álgebra podem ser usadas para analisar o problema geométrico.

Circunferências

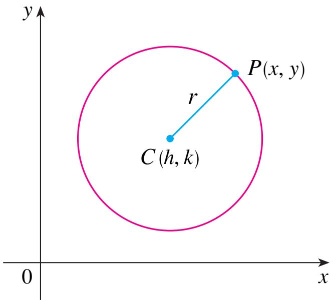


FIGURA 1

Como um exemplo desse tipo de problema, vamos determinar uma equação da circunferência com raio r e centro (h, k). Por definição, a circunferência é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ cuja distância do centro $C(h, k)$ é r. (Veja a Figura 1.) Logo, P está sobre a circunferência se e somente se $|PC| = r$. Da fórmula de distância, temos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ou, de maneira equivalente, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta é a equação desejada.

$\boxed{1}$ **Equação da Circunferência** Uma equação da circunferência com centro (h, k) e raio r é

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro for a origem $(0, 0)$, a equação será

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação da circunferência com raio 3 e centro $(2, -5)$.

SOLUÇÃO Da Equação 1 com $r = 3$, $h = 2$ e $k = -5$, obtemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ mostrando primeiro que ela representa uma circunferência e então encontrando seu centro e raio.

SOLUÇÃO Vamos primeiro agrupar os termos em x e y da seguinte forma:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

Então, completando o quadrado dentro de cada parêntese e somando as constantes apropriadas (os quadrados da metade dos coeficientes de x e y) a ambos os lados da equação, temos:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

ou

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3$$

Comparando essa equação com a equação padrão da circunferência $\boxed{1}$, vemos que $h = -1$, $k = 3$ e $r = \sqrt{3}$, assim, a equação dada representa uma circunferência com centro $(-1, 3)$ e raio $\sqrt{3}$. Ela está esboçada na Figura 2.

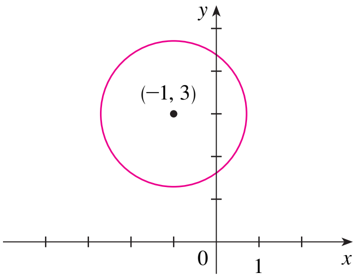


FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

Parábolas

As propriedades geométricas das parábolas serão revisadas na Seção 10.5. Aqui, consideraremos uma parábola como um gráfico de uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$.

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico da parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO Vamos fazer uma tabela de valores, marcar os pontos e depois juntá-los por uma curva suave para obter o gráfico da Figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

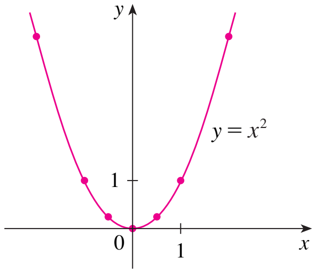


FIGURA 3

A Figura 4 mostra os gráficos de diversas parábolas com equações da forma $y = ax^2$ para diversos valores do número a. Em cada caso o *vértice*, o ponto onde a parábola muda de direção, é a origem. Vemos que a parábola $y = ax^2$ abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$ (como na Figura 5).

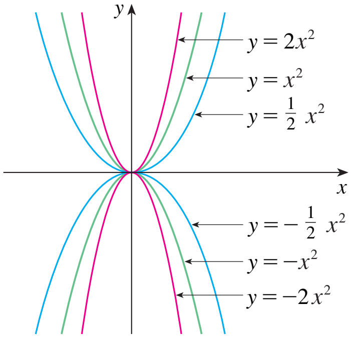
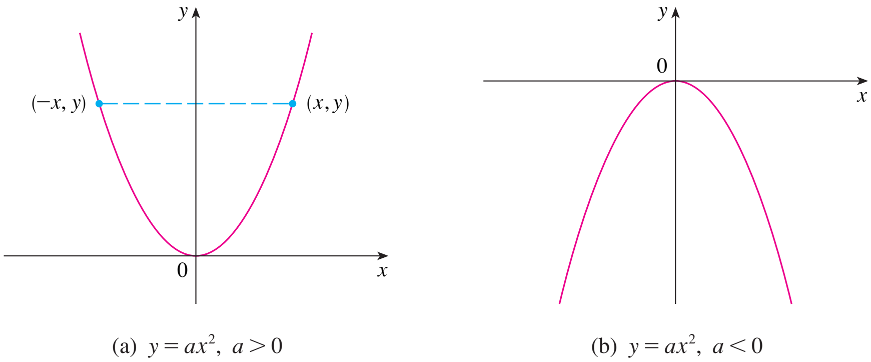


FIGURA 4



(a) $y = ax^2$, $a > 0$

(b) $y = ax^2$, $a < 0$

FIGURA 5

Observe que se (x, y) satisfaz $y = ax^2$, então $(-x, y)$ também o cumpre. Isso corresponde ao fato geométrico de que, se a metade direita do gráfico for refletida em torno do eixo y, obteremos a metade esquerda do gráfico. Dizemos que o gráfico é **simétrico em relação ao eixo *y***.

O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo y se a equação ficar invariante quando substituirmos x por $-x$.

Se trocarmos x e y na equação $y = ax^2$, teremos $x = ay^2$, que também representa uma parábola. (Trocar x e y significa fazer uma reflexão em torno da reta bissetriz $y = x$.) A parábola $x = ay^2$ abre para a direita se $a > 0$ e para a esquerda se $a < 0$. (Veja a Figura 6.) Dessa vez a parábola é simétrica em relação ao eixo x, pois se (x, y) satisfizer a equação $x = ay^2$, então o mesmo acontece com $(x, -y)$.

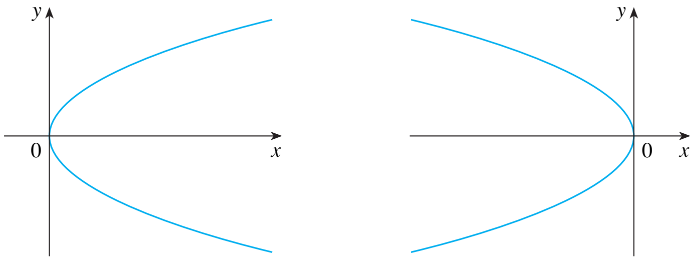


FIGURA 6 (a) $x = ay^2$, $a > 0$ (b) $x = ay^2$, $a < 0$

O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo x se a equação ficar invariante quando substituirmos y por $-y$.

EXEMPLO 4 Esboce a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$.

SOLUÇÃO Primeiro encontramos os pontos da intersecção, resolvendo as duas equações. Substituindo $x = y + 2$ na equação $x = y^2$, obtemos $y + 2 = y^2$, o que resulta em

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

Logo, $y = 2$ ou -1. Assim, os pontos de intersecção são (4, 2) e (1, -1) e, passando por esses dois pontos, traçamos a reta $y = x - 2$. Esboçamos então a parábola $x = y^2$ lembrando-nos da Figura 6(a) e fazendo com que a parábola passe pelos pontos (4, 2) e (1, -1). A região delimitada por $x = y^2$ e $y = x - 2$ significa a região finita cuja fronteira é formada por essas curvas. Ela está esboçada na Figura 7.

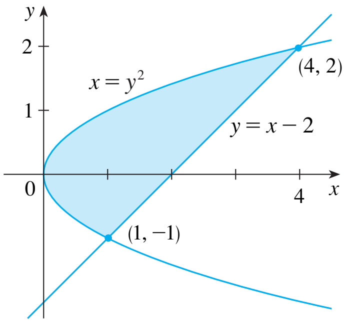


FIGURA 7

Elipses

A curva com a equação

$$\boxed{2} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde a e b são números positivos é chamada **elipse** na posição-padrão. (As propriedades geométricas serão discutidas na Seção 10.5.) Observe que a Equação 2 fica invariante se x for substituído por $-x$ ou y por $-y$; dessa forma, a elipse é simétrica em relação aos eixos. Como uma ajuda no esboço da elipse, vamos determinar suas intersecções com os eixos.

As **intersecções com o eixo *x*** de um gráfico são as coordenadas x dos pontos onde ele intercepta o eixo x. Eles são encontrados fazendo-se $y = 0$ na equação do gráfico.

As **intersecções com o eixo *y*** de um gráfico são as coordenadas y dos pontos onde ele intercepta o eixo y. Eles são encontrados fazendo-se $x = 0$ na equação do gráfico.

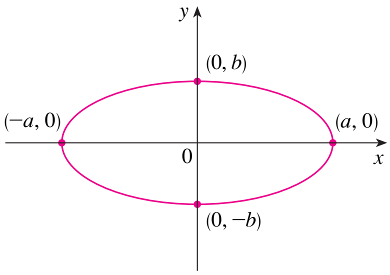


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Se fizermos $y = 0$ na Equação 2, obteremos $x^2 = a^2$ e, dessa forma, as intersecções com o eixo x são $\pm a$. Fazendo $x = 0$, obteremos $y^2 = b^2$; assim, as intersecções com o eixo y são $\pm b$. Usando essa informação, junto com a simetria, fazemos o esboço da elipse na Figura 8. Se $a = b$, a elipse é uma circunferência com raio a.

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUÇÃO Dividimos ambos os lados da equação por 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma padrão para uma elipse $\boxed{2}$, e assim temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. As intersecções com o eixo x são ± 4; e as intersecções com o eixo y são ± 3. O gráfico está esboçado na Figura 9.

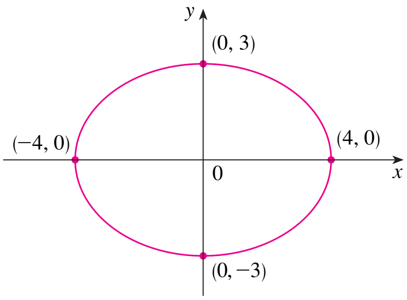


FIGURA 9

$9x^2 + 16y^2 = 144$

Hipérboles

A curva com a equação

3 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

é denominada **hipérbole** na posição padrão. Novamente, a Equação 3 fica invariante quando x é substituído por $-x$ ou y é substituído por $-y$; dessa forma, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos. Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e obtemos $x^2 = a^2$ e $x = \pm a$. Mas, se colocarmos $x = 0$ na Equação 3, teremos $y^2 = -b^2$, o que é impossível; dessa forma, não existe intersecção com o eixo y. Na verdade, da Equação 3 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

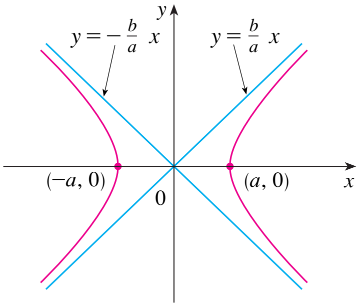


FIGURA 10

A hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

o que demonstra que $x^2 \geqslant a^2$ e, portanto, $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Assim, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas *ramos*. Ela está esboçada na Figura 10.

Quando desenhamos uma hipérbole é útil traçar primeiro as *assíntotas*, que são as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 10. Ambos os ramos da hipérbole tendem para as assíntotas; isto é, ficam arbitrariamente perto das assíntotas. Isso envolve a ideia de limite, como discutido no Capítulo 2 (veja também o Exercício 73 na Seção 4.5).

Trocando os papéis de x e y, obtemos uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

que também representa uma hipérbole e está esboçada na Figura 11.

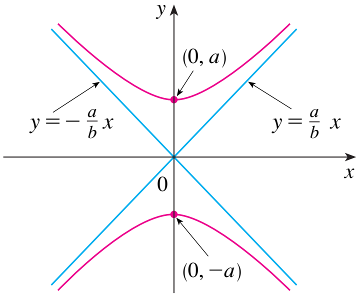


FIGURA 11

A hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

EXEMPLO 6 Esboce a curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole na forma padrão (Equação 3). Visto que $a^2 = 4$, as intersecções com o eixo x são ± 2. Como $b^2 = 9$, temos $b = 3$ e as assíntotas são $y = \pm\left(\frac{3}{2}\right)x$. A hipérbole está esboçada na Figura 12.

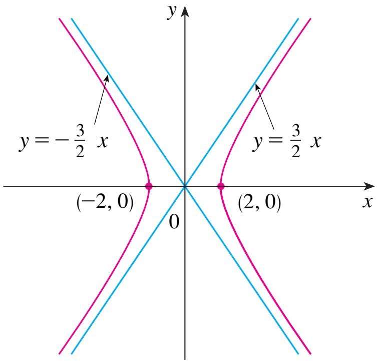


FIGURA 12
A hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$

Se $b = a$, a hipérbole tem a equação $x^2 - y^2 = a^2$ (ou $y^2 - x^2 = a^2$) e é chamada *hipérbole equilátera* [veja a Figura 13(a)]. Suas assíntotas são $y = \pm x$, que são perpendiculares. Girando-se uma hipérbole equilátera em 45°, as assíntotas tornam-se os eixos x e y, e pode-se mostrar que a nova equação da hipérbole é $xy = k$, onde k é uma constante [veja a Figura 13(b)].

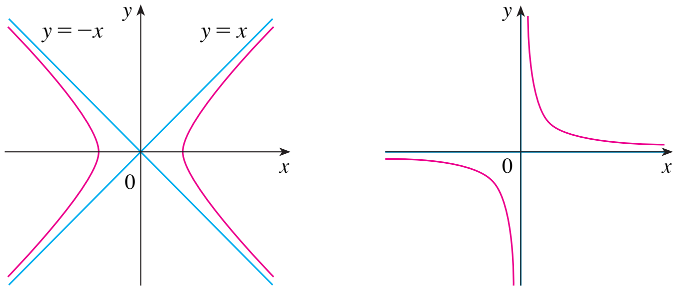


FIGURA 13
Hipérboles equiláteras

(a) $x^2 - y^2 = a^2$

(b) $xy = k$ $(k > 0)$

Cônicas Deslocadas

Lembre-se de que uma equação da circunferência com centro na origem e raio r é $x^2 + y^2 = r^2$, mas se o centro for o ponto (h, k), então a equação da circunferência fica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Analogamente, se tomarmos a elipse com a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{4}$$

e a transladarmos de forma que se seu centro esteja no ponto (h, k), então sua equação fica

$$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1} \tag{5}$$

(Veja a Figura 14.)

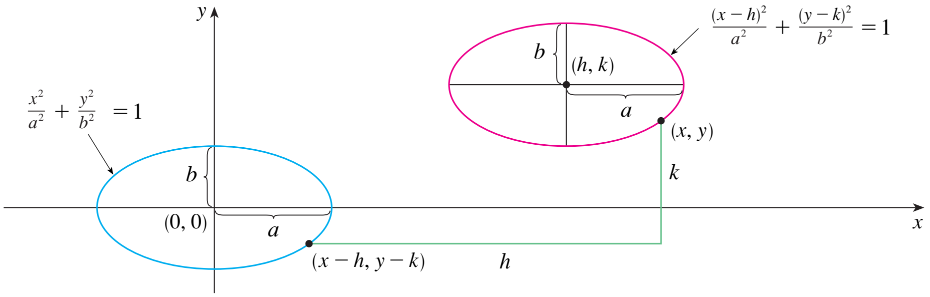

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
y
b
(0, 0)
a
$(x-h, y-k)$
h
b
(h, k)
a
(x, y)
k
x

FIGURA 14

Observe que ao transladarmos a elipse, substituímos x por $x - h$ e y por $y - k$ na Equação 4 para obter a Equação 5. Usando o mesmo procedimento, deslocamos a parábola $y = ax^2$ de forma que seu vértice (a origem) torna-se o ponto (h, k), como na Figura 15. Substituindo x por $x - h$ e y por $y - k$, vemos que a nova equação é

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

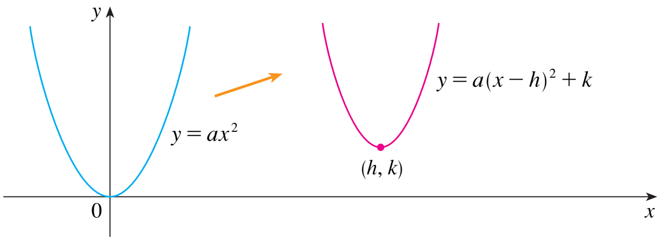


FIGURA 15

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da equação $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos completar os quadrados:

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

Nessa forma vemos que a equação representa a parábola obtida deslocando-se $y = 2x^2$ tal que seu vértice seja o ponto $(1, -1)$. O gráfico está esboçado na Figura 16.

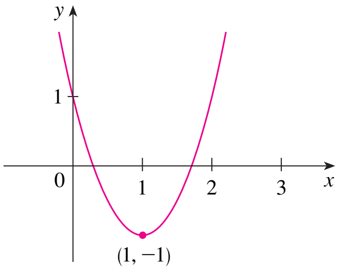


FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

EXEMPLO 8 Esboce a curva $x = 1 - y^2$.

SOLUÇÃO Dessa vez começamos com a parábola $x = -y^2$ (como na Figura 6 com $a = -1$) e deslocamos uma unidade para a direita para obter o gráfico de $x = 1 - y^2$. (Veja a Figura 17.)

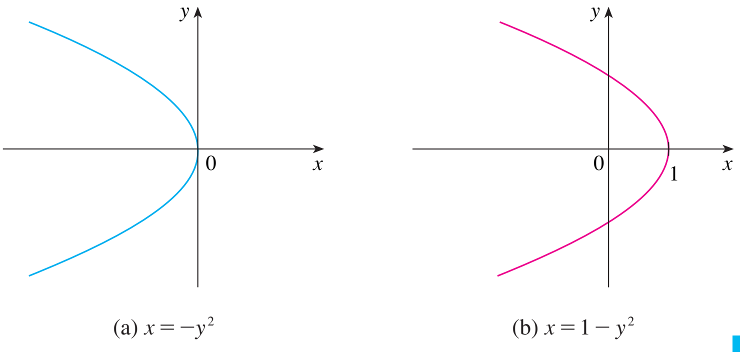


FIGURA 17

(a) $x = -y^2$ (b) $x = 1 - y^2$

C Exercícios

1–4 Determine uma equação de uma circunferência que satisfaça as condições dadas.

1. Centro $(3, -1)$, raio 5

2. Centro $(-2, -8)$, raio 10

3. Centro na origem, passa por $(4, 7)$

4. Centro $(-1, 5)$, passa por $(-4, -6)$

5–9 Mostre que a equação representa uma circunferência e determine o centro e o raio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

7. $x^2 + y^2 + x = 0$

8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. Que condições nos coeficiente a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente uma circunferência? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio da circunferência.

11–32 Identifique o tipo de curva e esboce o gráfico. Não marque os pontos. Somente use os gráficos-padrão dados nas Figuras 5, 6, 8, 10 e 11 e desloque se for necessário.

11. $y = -x^2$

12. $y^2 - x^2 = 1$

13. $x^2 + 4y^2 = 16$

14. $x = -2y^2$

15. $16x^2 - 25y^2 = 400$

16. $25x^2 + 4y^2 = 100$

17. $4x^2 + y^2 = 1$

18. $y = x^2 + 2$

19. $x = y^2 - 1$

20. $9x^2 - 25y^2 = 225$

21. $9y^2 - x^2 = 9$

22. $2x^2 + 5y^2 = 10$

23. $xy = 4$

24. $y = x^2 + 2x$

25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$

26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$

27. $y = x^2 - 6x + 13$

28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$

29. $x = 4 - y^2$

30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33–34 Esboce a região delimitada pelas curvas.

33. $y = 3x, \quad y = x^2$

34. $y = 4 - x^2, \quad x - 2y = 2$

35. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passe pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

36. Encontre uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $\left(1, -10\sqrt{2}/3\right)$ e $\left(-2, 5\sqrt{5}/3\right)$.

37–40 Esboce o gráfico do conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

39. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}$

40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$

D Trigonometria

Ângulos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360°, que é o mesmo que 2π rad. Portanto,

$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180^\circ} \tag{1}$$

e

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017 \text{ rad} \tag{2}$$

EXEMPLO 1

(a) Encontre a medida do radiano de 60°. (b) Expresse $5\pi/4$ rad em graus.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação 1 ou 2 vemos que, para converter de graus para radianos, multiplicamos por $\pi/180$. Portanto,

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para convertermos de radianos para graus multiplicamos por $180/\pi$. Logo,

$$\frac{5\pi}{4}\text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ$$

Em cálculo, usamos o radiano como medida dos ângulos, exceto quando explicitamente indicada outra unidade. A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas em graus e em radianos de alguns ângulos comuns.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

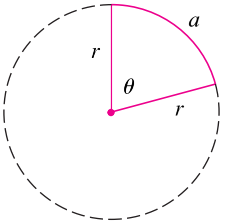


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um setor de um círculo com ângulo central θ e raio r subtendendo um arco com comprimento a. Como o comprimento do arco é proporcional ao tamanho do ângulo, e como todo o círculo tem circunferência $2\pi r$ e ângulo central 2π, temos

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Isolando θ e a nessa equação, obtemos

$$\boxed{3} \qquad \boxed{\theta = \frac{a}{r}} \qquad\qquad \boxed{a = r\theta}$$

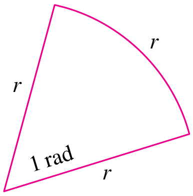


FIGURA 2

Lembre que essas equações são válidas somente quando θ é medido em radianos.

Em particular, fazendo $a = r$ na Equação 3, vemos que um ângulo de 1 rad é um ângulo subtendido no centro de um círculo por um arco com comprimento igual ao raio do círculo (veja a Figura 2).

EXEMPLO 2

(a) Se o raio de um círculo for 5 cm, qual o ângulo subtendido por um arco de 6 cm?

(b) Se um círculo tem raio 3 cm, qual é o comprimento de um arco subtendido por um ângulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUÇÃO

(a) Usando a Equação 3 com $a = 6$ e $r = 5$, vemos que o ângulo é

$$\theta = \tfrac{6}{5} = 1{,}2\text{ rad}$$

(b) Com $r = 3$ cm e $\theta = 3\pi/8$ rad, o comprimento de arco é

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8}\text{ cm}$$

A **posição padrão** de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo, como na Figura 3. Um ângulo **positivo** é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final; da mesma forma, ângulos **negativos** são obtidos girando-se no sentido horário, como na Figura 4.

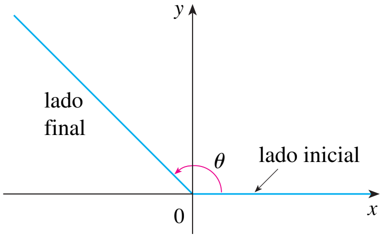

y
x
0
lado
final
θ
lado inicial

FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

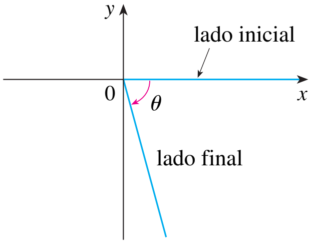

y
x
0
lado inicial
θ
lado final

FIGURA 4 $\theta < 0$

A Figura 5 mostra vários exemplos de ângulos em posição padrão. Observe que ângulos diferentes podem ter o mesmo lado final. Por exemplo, os ângulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ e $11\pi/4$ têm os mesmos lados inicial e final, pois

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

e 2π rad representa uma revolução completa.

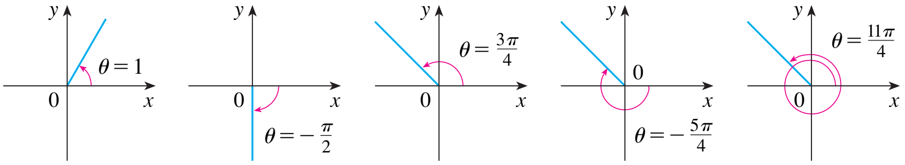

y
x
0
$\theta = 1$
$\theta = -\frac{\pi}{2}$
$\theta = \frac{3\pi}{4}$
$\theta = -\frac{5\pi}{4}$
$\theta = \frac{11\pi}{4}$

FIGURA 5
Ângulos na posição padrão

As Funções Trigonométricas

Para um ângulo agudo θ as seis funções trigonométricas são definidas como razões de comprimento de lados de um triângulo retângulo como segue (veja a Figura 6).

4

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}} & \operatorname{cossec}\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hip}} & \sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{adj}} \\[2ex] \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{adj}} & \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{op}} \end{array}}$$

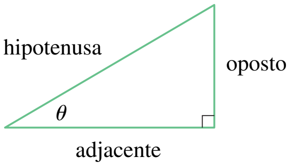

hipotenusa
oposto
θ
adjacente

FIGURA 6

Essa definição não se aplica aos ângulos obtusos ou negativos, de modo que, para um ângulo geral θ na posição padrão, tomamos $P(x, y)$ como um ponto qualquer sobre o lado final de θ e r como a distância $|OP|$, como na Figura 7. Então, definimos

5

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} & \operatorname{cossec}\theta = \dfrac{r}{y} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{x}{r} & \sec\theta = \dfrac{r}{x} \\[2ex] \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} & \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{x}{y} \end{array}}$$

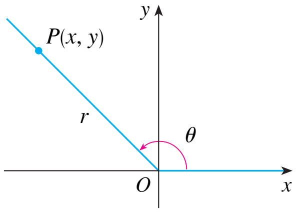

y
x
O
$P(x, y)$
r
θ

FIGURA 7

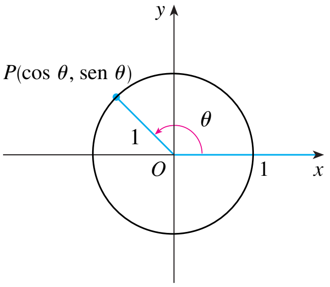


FIGURA 8

Se colocarmos $r = 1$ na Definição 5 e desenharmos um círculo unitário com centro na origem e rotularmos θ como na Figura 8, então as coordenadas de P serão $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$.

Como a divisão por 0 não é definida, tg θ e sec θ são indefinidas quando $x = 0$ e cossec θ e cotg θ são indefinidas quando $y = 0$. Observe que as definições em $\boxed{4}$ e $\boxed{5}$ são consistentes quando θ é um ângulo agudo.

Se θ for um número, a convenção é que sen θ significa o seno do ângulo, cuja medida em *radianos* é θ. Por exemplo, a expressão sen 3 implica que estamos tratando com um ângulo de 3 rad. Ao determinarmos uma aproximação na calculadora para esse número, devemos nos lembrar de colocar a calculadora no modo radiano, e então obteremos

$$\text{sen}\,3 \approx 0{,}14112$$

Para conhecermos o seno do ângulo 3º, escrevemos sen 3° e, com nossa calculadora no modo grau, encontramos que

$$\text{sen}\,3^\circ \approx 0{,}05234$$

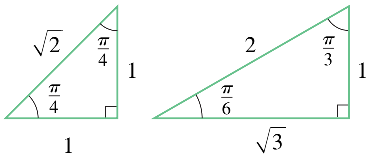


FIGURA 9

As razões trigonométricas exatas para certos ângulos podem ser lidas dos triângulos da Figura 9. Por exemplo,

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

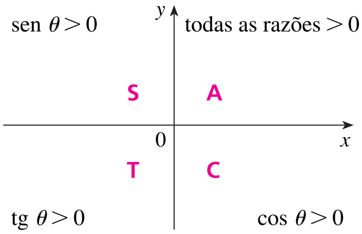


FIGURA 10

Os sinais das funções trigonométricas para ângulos em cada um dos quatro quadrantes podem ser lembrados pela regra mostrada na Figura 10 “All Students Take Calculus”.

EXEMPLO 3 Encontre as razões trigonométricas exatas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUÇÃO Da Figura 11 vemos que um ponto sobre a reta final para $\theta = 2\pi/3$ é $P(-1, \sqrt{3})$. Portanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

nas definições das razões trigonométricas, temos

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{cossec}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \text{cotg}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

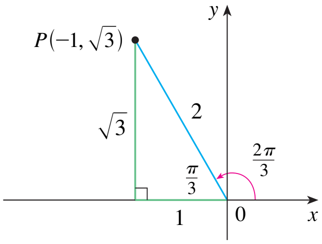


FIGURA 11

A tabela a seguir fornece alguns valores de sen θ e cos θ encontrados pelo método do Exemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

EXEMPLO 4 Se $\cos\theta = \frac{2}{5}$ e $0 < \theta < \pi/2$, determine as outras cinco funções trigonométricas de θ.

SOLUÇÃO Como $\cos\theta = \frac{2}{5}$, podemos tomar a hipotenusa como tendo comprimento igual a 5 e o lado adjacente como tendo comprimento igual a 2 na Figura 12. Se o lado oposto tem comprimento x, então o Teorema de Pitágoras fornece $x^2 + 4 = 25$ e, portanto, $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Podemos agora usar o diagrama para escrever as outras cinco funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

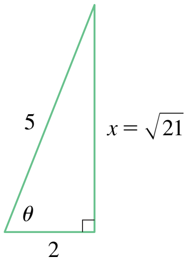


FIGURA 12

EXEMPLO 5 Use uma calculadora para aproximar o valor de x na Figura 13.

SOLUÇÃO Do diagrama vemos que

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{16}{x}$$

Logo,

$$x = \frac{16}{\operatorname{tg} 40°} \approx 19{,}07$$

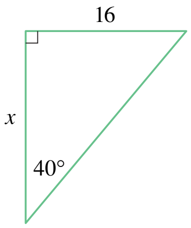


FIGURA 13

Identidades Trigonométricas

Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elementares são dadas a seguir, e são consequências imediatas das definições das funções trigonométricas.

6

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para a próxima identidade, voltemos à Figura 7. A fórmula da distância (ou, de maneira equivalente, o Teorema de Pitágoras) nos diz que $x^2 + y^2 = r^2$. Portanto,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Demonstramos, portanto, uma das mais úteis identidades da trigonometria:

7

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Se agora dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\cos^2\theta$ e usarmos as Equações 6, obteremos

8

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Analogamente, se dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\operatorname{sen}^2\theta$, obteremos

9

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta}$$

As identidades

10a

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

As funções ímpares e as funções pares são discutidas na Seção 1.1.

indicam que seno e cosseno são funções, respectivamente, ímpar e par. Elas são facilmente demonstradas desenhando um diagrama mostrando θ e $-\theta$ na posição padrão (veja o Exercício 39).

Uma vez que os ângulos θ e $\theta + 2\pi$ têm o mesmo lado final, temos

11 $$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Essas identidades revelam que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π.

As identidades trigonométricas restantes são todas consequências de duas identidades básicas chamadas **fórmulas da adição**:

12a $$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

12b $$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

As demonstrações dessas fórmulas de adição estão resumidas nos Exercícios 85, 86 e 87.

Substituindo y por $-y$ nas Equações 12a e 12b e usando as Equações 10a e 10b, obtemos as seguintes **fórmulas de subtração**:

13a $$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

13b $$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Então, dividindo as fórmulas nas Equações 12 ou 13, obtemos as fórmulas correspondentes para $\operatorname{tg}(x \pm y)$:

14a $$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

14b $$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Se fizermos $y = x$ nas fórmulas de adição $\boxed{12}$, obteremos as **fórmulas dos ângulos duplos**:

15a $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Então, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos a seguinte forma alternativa das fórmulas dos ângulos duplos para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Se agora isolarmos $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$ nestas equações, obteremos as seguintes **fórmulas do ângulo-metade**, que são úteis em cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Finalmente, enunciamos as **fórmulas do produto** que podem ser deduzidas das Equações 12 e 13:

$$\text{sen}\,x\cos y = \tfrac{1}{2}[\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)] \tag{18a}$$

$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \tag{18b}$$

$$\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \tag{18c}$$

Há muitas outras identidades trigonométricas, mas as aqui enunciadas são algumas das mais usadas no cálculo. Se você se esquecer alguma das identidades 13-18, lembre-se de que elas podem ser deduzidas das Equações 12a e 12b.

EXEMPLO 6 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\text{sen}\,x = \text{sen}\,2x$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula do ângulo duplo (15a), reescrevemos a equação dada como

$$\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,x\cos x \qquad \text{ou} \qquad \text{sen}\,x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

Portanto, há duas possibilidades:

$$\begin{array}{lcl} \text{sen}\,x = 0 & \text{ou} & 1 - 2\cos x = 0 \\ x = 0, \pi, 2\pi & & \cos x = \tfrac{1}{2} \\ & & x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3} \end{array}$$

A equação dada tem cinco soluções: 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ e 2π.

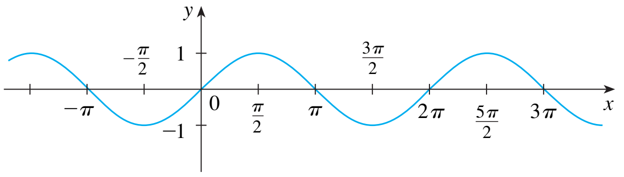
Gráficos das Funções Trigonométricas

O gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,x$, mostrado na Figura 14(a), é obtido desenhando-se os pontos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então usando-se a periodicidade da função (da Equação 11) para completar o gráfico. Observe que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π, isto é,

$$\text{sen}\,x = 0 \qquad \text{sempre que } x = n\pi, \qquad \text{com } n \text{ um número inteiro.}$$

Em virtude da identidade

$$\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



(a) $f(x) = \text{sen}\,x$

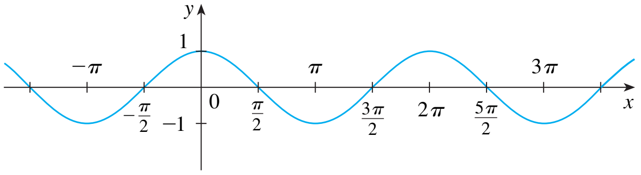


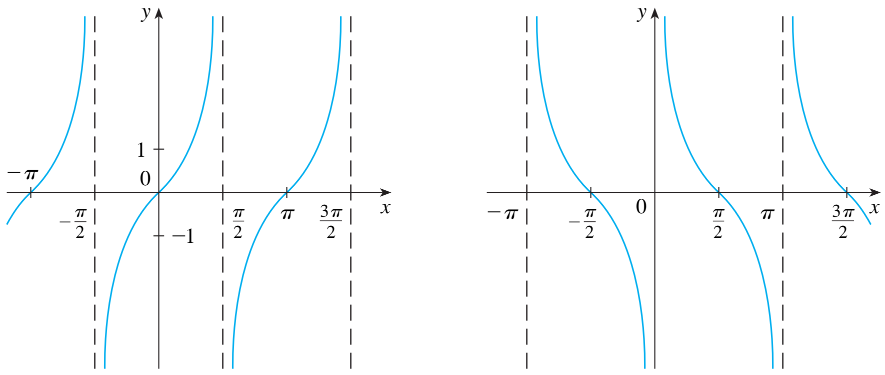
FIGURA 14

(b) $g(x) = \cos x$

(que pode ser verificada usando-se a Equação 12a), o gráfico do cosseno é obtido deslocando-se em $\pi/2$ para a esquerda o gráfico do seno [veja a Figura 14(b)]. Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x, temos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

Os gráficos das quatro funções trigonométricas restantes estão mostrados na Figura 15, e seus domínios estão ali indicados. Observe que a tangente e a cotangente têm a mesma imagem $(-\infty, \infty)$, enquanto a cossecante e a secante têm a imagem $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Todas as funções são periódicas: tangente e cotangente têm período π, ao passo que cossecante e secante possuem período 2π.



(a) $y = \operatorname{tg} x$

(b) $y = \operatorname{cotg} x$

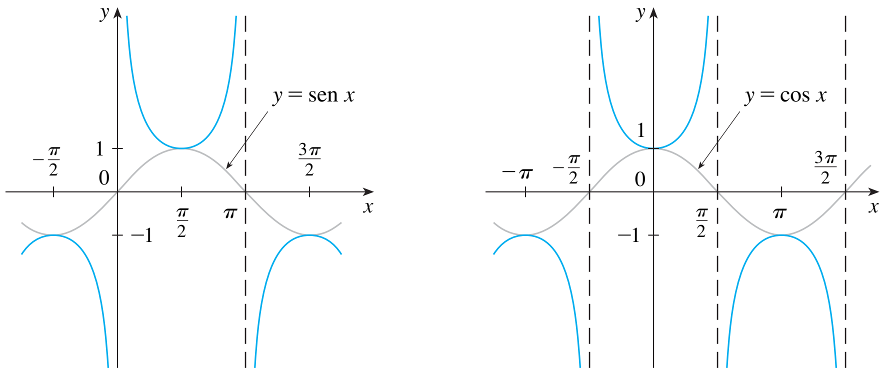


FIGURA 15

(c) $y = \operatorname{cossec} x$

(d) $y = \sec x$

D Exercícios

1–6 Converta de graus para radianos.

1. 210° **2.** 300° **3.** 9°

4. −315° **5.** 900° **6.** 36°

7–12 Converta de radianos para graus.

7. 4π **8.** $-\dfrac{7\pi}{2}$ **9.** $\dfrac{5\pi}{12}$

10. $\dfrac{8\pi}{3}$ **11.** $-\dfrac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Determine o comprimento de um arco circular subtendido pelo ângulo de $\pi/12$ rad se o raio do círculo for de 36 cm.

14. Se um círculo tem raio de 10 cm, qual é o comprimento de arco subtendido pelo ângulo central de 72°?

15. Um círculo tem raio de 1,5m. Qual o ângulo subtendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

16. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

17–22 Desenhe, na posição padrão, o ângulo cuja medida é dada.

17. 315° **18.** −150° **19.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

20. $\dfrac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23–28 Determine as razões trigonométricas exatas para o ângulo cuja medida em radianos é dada.

23. $\dfrac{3\pi}{4}$ **24.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **25.** $\dfrac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **28.** $\dfrac{11\pi}{4}$

29–34 Determine as demais razões trigonométricas.

29. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

30. $\operatorname{tg} \alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

31. $\sec \phi = -1{,}5, \quad \dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$

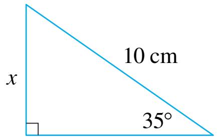
32. $\cos x = -\dfrac{1}{3}, \quad \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

33. $\operatorname{cotg} \beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

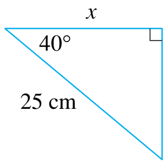
34. $\operatorname{cossec} \theta = -\dfrac{4}{3}, \quad \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35–38 Determine, com precisão de cinco casas decimais, o comprimento do lado chamado de x.

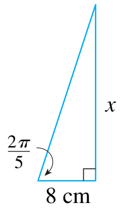
35.



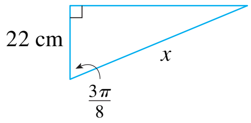
36.



37.



38.



39–41 Demonstre cada equação.

39. (a) Equação 10a (b) Equação 10b

40. (a) Equação 14a (b) Equação 14b

41. (a) Equação 18a (b) Equação 18b
(c) Equação 18c

42–58 Demonstre a identidade.

42. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen} \theta \, \operatorname{cotg} \theta = \cos \theta$

46. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \operatorname{tg} y \operatorname{sen} y$

48. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\operatorname{cotg}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{cossec}^2\theta$

50. $2 \operatorname{cossec} 2t = \sec t \operatorname{cossec} t$

51. $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

52. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} \theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta} = 2 \sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y) \operatorname{sen}(x - y)$

55. $\dfrac{\operatorname{sen} \phi}{1 - \cos \phi} = \operatorname{cossec} \phi + \operatorname{cotg} \phi$

56. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta$

58. $\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta$

59–64 Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule a expressão.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$ **62.** $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$ **64.** $\cos 2y$

65–72 Encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação.

65. $2 \cos x - 1 = 0$ **66.** $3 \operatorname{cotg}^2 x = 1$

67. $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$ **68.** $|\operatorname{tg} x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ **70.** $2 \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ **72.** $2 + \cos 2x = 3 \cos x$

73–76 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade.

73. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$ **74.** $2 \cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ **76.** $\operatorname{sen} x > \cos x$

77–82 Faça o gráfico da função começando com o gráfico das Figuras 14 e 15 e aplicando as transformações da Seção 1.3 quando apropriado.

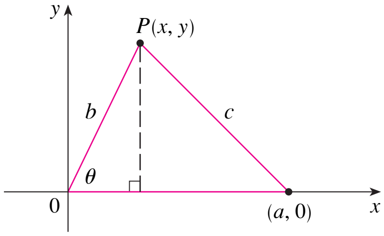
77. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **78.** $y = \operatorname{tg} 2x$

79. $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **80.** $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\operatorname{sen} x|$ **82.** $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

83. Demonstre a **Lei dos Cossenos**: se um triângulo tiver lados com comprimentos a, b, c e θ for um ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

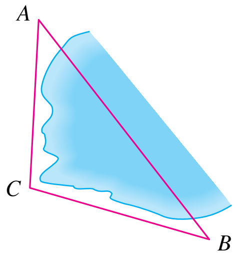


[*Dica:* Introduza um sistema de coordenadas de modo que θ esteja na posição padrão como na figura. Expresse x e y em termos de θ e use a fórmula de distância para calcular c.]

84. Para determinar a distância $|AB|$ sobre uma pequena enseada, um ponto C é colocado como na figura, e as seguintes medidas são registradas:

$$\angle C = 103° \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

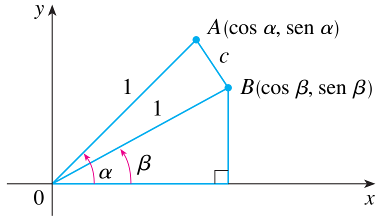
Use a Lei dos Cossenos do Exercício 83 para determinar a distância pedida.



85. Use a figura para demonstrar a fórmula da subtração

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

[*Dica:* Calcule c^2 de duas maneiras (usando a Lei dos Cossenos do Exercício 83 e também a fórmula da distância) e compare as duas expressões.]



86. Use a fórmula do Exercício 85 para demonstrar a fórmula da subtração para cosseno (12b).

87. Use a fórmula da adição para cosseno e as identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demonstrar a fórmula da subtração (13a) para a função seno.

88. Mostre que a área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e com o ângulo entre eles sendo θ é

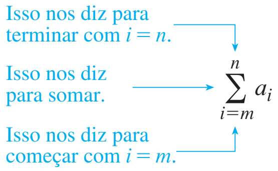
$$A = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

89. Determine a área do triângulo ABC, correta até cinco casas decimais, se

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107°$$

E Notação de Somatória (ou Notação Sigma)

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação de somatória (ou notação sigma)**.


Isso nos diz para terminar com i = n.
Isso nos diz para somar.
Isso nos diz para começar com i = m.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

1 Definição Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n inteiros tais que $m \leqslant n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Com a notação de função, a Definição 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Assim, o símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, $m, m+1, \ldots, n$. Outras letras também podem ser usadas como índice da somatória.

EXEMPLO 1

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

EXEMPLO 2 Escreva a soma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ na notação de somatória.

SOLUÇÃO Não há uma maneira única de escrever uma soma na notação somatória. Poderíamos escrever

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$

O teorema a seguir apresenta três regras simples para se trabalhar com a notação sigma.

2 Teorema Se c for uma constante qualquer (isto é, não depender de i), então

(a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$

(b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

DEMONSTRAÇÃO Para vermos por que essas regras são verdadeiras, devemos escrever ambos os lados na forma expandida. A regra (a) é tão somente a propriedade distributiva dos números reais:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

A regra (b) segue das propriedades associativa e comutativa:

$$\begin{aligned}(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n) \\ = (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)\end{aligned}$$

A regra (c) é demonstrada de modo análogo.

EXEMPLO 3 Encontre $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUÇÃO

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termos}} = n$$

EXEMPLO 4 Demonstre a fórmula para a soma do n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO Essa fórmula pode ser demonstrada por indução matemática ou pelo método a seguir, usado pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) quando ele tinha 10 anos de idade.

Escreva a soma S duas vezes, uma na ordem usual e a outra na ordem invertida:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \end{aligned}$$

Somando-se verticalmente todas as colunas, obtemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Do lado direito existem n termos, cada um dos quais é $n + 1$; portanto,

$$2S = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$ ■

EXEMPLO 5 Demonstre a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A maioria dos termos se cancela em pares

SOLUÇÃO 1 Seja S a soma desejada. Começamos com a *soma telescópica*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] &= (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \cdots + [(n+1)^3 - \cancel{n^3}] \\ &= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Teorema 2 e os Exemplos 3 e 4, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] &= \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n \end{aligned}$$

Então temos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Isolando S nessa equação, obtemos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

ou

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Princípio de Indução Matemática

Seja S_n uma afirmativa envolvendo o inteiro positivo n. Suponha que

1. S_1 seja verdadeira.
2. Se S_k ifor verdadeira, então S_{k+1} é verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todos inteiros positivos n.

SOLUÇÃO 2 Seja S_n a fórmula dada.

1. S_1 é verdadeira, pois $\quad 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$
2. Suponha que S_k seja verdadeira; isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Então

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (k+1)\,\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\\
&= (k+1)\,\frac{2k^2+7k+6}{6}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}
$$

Logo, S_{k+1} é verdadeira.
Pelo Princípio da Indução Matemática, S_n é verdadeira para todo n.

Vamos agrupar os resultados dos Exemplos 3, 4 e 5 com um resultado similar para cubos (veja os Exercícios 37-40) como o Teorema 3. Essas fórmulas são necessárias para encontrar áreas e calcular integrais no Capítulo 5.

3 Teorema Seja c uma constante e n um inteiro positivo. Então

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EXEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(4i^2-3)$.

SOLUÇÃO Usando os Teoremas 2 e 3, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(4i^2-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i^3-3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i\\
&= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)[2n(n+1)-3]}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n^2+2n-3)}{2}
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 7 Encontre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+1\right]$.

O tipo de cálculo do Exemplo 7 ocorre no Capítulo 5, quando calculamos áreas.

SOLUÇÃO

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+1\right] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{n^3}i^2+\frac{3}{n}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3}{n}\cdot n\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)+3\right]
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 = 4$$

Exercícios

1–10 Escreva a soma na forma expandida.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\displaystyle\sum_{i=4}^{6} 3^{i}$

4. $\displaystyle\sum_{i=4}^{6} i^{3}$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\displaystyle\sum_{k=5}^{8} x^{k}$

7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\displaystyle\sum_{j=n}^{n+3} j^{2}$

9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j}$

10. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11–20 Escreva a soma na notação de somatória.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21–35 Determine o valor da soma.

21. $\displaystyle\sum_{i=4}^{8} (3i-2)$

22. $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} i(i+2)$

23. $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} (-1)^{n}$

26. $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} (2^{i} + i^{2})$

28. $\displaystyle\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2-5i)$

31. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3+2i)^2$

33. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i+1)(i+2)$

34. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

35. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

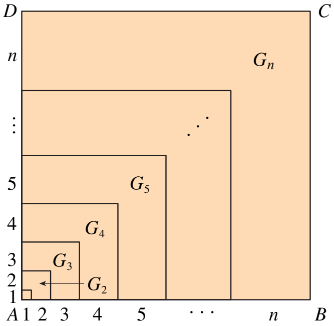
36. Determine o número n tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Demonstre a fórmula (b) do Teorema 3.

38. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando indução matemática.

39. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando um método similar àquele do Exemplo 5, Solução 1 [comece com $(1+i)^4 - i^4$].

40. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando o seguinte método publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi por volta do ano 1010. A figura mostra um quadrado $ABCD$ cujos lados AB e AD foram divididos em segmentos com comprimentos $1, 2, 3, \ldots, n$. Dessa forma, o lado do quadrado tem comprimento $n(n+1)/2$, de modo que a área é $[n(n+1)/2]^2$. Porém a área também é a soma das áreas dos n "gnomons" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mostrados na figura. Demonstre que a área de G_i é i^3 e conclua que a fórmula (e) é verdadeira.



41. Calcule cada soma telescópica.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i-1)^4]$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (5^{i} - 5^{i-1})$

(c) $\displaystyle\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Demonstre a desigualdade triangular generalizada:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43–46 Determine o limite.

43. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

44. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1\right]$

45. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

46. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Demonstre a fórmula para a soma de um série geométrica finita com primeiro termo a e razão $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Calcule $\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Calcule $\sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Calcule $\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} (i + j)\right]$.

F Demostrações dos Teoremas

Neste apêndice apresentamos as demonstrações de vários teoremas que estão enunciados na parte principal do texto. As seções nas quais eles ocorrem estão indicadas na margem.

SEÇÃO 2.3

Propriedades dos Limites Suponha que c seja uma constante e que os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existam. Então

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = cL$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$

5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 4 Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$$

A fim de conseguirmos termos que contenham $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$, adicionamos e subtraímos $Lg(x)$ como segue:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\ &\leqslant |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(Desigualdade Triangular)} \\ &= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \end{aligned}$$

Queremos fazer cada um desses termos menores que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{então} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}.$$

Também, há um número $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1$$

e, portanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leqslant |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Uma vez que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, há um número $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então temos $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$ e $0 < |x - a| < \delta_3$, portanto, podemos combinar as inequações para obter

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L|\,|g(x)| + |L|\,|g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L|\,\frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Isso mostra que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = LM$. ■

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 3 Se tomarmos $g(x) = c$ na Propriedade 4, obteremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [cf(x)] &= \lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= c \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{(pela Propriedade 7)} \end{aligned}$$ ■

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 2 Usando as Propriedades 1 e 3 com $c = -1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x). \end{aligned}$$ ■

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 5 Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Para fazer isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon$$

Observe que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Porém, também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x é próximo a a. Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta_1$, temos

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |M| = |M - g(x) + g(x)| &\leqslant |M - g(x)| + |g(x)| \\ &< \frac{|M|}{2} + |g(x)| \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

Então, para esses valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M|\,|g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Além disso, há $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{então} \qquad |g(x) - M| < \frac{M^2}{2}\,\varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2}\,\frac{M^2}{2}\,\varepsilon = \varepsilon$$

Segue que $\lim_{x\to a} 1/g(x) = 1/M$. Finalmente, usando a Propriedade 4, obtemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} f(x)\,\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$ ■

2 **Teorema** Se $f(x) \leqslant g(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

então $L \leqslant M$.

DEMONSTRAÇÃO Usamos o método da demonstração por contradição. Suponha, se possível, que $L > M$. A propriedade 2 dos limites diz que

$$\lim_{x\to a}\,[g(x) - f(x)] = M - L$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon$$

Em particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (observando que $L - M > 0$ por hipótese), temos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M$$

Uma vez que $a \leqslant |a|$ para qualquer número a, temos

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad [g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M$$

que se simplifica para

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad g(x) < f(x)$$

Mas isso contradiz o fato de que $f(x) \leqslant g(x)$. Assim, a desigualdade $L > M$ deve ser falsa. Portanto, $L \leqslant M$. ■

3 **O Teorema do Confronto** Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Então

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

DEMONSTRAÇÃO Considere $\varepsilon > 0$. Uma vez que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} h(x) = L$, há um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |h(x) - L| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

Em particular,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

ou melhor, $|g(x) - L| < \varepsilon$. Portanto, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. ■

Teorema Se f for uma função contínua injetora definida em um intervalo (a, b), então sua função inversa f^{-1} também é contínua.

SEÇÃO 2.3

DEMONSTRAÇÃO Primeiro, mostramos que se f for tanto injetora quanto contínua em (a, b), então ela precisa ser ou crescente ou decrescente em (a, b). Se ela não fosse nem crescente nem decrescente, então existiriam números x_1, x_2 e x_3 em (a, b) com $x_1 < x_2 < x_3$ tais que $f(x_2)$ não está entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Há duas possibilidades: ou (1) $f(x_3)$ está entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ ou (2) $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$. (Desenhe uma figura.) No caso (1), aplicamos o Teorema do Valor Intermediário à função contínua f para obter um número c entre x_1 e x_2 tal que $f(c) = f(x_3)$. No caso (2), o Teorema do Valor Intermediário dá um número c entre x_2 e x_3 tal que $f(c) = f(x_1)$. Em ambos os casos, contradissemos o fato de f ser injetora.

Vamos supor, para fixarmos uma situação, que f seja crescente em (a, b). Tomamos qualquer número y_0 no domínio de f^{-1} e fazemos $f^{-1}(y_0) = x_0$; ou seja, x_0 é o número em (a, b) tal que $f(x_0) = y_0$. Para mostrarmos que f^{-1} é contínua em y_0, tomamos qualquer $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esteja contido no intervalo (a, b). Como f é crescente, ela leva os números no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nos números no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e f^{-1} inverte a correspondência. Se denotarmos por δ o menor dos números $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ e $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$, então o intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contido no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e assim é levado no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ por f^{-1}. (Veja o diagrama de flechas na Figura 1.) Portanto, encontramos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{então} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

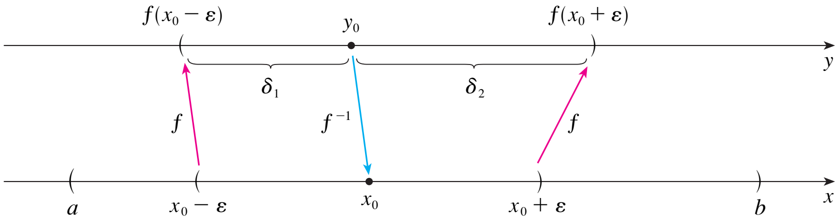


FIGURA 1

Isso mostra que $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ e, assim, f^{-1} é contínua em qualquer número y_0 em seu domínio. ■

$\boxed{8}$ **Teorema** Se f for contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b).$$

DEMONSTRAÇÃO Considere $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que f é contínua em b, temos

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

de modo que, há $\delta_1 > 0$ satisfazendo

$$\text{se} \qquad 0 < |y - b| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |g(x) - b| < \delta_1$$

Combinando essas duas afirmações, vemos que sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos $|g(x) - b| < \delta_1$, que implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Dessa forma, demonstramos que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. ■

SEÇÃO 3.3

A demonstração do resultado a seguir foi prometida ao demonstrarmos que $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$.

Teorema Se $0 < \theta < \pi/2$, então $\theta \leqslant \operatorname{tg} \theta$.

DEMONSTRAÇÃO A Figura 2 mostra um setor de um círculo com centro O, ângulo central θ e raio 1. Então

$$|AD| = |OA| \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta$$

Aproximamos o arco AB por um polígono inscrito que consiste em n segmentos de reta iguais e tomamos um segmento típico PQ. Estendemos os segmentos OP e OQ para encontrar AD nos pontos R e S. Então traçamos $RT \parallel PQ$ como na Figura 2. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90°$$

e também $\angle RTS > 90°$. Portanto, temos

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

Se adicionarmos as n desigualdades semelhantes a essa, obtemos

$$L_n < |AD| = \operatorname{tg} \theta$$

onde L_n é o comprimento do polígono inscrito. Assim, pelo Teorema 2.3.2, temos

$$\lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \operatorname{tg} \theta.$$

Mas o comprimento do arco foi definido na Equação 8.1.1 como o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos, de modo que

$$\theta = \lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \operatorname{tg} \theta$$ ■

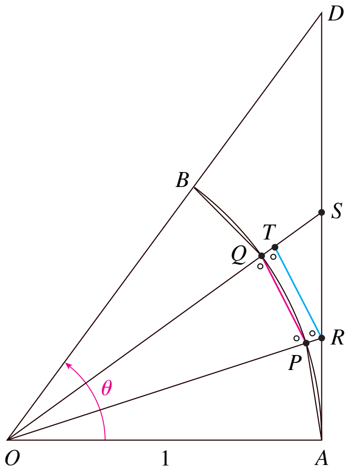


FIGURA 2

SEÇÃO 4.3

Teste da Concavidade
(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.
(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

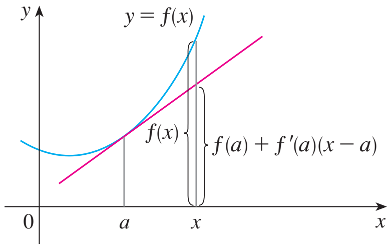


FIGURA 3

DEMONSTRAÇÃO DE (a) Seja a um número arbitrário em I. Devemos mostrar que a curva $y = f(x)$ está acima da reta tangente no ponto $(a, f(a))$. A equação dessa tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim, devemos mostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

qualquer que seja $x \in I$ $(x \neq a)$. (Veja a Figura 3.)

Primeiro, assumimos o caso onde $x > a$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a, x]$, obtemos um número c com $a < c < x$, tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Uma vez que $f'' > 0$ em I, sabemos do Teste Crescente/Decrescente que f' é crescente em I. Logo, como $a < c$, temos

$$f'(a) < f'(c)$$

de modo que, multiplicando essa desigualdade pelo número positivo $x - a$, obtemos

$$\boxed{2} \qquad f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a)$$

Somando agora $f(a)$ a ambos os lados dessa desigualdade, obtemos

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Porém, da Equação 1 temos $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. Dessa forma, a desigualdade fica

$$\boxed{3} \qquad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

que é o que queríamos demonstrar.

Para o caso onde $x < a$, temos $f'(c) < f'(a)$, mas a multiplicação pelo número negativo $x - a$ inverte o sinal da desigualdade; assim, obtemos $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ como anteriormente. ■

SEÇÃO 4.4

A fim de darmos a demonstração da Regra de L'Hôspital prometida precisamos, primeiro, de uma generalização do Teorema do Valor Médio. O nome do teorema a seguir é uma homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

$\boxed{1}$ **Teorema de Valor Médio de Cauchy** Suponhamos que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b). Então, existe um número c em (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observe que se considerarmos o caso especial no qual $g(x) = x$, então $g'(c) = 1$ e o Teorema 1 é exatamente o Teorema do Valor Médio Comum. Além disso, o Teorema 1 pode ser demonstrado de forma similar. Perceba que tudo o que devemos fazer é mudar a função h dada pela Equação 4.2.4 para a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

e então aplicar o Teorema de Rolle como anteriormente.

Regra de L'Hôspital Suponhamos que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE L'HÔSPITAL Supomos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Seja

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = L$. Defina

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \mid x \neq a\}$ e

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Do mesmo modo, G é contínua em I. Seja $x \in I$ com $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x) e $G' \neq 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que e $a < y < x$

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui, usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se deixamos $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$), portanto

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y \to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso prova a Regra de l'Hôspital para o caso onde a é finito.

Se a é infinito, consideramos $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$, assim temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \qquad \text{(pela Regra de l'Hôspital para } a \text{ finito)} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

SEÇÃO 11.8

Para demonstrarmos o Teorema 11.8.3, precisamos primeiro dos seguintes resultados.

Teorema

1. Se uma série de potências $\Sigma\, c_n x^n$ converge quando $x = b$ (onde $b \neq 0$), então ela converge sempre que $|x| < |b|$.
2. Se uma série de potências $\Sigma\, c_n x^n$ diverge, quando $x = d$ (onde $d \neq 0$), então ela diverge sempre que $|x| > |d|$.

DEMONSTRAÇÃO DE 1 Suponha que $\Sigma\, c_n b^n$ convirja. Então, pelo Teorema 11.2.6, temos $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acordo com a Definição 11.1.2 com $\varepsilon = 1$, há um inteiro positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ sempre que $n \geqslant N$. Assim, para $n \geqslant N$, temos

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n|\left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Se $|x| < |b|$, então $|x/b| < 1$, donde $\Sigma\, |x/b|^n$ é uma série geométrica convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, a série $\Sigma_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ é convergente. Então a série $\Sigma\, c_n x^n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. ■

DEMONSTRAÇÃO DE 2 Suponha que $\Sigma\, c_n d^n$ divirja. Se x for qualquer número real tal que $|x| > |d|$, então $\Sigma\, c_n x^n$ não pode convergir, pois, pela parte 1, a convergência de $\Sigma\, c_n x^n$ implicaria a convergência de $\Sigma\, c_n d^n$. Portanto, $\Sigma\, c_n x^n$ diverge sempre que $|x| > |d|$. ■

Teorema Para uma série de potência $\Sigma\, c_n x^n$, há somente três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = 0$.
2. A série converge para todo x.
3. Há um número positivo R tal que a série converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que nem o caso 1 nem o caso 2 sejam verdade. Então há números não nulos b e d tais que $\Sigma\, c_n x^n$ converge para $x = b$ e diverge para $x = d$. Portanto o conjunto $S = \{x \mid \Sigma\, c_n x^n \text{ converge}\}$ não é vazio. Pelo teorema precedente, a série diverge se $|x| > |d|$, de modo que $|x| \leqslant |d|$ para todo $x \in S$. Isso diz que $|d|$ é um limite superior para o conjunto S. Assim, pelo Axioma da Completude (veja a Seção 11.1), S tem um limite superior mínimo R. Se $|x| > R$, então $x \notin S$, portanto $\Sigma\, c_n x^n$ diverge. Se $|x| < R$, então $|x|$ não é um limite superior S e assim há $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, c_n b^n$ converge, de modo que pelo teorema precedente $\Sigma\, c_n x^n$ converge. ■

$\boxed{3}$ **Teorema** Para uma série de potências $\Sigma\, c_n (x - a)^n$, há somente três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$.
2. A série converge para todo x.
3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Se fizermos a mudança de variáveis $u = x - a$, então a série de potências se torna $\Sigma\, c_n u^n$ e podemos aplicar o teorema anterior a esta série. No caso 3, temos convergência para $|u| < R$ e divergência para $|u| > R$. Assim, temos convergência para $|x - a| < R$ e divergência para $|x - a| > R$. ■

SEÇÃO 14.3

Teorema de Clairaut Suponha que f esteja definida em um disco D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO Para pequenos valores de h, $h \neq 0$, considere a diferença

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Observe que, se fizermos $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$, então

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre a e $a+h$ tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b+h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio de novo, desta vez para f_x, obtemos um número d entre b e $b+h$ tal que

$$f_x(c, b+h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Se $h \to 0$, então $(c, d) \to (a, b)$, de modo que a continuidade de f_{xy} em (a, b) fornece

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Analogamente, escrevendo

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]$$

e usando o Teorema do Valor Médio duas vezes e a continuidade de f_{yx} em (a, b), obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Segue que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

SEÇÃO 14.4

8 **Teorema** Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto de (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é derivável em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO Seja

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acordo com (14.4.7), para demonstrar que f é derivável em (a, b), devemos mostrar que podemos escrever Δz na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Observando a Figura 4, escrevemos

$$\boxed{1} \quad \Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

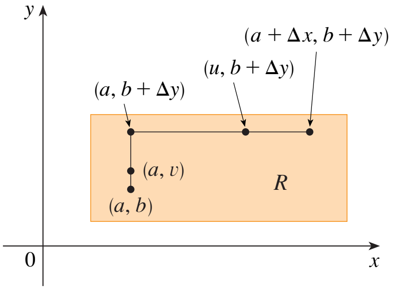


FIGURA 4

Observe que a função de uma única variável

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida no intervalo $[a, a + \Delta x]$ e $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio a g, obtemos

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\,\Delta x$$

onde u é algum número entre a e $a + \Delta x$. Em termos de f, esta equação se torna

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Isso nos dá uma expressão para a primeira parte do lado direito da Equação 1. Para a segunda parte, tomamos $h(y) = f(a, y)$. Então h é uma função de uma única variável definida no intervalo $[b, b + \Delta y]$ e $h'(y) = f_y(a, y)$. Uma segunda aplicação do Teorema do Valor Médio então dá

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

em que v é algum número entre b e $b + \Delta y$. Em termos de f, isso se torna

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v)\,\Delta y$$

Agora, substituímos essa expressão na Equação 1 e obtemos

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y\\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y\\ &\qquad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\,\Delta y\\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ e $(a, v) \to (a, b)$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ e uma vez que f_x e f_y são contínuas em (a, b), vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Portanto, f é derivável em (a, b). ■

G O Logaritmo Definido como uma Integral

Nosso tratamento das funções exponencial e logarítmica até agora fundamentou-se em nossa intuição, que é baseada na evidência numérica e visual. (Veja as Seções 1.5, 1.6 e 3.1.) Aqui, usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo para dar um tratamento alternativo que fornece uma fundamentação mais sólida para estas funções.

Em vez de começarmos com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, desta vez começamos pela definição de $\ln x$ como uma integral e então definimos a função exponencial como sua inversa. Você deve ter em mente que não usamos nenhuma de nossas definições e resultados prévios relativos a funções exponencial e logarítmica.

O Logaritmo Natural

Primeiro, definimos $\ln x$ como uma integral.

1 **Definição** A **função logaritmo natural** é a função definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

A existência dessa função depende do fato de a integral de uma função contínua sempre existir. Se $x > 1$, então $\ln x$ pode ser interpretada geometricamente como a área sob a hipérbole $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$. (Veja a Figura 1.) Para $x = 1$, temos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Para $0 < x < 1$, $$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$$

e assim $\ln x$ é o oposto da área mostrada na Figura 2.

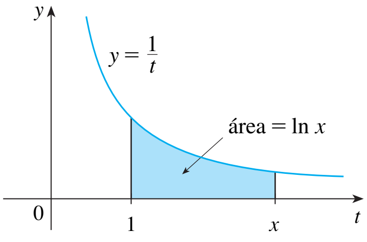


FIGURA 1

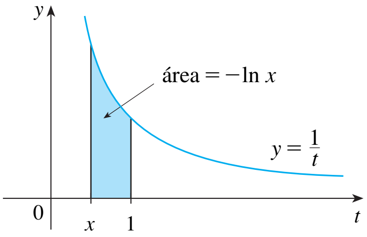


FIGURA 2

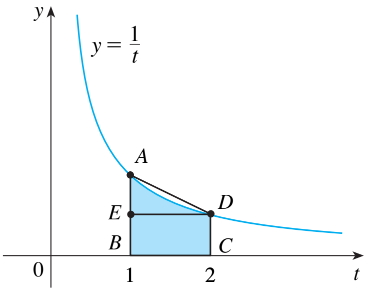


FIGURA 3

EXEMPLO 1

(a) Comparando áreas, mostre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.
(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar o valor de $\ln 2$.

SOLUÇÃO

(a) Podemos interpretar $\ln 2$ como a área sob a curva $y = 1/t$ de 1 a 2. Da Figura 3, vemos que esta área é maior que a área do retângulo *BCDE* e menor que a área do trapézio *ABCD*. Assim, temos

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

(b) Se usarmos a Regra do Ponto Médio com $f(t) = 1/t$, $n = 10$ e $\Delta t = 0{,}1$, obtemos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0{,}1)[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}95)]$$
$$= (0{,}1)\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots + \frac{1}{1{,}95}\right) \approx 0{,}693$$

Observe que a integral que define $\ln x$ é exatamente o tipo de integral discutida na parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3). De fato, usando aquele teorema, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

e, então,

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Agora, usamos esta regra de derivação para demonstrar as seguintes propriedades sobre a função logaritmo.

3 Propriedades dos Logaritmos Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r \ln x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Então, usando a Equação 2 e a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ têm a mesma derivada e devem então diferir por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Colocando $x = 1$ nesta equação, obtemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Logo,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Se agora substituirmos a constante a por qualquer número y, temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Usando a Propriedade 1 com $x = 1/y$, temos

$$\ln \frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

e assim

$$\ln \frac{1}{y} = -\ln y$$

Usando a Propriedade 1 novamente, temos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

A demonstração da Propriedade 3 será deixada como exercício.

Para traçarmos o gráfico de $y = \ln x$, primeiro determinamos seus limites:

$$\boxed{4} \qquad \text{(a)} \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Usando a Propriedade 3 com $x = 2$ e $r = n$ (onde n é um inteiro positivo arbitrário), temos $\ln(2^n) = n \ln 2$. Agora $\ln 2 > 0$, portanto isso mostra que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mas $\ln x$ é uma função crescente, já que sua derivada $1/x > 0$. Portanto $\ln x \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(b) Se tomarmos $t = 1/x$, então $t \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Logo, usando (a), temos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty} (-\ln t) = -\infty$$

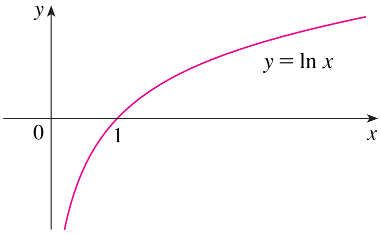


FIGURA 4

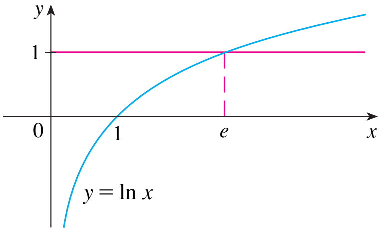


FIGURA 5

Se $y = \ln x$, $x > 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

o que mostra que $\ln x$ é crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$. Juntando esta informação com $\boxed{4}$, traçamos o gráfico de $y = \ln x$ na Figura 4.

Como $\ln 1 = 0$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente que assume valores arbitrariamente grandes, o Teorema do Valor Intermediário mostra que existe um número no qual $\ln x$ assume o valor 1. (Veja a Figura 5.) Esse número importante é denotado por e.

$\boxed{5}$ **Definição** e é o número tal que $\ln e = 1$.

Mostraremos (no Teorema 19) que esta definição é consistente com nossa definição prévia de e.

A Função Exponencial Natural

Como ln é uma função crescente, ela é injetora e, portanto, tem uma função inversa, que denotaremos por exp. Assim, de acordo com nossa definição de função inversa,

6
$$\boxed{\exp(x) = y \iff \ln y = x}$$

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

e as equações de cancelamento são

7
$$\boxed{\exp(\ln x) = x \quad \text{e} \quad \ln(\exp x) = x}$$

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

Em particular, temos

$$\exp(0) = 1 \quad \text{já que} \quad \ln 1 = 0$$

$$\exp(1) = e \quad \text{já que} \quad \ln e = 1$$

O gráfico de $y = \exp x$ é obtido refletindo o gráfico de $y = \ln x$ em torno da reta $y = x$. (Veja a Figura 6.) O domínio da exp é a imagem de ln, ou seja, $(-\infty, \infty)$; a imagem de exp é o domínio de ln, ou seja, $(0, \infty)$.

Se r for qualquer número racional, então a terceira propriedade dos logaritmos dá

$$\ln(e^r) = r \ln e = r.$$

Portanto, por $\boxed{6}$,
$$\exp(r) = e^r$$

Logo, $\exp(x) = e^x$ sempre que x for um número racional. Isso nos leva a definir e^x, mesmo para valores irracionais de x, pela equação

$$\boxed{e^x = \exp(x)}$$

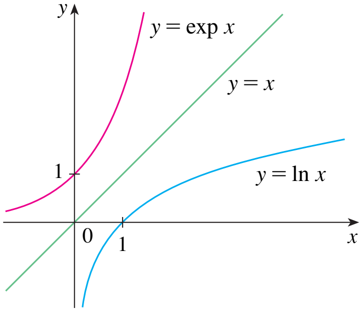


FIGURA 6

Em outras palavras, pelas razões apresentadas, definimos e^x como a função inversa de ln x. Nesta notação, $\boxed{6}$ se torna

8
$$\boxed{e^x = y \iff \ln y = x}$$

e as equações de cancelamento $\boxed{7}$ são

9
$$\boxed{e^{\ln x} = x \qquad x > 0}$$

10
$$\boxed{\ln(e^x) = x \qquad \text{para todo } x}$$

A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é uma das mais frequentes funções no cálculo e em suas aplicações, então é importante estar familiarizado com seu gráfico (Figura 7) e suas propriedades (que decorrem do fato de que ela é a inversa da função logarítmica natural).

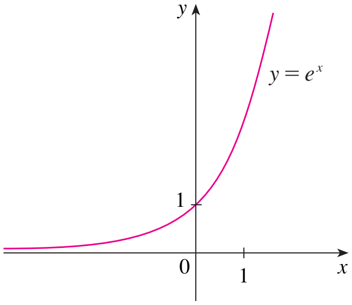


FIGURA 7
A função exponencial natural

Propriedades da Função Exponencial A função exponencial $f(x) = e^x$ é uma função contínua crescente com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(0, \infty)$. Assim, $e^x > 0$ para todo x. Temos também

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Logo, o eixo x é uma assíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

Verificamos agora que f tem as outras propriedades esperadas de uma função exponencial.

11 **Propriedades dos Expoentes** Se x e y forem números naturais e r for um racional, então

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 1 Usando a primeira propriedade dos logaritmos e a Equação 10, temos

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Como ln é uma função injetora, segue que $e^x e^y = e^{x+y}$.

As Propriedades 2 e 3 são demonstradas de modo análogo (veja os Exercícios 6 e 7). Como veremos em breve, a Propriedade 3 na realidade vale quando r é qualquer número real. ■

Demonstraremos agora a fórmula de derivação para e^x.

12

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

DEMONSTRAÇÃO A função $y = e^x$ é derivável porque ela é a inversa da função $y = \ln x$, que sabemos ser derivável, com derivada não nula. Para encontrarmos sua derivada, usamos o método da função inversa. Seja $y = e^x$. Então, $\ln y = x$ e, derivando essa última equação implicitamente com relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

■

Funções Exponenciais Gerais

Se $a > 0$ e r for qualquer número racional, então, por $\boxed{9}$ e $\boxed{11}$,

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Portanto, mesmo para um número irracional x, *definimos*

13

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

Assim, por exemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$$

A função $f(x) = a^x$ é chamada **função exponencial com base *a***. Observe que a^x é positivo para todo x porque e^x é positivo para todo x.

A Definição 13 nos permite estender uma das propriedades de logaritmos. Já sabemos que $\ln(a^r) = r \ln a$ a quando r é racional. Mas se agora permitimos que seja *qualquer* número real, temos, pela Definição 13,

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Logo,

14 $$\ln a^r = r \ln a \qquad \text{para todo número real } r$$

As propriedades gerais dos expoentes seguem da Definição 13 com as propriedades dos expoentes para e^x.

15 **Propriedades dos Expoentes** Se x e y forem números reais e $a, b > 0$, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x/a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

DEMONSTRAÇÃO

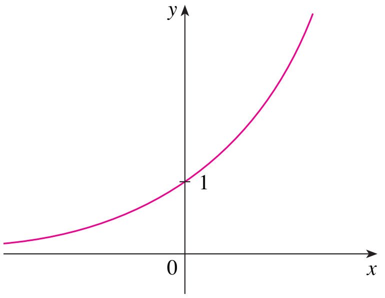
1. Usando a Definição 13 e as propriedades dos expoentes para e^x, temos

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} \\ &= e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y \end{aligned}$$

3. Usando a Equação 14, obtemos

$$(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{yx\ln a} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$$

As demonstrações restantes são deixadas como exercícios. ■



$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \ \lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

FIGURA 8 $y = a^x, \quad a > 1$

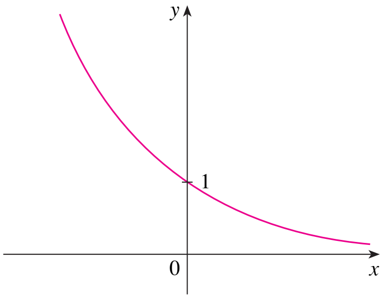
A fórmula de derivação para as funções exponenciais também é uma consequência da Definição 13:

16
$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = a^x \ln a$$ ■

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, donde $(d/dx)\, a^x = a^x \ln a > 0$, o que mostra que $y = a^x$ é crescente (veja a Figura 8). Se $0 < a < 1$, então $\ln a < 0$ e, portanto, $y = a^x$ é decrescente (veja a Figura 9).



$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty, \ \lim_{x\to\infty} a^x = 0$

FIGURA 9 $y = a^x, \quad 0 < a < 1$

Funções Logarítmicas Gerais

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função injetora. Sua função inversa é chamada **função logarítmica de base *a*** e é denotada por $\log_a$. Logo,

17
$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Em particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

As propriedades dos logaritmos são parecidas com as do logaritmo natural e podem ser deduzidas das propriedades dos expoentes (veja o Exercício 10).

Para derivar $y = \log_a x$, escrevemos a equação como $a^y = x$. Da Equação 14, temos $y \ln a = \ln x$. Portanto,

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Como $\ln a$ é constante, podemos derivar da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x\ln a}$$

18 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

O Número *e* Expresso Como um Limite

Nesta seção, definimos e como o número tal que $\ln e = 1$. O próximo teorema mostra que isto é o mesmo que o número e definido na Seção 3.1 (veja a Equação 3.6.5).

19 $$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(x) = 1/x$, logo $f'(1) = 1$. Porém, pela definição de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

Por causa de $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$ ■

G Exercícios

1. (a) Pela comparação de áreas, mostre que

$$\tfrac{1}{3} < \ln 1{,}5 < \tfrac{5}{12}$$

(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar $\ln 1{,}5$.

2. Com referência ao Exemplo 1.

(a) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 1/t$ que seja paralela à reta secante AD.

(b) Use a parte (a) para mostrar que $\ln 2 > 0{,}66$.

3. (a) Pela comparação de áreas, mostre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

4. (a) Comparando áreas, mostre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

(b) Deduza que $2 < e < 3$.

5. Demonstre a terceira propriedade dos logaritmos. [*Dica:* Comece mostrando que ambos os lados da equação têm a mesma derivada.]

6. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes para e^x [veja $\boxed{11}$].

7. Demonstre a terceira propriedade dos expoentes para e^x [veja $\boxed{11}$].

8. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes [veja $\boxed{15}$].

9. Demonstre a quarta propriedade dos expoentes [veja $\boxed{15}$].

10. Deduza as seguintes propriedades dos logaritmos a partir de $\boxed{15}$:

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(b) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

(c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

H Números Complexos

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$. O número complexo $a + bi$ também pode ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como um ponto em um plano (chamado de plano de Argand) como na Figura 1. Assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ é identificado com o ponto $(0, 1)$.

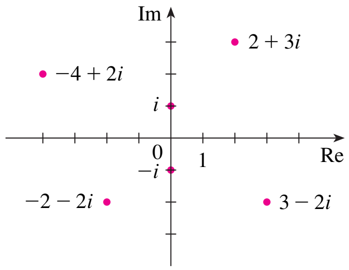


FIGURA 1
Números complexos como pontos no plano Argand

A **parte real** do número complexo $a + bi$ é o número real a e a **parte imaginária** é o número real b. Desse modo, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária é -3. Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais sejam válidas:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso se torna

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a + bi$, definimos seu **complexo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Para encontrarmos o quociente de dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

EXEMPLO 2 Expresse o número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ na forma $a + bi$.

SOLUÇÃO Multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de $2 + 5i$, isto é, $2 - 5i$, e levamos em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

A interpretação geométrica do complexo conjugado encontra-se na Figura 2: $\bar{z}$ é a reflexão de z no eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentada a seguir. As demonstrações seguem da definição e serão pedidas no Exercício 18.

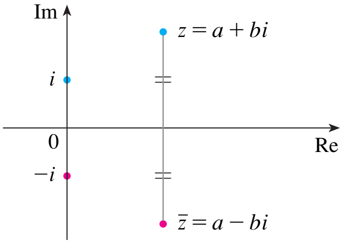


FIGURA 2

Propriedades dos Conjugados

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

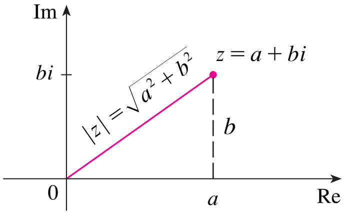


FIGURA 3

O **módulo**, ou **valor absoluto**, $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se $z = a + bi$, então

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observe que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

e assim

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, podemos pensar em i como raiz quadrada de -1. Mas observe que nós também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, $-i$ também é uma raiz quadrada de -1. Dizemos que i é a **raiz quadrada principal** de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se c é um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Com essa convenção, a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são válidas mesmo que $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3 Encontre as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são complexas conjugadas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b e c são sempre complexas conjugadas. (Se z é real, $\bar{z} = z$, z é sua própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi demonstrado por Gauss.

Forma Polar

Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$. De fato,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

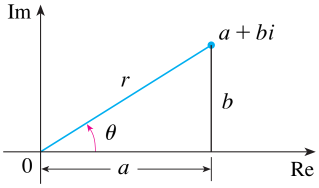


FIGURA 4

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

onde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\text{tg}\,\theta = \dfrac{b}{a}$

O ângulo θ é chamado **argumento** de z e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Observe que $\arg(z)$ não é único; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

EXEMPLO 4 Escreva os números a seguir na forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUÇÃO

(a) Temos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\text{tg}\,\theta = 1$, então podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por conseguinte, a forma polar é

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aqui temos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\text{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}$. Como w está no quarto quadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ e

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Os números z e w estão mostrados na Figura 5.

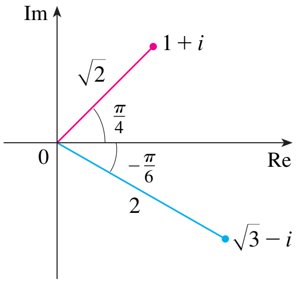


FIGURA 5

A forma polar dos números complexos nos dá uma nova perspectiva da multiplicação e da divisão. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

$$\boxed{1} \qquad \boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

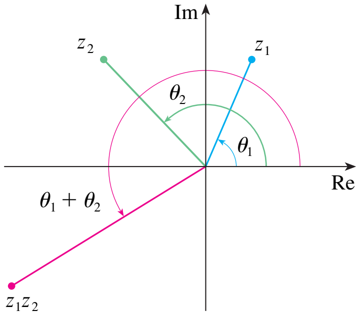


FIGURA 6

Essa fórmula nos diz que *para multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos* (veja a Figura 6).

Um argumento similar do uso de fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que, *para dividirmos dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos*.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

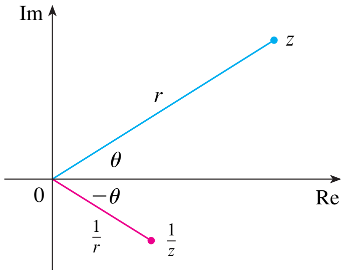


FIGURA 7

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z$ (e, portanto, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$), temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 7.

$$\boxed{\text{Se} \quad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \quad \text{então} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)}$$

EXEMPLO 5 Encontre o produto dos números complexos $1 + i$ e $\sqrt{3} - i$ na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

e
$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Portanto, pela Equação 1,

$$\begin{aligned}(1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Isso está ilustrado na Figura 8.

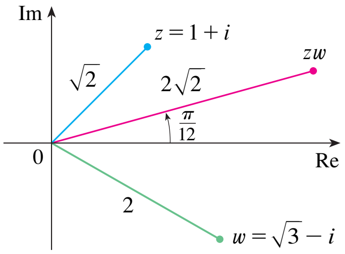


FIGURA 8

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como calcular as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

então
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

e
$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$

Em geral, obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

> **2** **Teorema de De Moivre** Se $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e n for um inteiro positivo, então
>
> $$z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Isso nos diz que *para obtermos a n-ésima potência de um número complexo, elevamos à n-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n*.

EXEMPLO 6 Encontre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUÇÃO Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, segue do Exemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Portanto, pelo Teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)\\ &= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i\end{aligned}$$

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para achar as n-ésimas raízes dos números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar com

$$w = s(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) \qquad \text{e} \qquad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

e $$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Logo, $$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Uma vez que essa expressão resulta em valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, temos o seguinte.

3 **Raízes de um Número Complexo** Seja $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e seja n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada uma das raízes n-ésimas de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as raízes n-ésimas de z estão sobre a circunferência de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n-ésimas excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as raízes n-ésimas de z são igualmente espaçadas sobre essa circunferência.

EXEMPLO 7 Encontre as seis raízes sextas de $z = -8$ e represente-as no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$. Aplicando a Equação 3 com $n = 6$, obtemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtemos as seis raízes sextas de -8 fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

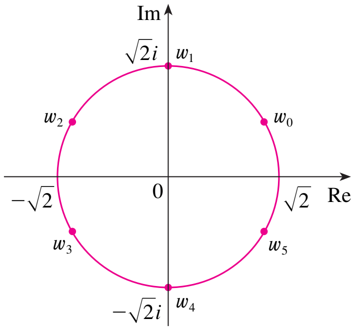


FIGURA 9
As seis raízes sextas de $z = -8$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Todos esses pontos estão sobre a circunferência de raio $\sqrt{2}$, como mostrado na Figura 9.

Exponenciais Complexas

Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11, no Volume II, pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para e^x (11.10.11) como guia, definimos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{4}$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \tag{5}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obtemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i\,\text{sen}\,y \end{aligned}$$

Usamos aqui as séries de Taylor para cos y e sen y (Equações 11.10.16 e 11.10.15). O resultado é a famosa fórmula denominada **fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen}\,y} \tag{6}$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y) \tag{7}$$

Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a matemática: 0, 1, e, i e π.

EXEMPLO 8 Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler [6], temos

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação 7, obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Finalmente, observamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de demonstrar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

H Exercícios

1–14 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$ **2.** $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$ **4.** $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$ **6.** $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$ **8.** $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$ **10.** $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3 **12.** i^{100}

13. $\sqrt{-25}$ **14.** $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $12 - 5i$ **16.** $-1 + 2\sqrt{2}\,i$

17. $-4i$

18. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:
(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
(c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, onde n é um inteiro positivo
[*Dica:* Escreva $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$ **20.** $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$ **22.** $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$ **24.** $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 Escreva o número na forma polar com o argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$ **26.** $1 - \sqrt{3}\,i$

27. $3 + 4i$ **28.** $8i$

29–32 Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\,i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4\left(\sqrt{3} + i\right), \quad w = -3 - 3i$

33–36 Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$ **34.** $\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^5$

35. $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^5$ **36.** $(1 - i)^8$

37–40 Determine as raízes indicadas. Represente as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1.

38. As quintas raízes de 32.

39. As raízes cúbicas de i.

40. As raízes cúbicas de $1 + i$.

41–46 Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$ **42.** $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$ **44.** $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$ **46.** $e^{\pi+i}$

47. Use o Teorema de De Moivre com $n = 3$ para expressar $\cos 3\theta$ e $\text{sen}\,3\theta$ em termos de $\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta$.

48. Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para $\cos x$ e $\text{sen}\,x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{sen}\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função com valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções deriváveis de x, então a derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Associe isso à Equação 7 para demonstrar que $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

50. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma primitiva de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando a parte real e a imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^x\,\text{sen}\,x\,dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.

I Respostas para os Exercícios Ímpares

CAPÍTULO 9

EXERCÍCIOS 9.1

3. (a) $\frac{1}{2}$, -1 **5.** (d)

7. (a) Deve ser 0 ou decrescente

(c) $y = 0$ (d) $y = 1/(x + 2)$

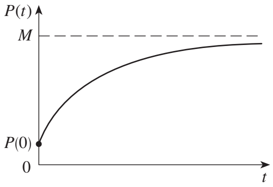
9. (a) $0 < P < 4\,200$ (b) $P > 4\,200$

(c) $P = 0$, $P = 4\,200$

13. (a) III (b) I (c) IV (d) II

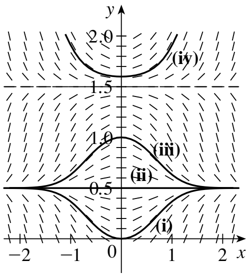
15. (a) No início; permanece positivo, mas decresce

(c)



EXERCÍCIOS 9.2

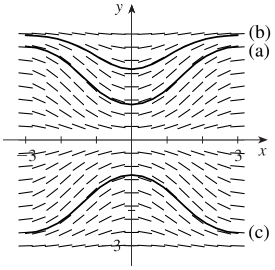
1. (a)



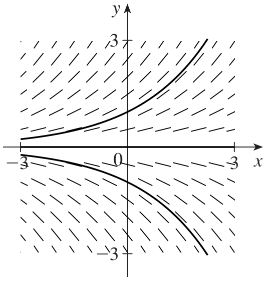
(b) $y = 0{,}5$, $y = 1{,}5$

3. III **5.** IV

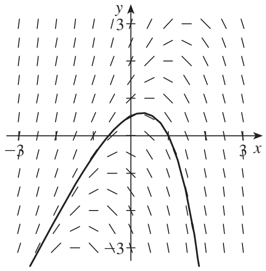
7.



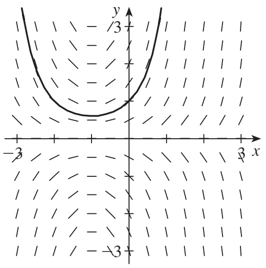
9.



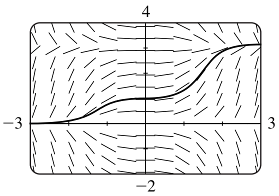
11.



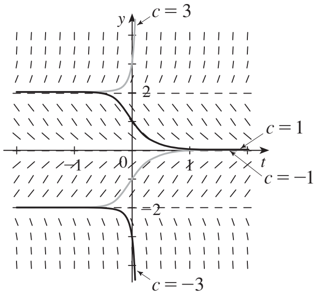
13.



15.



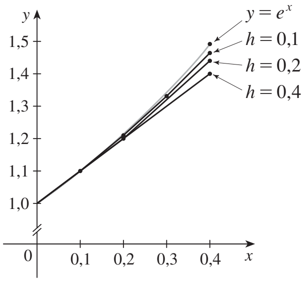
17.



$-2 \leqslant c \leqslant 2$; $-2, 0, 2$

19. (a) (i) 1,4 (ii) 1,44 (iii) 1,4641

(b)



Subestima

(c) (i) 0,0918 (ii) 0,0518 (iii) 0,0277

Parece que o erro também caiu pela metade (aproximadamente).

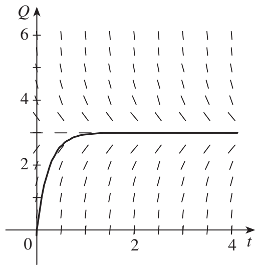
21. $-1, -3, -6{,}5, -12{,}25$ **23.** 1,7616

25. (a) (i) 3 (ii) 2,3928 (iii) 2,3701 (iv) 2,3681

(c) (i) $-0{,}6321$ (ii) $-0{,}0249$ (iii) $-0{,}0022$ (iv) $-0{,}0002$

Parece que o erro também foi dividido por 10 (aproximadamente).

27. (a), (d)



(b) 3

(c) Sim; $Q = 3$

(e) 2,77 C

EXERCÍCIOS 9.3

1. $y = Kx$, $y = 0$ **3.** $y = \sqrt[3]{3x + 3\ln|x| + K}$

5. $\frac{1}{2}y^2 - \cos y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$

7. $e^y(y - 1) = C - \frac{1}{2}e^{-t^2}$ **9.** $p = Ke^{t^3/3 - t} - 1$

11. $y = -\sqrt{x^2 + 9}$ **13.** $u = -\sqrt{t^2 + \operatorname{tg} t + 25}$

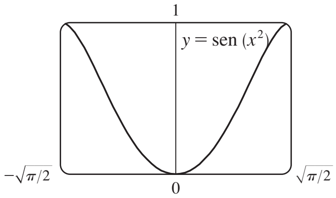
15. $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{41}{12}$

17. $y = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} x - a$

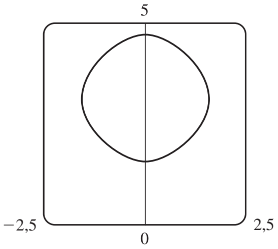
19. $y = e^{x^2/2}$ **21.** $y = Ke^x - x - 1$

23. (a) $\operatorname{sen}^{-1} y = x^2 + C$

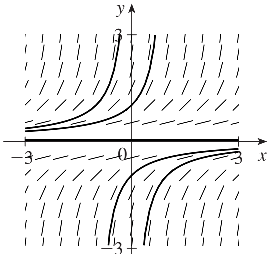
(b) $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $-\sqrt{\pi/2} \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$ (c) Não



25. $\cos y = \cos x - 1$

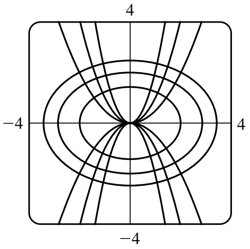


27. (a)

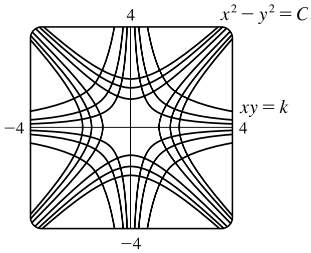


(b) $y = \dfrac{1}{K - x}$

29. $y = Cx^2$



31. $x^2 - y^2 = C$



33. $y = 1 + e^{2-x^2/2}$ **35.** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)^2$

37. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **39.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

41. (a) $x = a - \dfrac{4}{(kt + 2/\sqrt{a})^2}$

(b) $t = \dfrac{2}{k\sqrt{a - b}}\left(\text{tg}^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a - b}} - \text{tg}^{-1}\sqrt{\dfrac{b - x}{a - b}}\right)$

43. (a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$
(b) r/k; a concentração se aproxima de r/k independentemente do valor de C_0

45. (a) $15e^{-t/100}$ kg (b) $15e^{-0,2} \approx 12,3$ kg

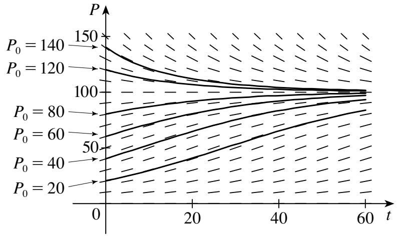
47. Cerca de 4,9% **49.** g/k

51. (a) $L_1 = KL_2^k$ (b) $B = KV^{0,0794}$

53. (a) $dA/dt = k\sqrt{A}(M - A)$ (b) $A(t) = M\left(\dfrac{Ce^{\sqrt{M}kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}kt} + 1}\right)^2$,
onde $C = \dfrac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$ e $A_0 = A(0)$

EXERCÍCIOS 9.4

1. (a) 100; 0,05 (b) onde P está próximo de 0 ou 100; na reta $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$
(c)



As soluções aproximam-se de 100; algumas crescem, outras decrescem; algumas têm ponto de inflexão, outras não; as soluções com $P_0 = 20$ e $P_0 = 40$ têm pontos de inflexão em $P = 50$
(d) $P = 0$, $P = 100$; as outras soluções se afastam de $P = 0$ e se aproximam de $P = 100$

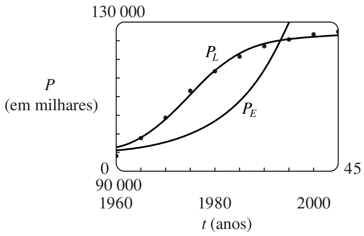
3. (a) $3,23 \times 10^7$ kg (b) $\approx 1,55$ ano

5. 9 000

7. (a) $dP/dt = \frac{1}{265}P(1 - P/100)$, P em bilhões
(b) 5,49 bilhões (c) Em bilhões: 7,81, 27,72
(d) Em bilhões: 5,48, 7,61, 22,41

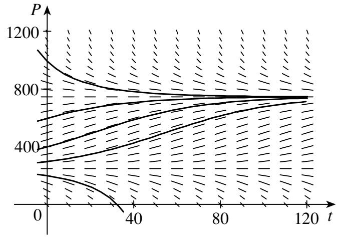
7. (a) $dy/dt = ky(1 - y)$ (b) $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}}$
(c) 15:36

13. $P_E(t) = 1\,578,3(1,0933)^t + 94.000$;
$$P_L(t) = \frac{32.658,5}{1 + 12,75e^{-0,1706t}} + 94.000$$



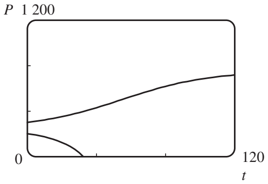
15. (a) $P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$ (b) $m < kP_0$
(c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ (d) Diminuindo

17. (a) Os peixes são capturados em uma taxa de 15 por semana.
(b) Veja a parte (d). (c) $P = 250$, $P = 750$
(d)

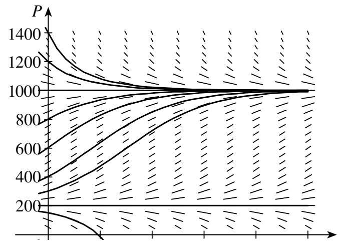


$0 < P_0 < 250$: $P \to 0$;
$P_0 = 250$: $P \to 250$;
$P_0 > 250$: $P \to 750$

(e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - ke^{t/25}}$
onde $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$



19. (b)



$0 < P_0 < 200$: $P \to 0$;
$P_0 = 200$: $P \to 200$;
$P_0 > 200$: $P \to 1000$

(c) $P(t) = \dfrac{m(M - P_0) + M(P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}{M - P_0 + (P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}$

21. (a) $P(t) = P_0 e^{(k/r)[\text{sen}(rt - \phi) + \text{sen}\,\phi]}$ (b) Não existe

EXERCÍCIOS 9.5

1. Sim **3.** Não **5.** $y = x^2 \ln |x| + Cx^2$

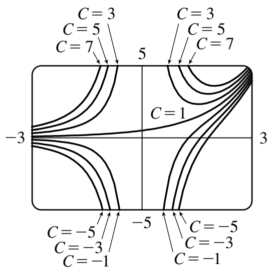
7. $y = x - 1 + Ce^{-x}$ **9.** $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C/x$

11. $y = \dfrac{\int \text{sen}(x^2)\,dx + C}{\text{sen}\,x}$ **13.** $u = \dfrac{t^2 + 2t + 2C}{2(t + 1)}$

15. $y = \dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}$ **17.** $u = -t^2 + t^3$

19. $y = -x \cos x - x$

21. $y = \dfrac{(x - 1)e^x + C}{x^2}$

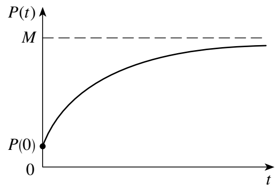


25. $y = \pm\left(Cx^4 + \dfrac{2}{5x}\right)^{-1/2}$

27. (a) $I(t) = 4 - 4e^{-5t}$ (b) $4 - 4e^{-1/2} \approx 1{,}57$ A

29. $Q(t) = 3(1 - e^{-4t})$, $I(t) = 12e^{-4t}$

31. $P(t) = M + Ce^{-kt}$



33. $y = \frac{2}{5}(100 + 2t) - 40\,000(100 + 2t)^{-3/2}$; 0,2275 kg/L

35. (b) mg/c (c) $(mg/c)[t + (m/c)e^{-ct/m}] - m^2g/c^2$

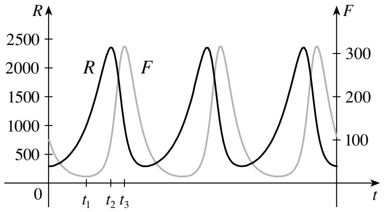
37. (b) $P(t) = \dfrac{1}{1 + MCe^{-kt}}$

EXERCÍCIOS 9.6

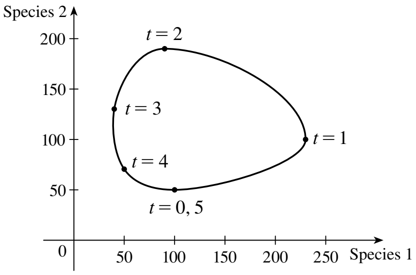
1. (a) x = predadores, y = presas; o crescimento é restrito somente aos predadores, que se alimentam somente de sua presa.
(b) x = presas, y = predadores; o crescimento é restrito pela capacidade de suporte e pelos predadores, que se alimentam apenas da presa.

3. (a) Competição
(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: zero populações
(ii) $x = 0$, $y = 400$: Na ausência de uma população x, a população y estabiliza em 400.
(iii) $x = 125$, $y = 0$: Na ausência de uma população y, a população x estabiliza em 125.
(iv) $x = 50$, $y = 300$: Ambas as populações são estáveis.

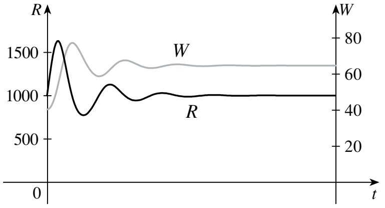
5. (a) A população de coelhos começa em cerca de 300, aumenta até 2 400, e então decresce de novo para 300. A população de raposas começa em 100, decresce para cerca de 20, aumenta para cerca de 315, decresce para 100, e o ciclo começa novamente.
(b)



7.



11. (a) As populações estabilizam em 5.000.
(b) (i) $W = 0$, $R = 0$: Zero populações
(ii) $W = 0$, $R = 5.000$: Na ausência de lobos, a população de coelhos é sempre de 5 000.
(iii) $W = 64$, $R = 1\,000$: Ambas as populações são estáveis.
(c) As populações estabilizam em 1 000 coelhos e 64 lobos.
(d)



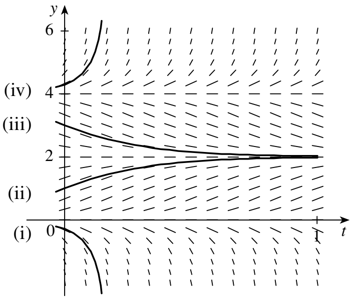
CAPÍTULO 9 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro

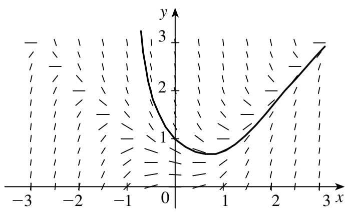
Exercícios

1. (a)



(b) $0 \leqslant c \leqslant 4$; $y = 0$, $y = 2$, $y = 4$

3. (a)



$y\,(0{,}3) \approx 0{,}8$

(b) 0,75676

(c) $y = x$ e $y = -x$; há um max loc ou min loc

5. $y = (\frac{1}{2}x^2 + C)e^{-\text{sen}\, x}$

7. $y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$

9. $r(t) = 5e^{t-t^2}$ **11.** $y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x$ **13.** $x = C - \frac{1}{2}y^2$

15. (a) $P(t) = \dfrac{2\,000}{1 + 19e^{-0,1t}}$; ≈ 560 (b) $t = -10 \ln \frac{2}{57} \approx 33{,}5$

17. (a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ (b) $L(t) = 53 - 43e^{-0,2t}$

19. 15 dias **21.** $k \ln h + h = (-R/V)t + C$

23. (a) Estabiliza em 200.000

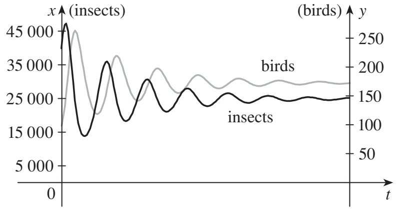
(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: Zero populações

(ii) $x = 200\,000$, $y = 0$: Na ausência de pássaros, a população de insetos é sempre 200 000.

(iii) $x = 25\,000$, $y = 175$: Ambas as populações são estáveis.

(c) As populações se estabilizam em 25 000 insetos e 175 pássaros.

(d)



25. (a) $y = (1/k)\cosh kx + a - 1/k$ ou

$y = (1/k)\cosh kx - (1/k)\cosh kb + h$ (b) $(2/k)$ senh kb

PROBLEMAS QUENTES

1. $f(x) = \pm 10e^x$ **5.** $y = x^{1/n}$ **7.** 20 ºC

9. (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - L^2}{4L} - \frac{1}{2}L \ln\left(\dfrac{x}{L}\right)$ (c) Não

11. (a) 9,5 h (b) $2\,700\pi \approx 8\,482$ m²; 471 m²/h (c) 5,5 h

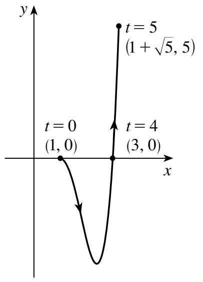
13. $x^2 + (y - 6)^2 = 25$

15. $y = K/x$, $K \neq 0$

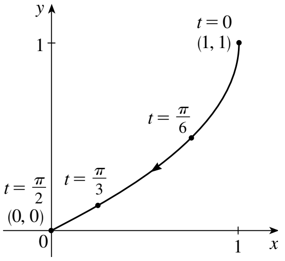
CAPÍTULO 10

EXERCÍCIOS 10.1

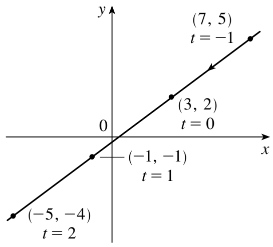
1.



3.

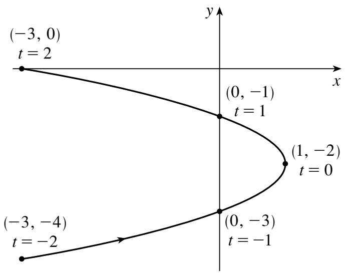


5. (a)



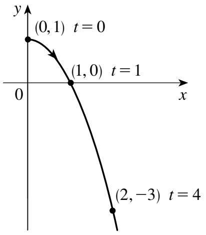
(b) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

7. (a)



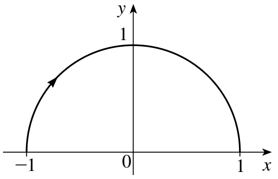
(b) $x = -(y + 2)^2 + 1$, $-4 \leqslant y \leqslant 0$

9. (a)

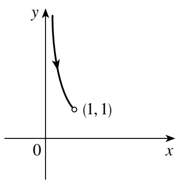


(b) $y = 1 - x^2$, $x \geqslant 0$

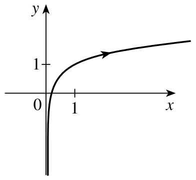
11. (a) $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$ (b)



13. (a) $y = 1/x$, $y > 1$ (b)

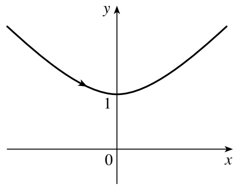


15. (a) $y = \frac{1}{2}\ln x + 1$ (b)



17. (a) $y^2 - x^2 = 1$, $y \geqslant 1$

(b)

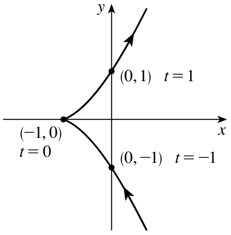


19. Move-se em sentido anti-horário ao longo do círculo $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ de (3, 3) para (3, −1)

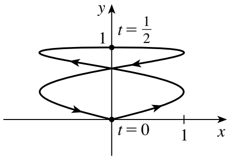
21. Move-se 3 vezes em sentido horário em torno da elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, começando e terminando em (0, −2)

23. Está contida no retângulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ e $2 \leqslant y \leqslant 3$.

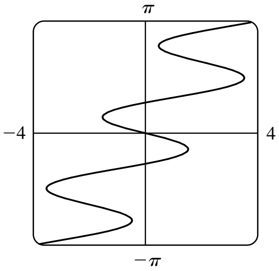
25.



27.



29.



31. (b) $x = -2 + 5t$, $y = 7 - 8t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

33. (a) $x = 2\cos t$, $y = 1 - 2\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

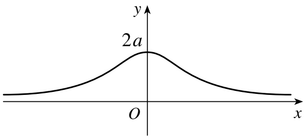
(b) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

(c) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\,\text{sen}\,t$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

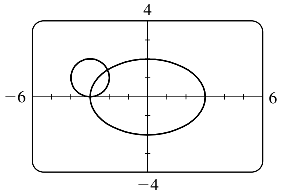
37. A curva $y = x^{2/3}$ é gerada em (a). Em (b), somente a porção com $x \geqslant 0$ é gerada, e em (c) obtemos somente a porção com $x > 0$.

41. $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

43.



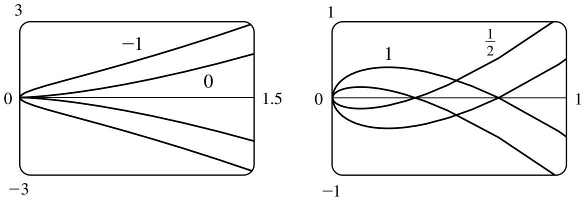
45. (a) Dois pontos de intersecção



(b) Um ponto de colisão em $(-3, 0)$ quando $t = 3\pi/2$

(c) Ainda existem dois pontos de intersecção, mas nenhum ponto de colisão.

47. Para $c = 0$, existe uma cúspide; para $c > 0$, existe uma volta cujo tamanho aumenta à medida que c aumenta.



49. As curvas seguem aproximadamente a reta $y = x$, e elas começam tendo voltas quando a a, está entre 1,4 e 1,6 (mais precisamente quando $a > \sqrt{2}$). As voltas aumentam de tamanho à medida que a cresce.

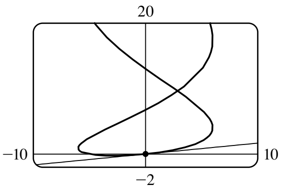
51. À medida que n aumenta, o número de oscilações aumenta; a e b determinam o peso e a altura.

EXERCÍCIOS 10.2

1. $\dfrac{2t + 1}{t\cos t + \text{sen } t}$ **3.** $y = -x$ **5.** $y = \pi x + \pi^2$

7. $y = 2x + 1$

9. $y = \frac{1}{6}x$



11. $\dfrac{2t + 1}{2t}, \dfrac{1}{4t^3}, t < 0$ **13.** $e^{-2t}(1 - t)$, $\text{e}^{-3t}(2t - 3)$, $t > \frac{3}{2}$

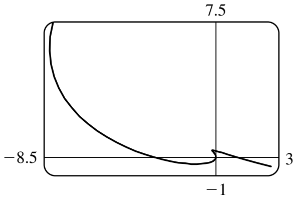
15. $-\frac{3}{2}\,\text{tg}\,t$, $-\frac{3}{4}\sec^3 t$, $\pi/2 < t < 3\pi/2$

17. Horizontal em $(0, -3)$, vertical em $(\pm 2, -2)$

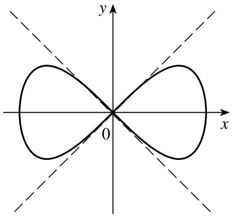
19. Horizontal em $(\frac{1}{2}, -1)$ e $(-\frac{1}{2}, 1)$, sem vertical

21. $(0{,}6, 2)$; $(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}})$

23.



25. $y = x$, $y = -x$



27. (a) $d\,\text{sen}\,\theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $(\frac{16}{27}, \frac{29}{9})$, $(-2, -4)$

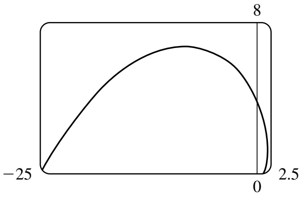
31. πab **33.** $3 - e$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$

37. $\int_0^2 \sqrt{2 + 2e^{-2t}}\,dt \approx 3{,}1416$

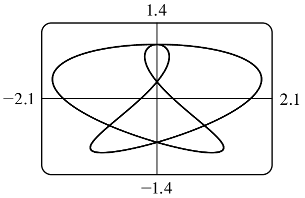
39. $\int_0^{4\pi} \sqrt{5 - 4\cos t}\,dt \approx 26{,}7298$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

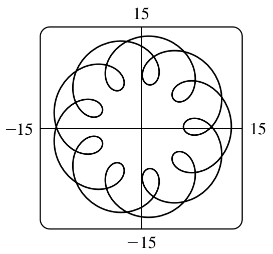


47. 16,7102



49. 612,3053 **51.** $6\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$

55. (a)



$t \in [0, 4\pi]$

(b) 294

57. $\int_0^{\pi/2} 2\pi t \cos t \sqrt{t^2+1}\, dt \approx 4{,}7394$

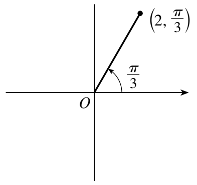
59. $\int_0^1 2\pi(t^2+1)e^t \sqrt{e^{2t}(t+1)^2(t^2+2t+2)}\, dt \approx 103{,}5999$

61. $\frac{2}{1215}\pi(247\sqrt{13}+64)$ **63.** $\frac{6}{5}\pi a^2$

65. $\frac{24}{5}\pi(949\sqrt{26}+1)$ **71.** $\frac{1}{4}$

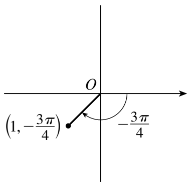
EXERCÍCIOS 10.3

1. (a)


$\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$
$\frac{\pi}{3}$
O

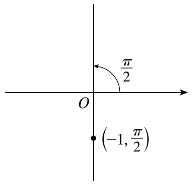
$(2, 7\pi/3)$, $(-2, 4\pi/3)$

(b)


O
$\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$
$-\frac{3\pi}{4}$

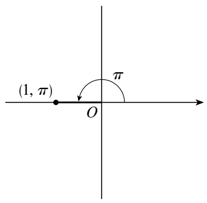
$(1, 5\pi/4)$, $(-1, \pi/4)$

(c)


$\frac{\pi}{2}$
O
$\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

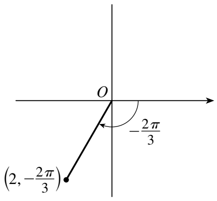
$(1, 3\pi/2)$, $(-1, 5\pi/2)$

3. (a)



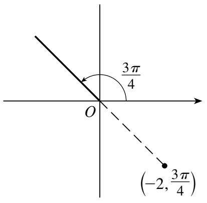
$(-1, 0)$

(b)


O
$-\frac{2\pi}{3}$
$\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$

$(-1, \sqrt{3})$

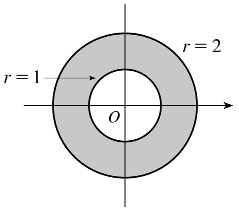
(c)


$\frac{3\pi}{4}$
O
$\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$

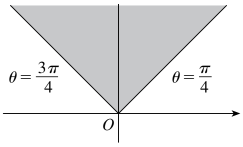
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. (a) (i) $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ (ii) $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$
(b) (i) $(2, 2\pi/3)$ (ii) $(-2, 5\pi/3)$

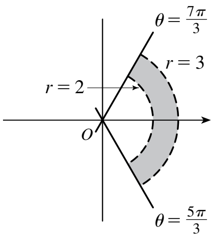
7.



9.


$\theta = \frac{3\pi}{4}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$
O

11.


$\theta = \frac{7\pi}{3}$
$r=3$
$r=2$
O
$\theta = \frac{5\pi}{3}$

13. $2\sqrt{3}$ **15.** Círculo, centro O, raio 2

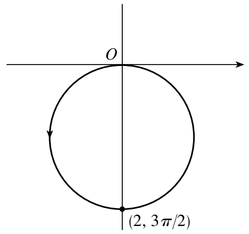
17. Círculo, centro (1, 0), raio 1

19. Hipérbole, centro O, focos no eixo x

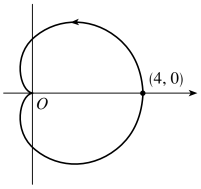
21. $r = 2 \operatorname{cossec} \theta$ **23.** $r = 1/(\operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta)$

25. $r = 2c \operatorname{cossec} \theta$ **27.** (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

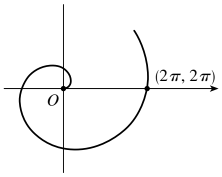
29.



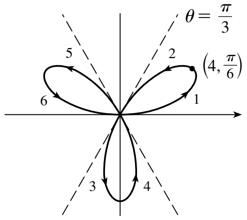
31.



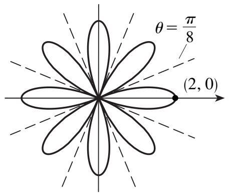
23.



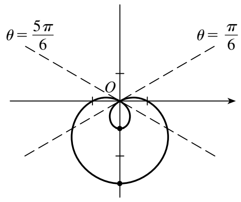
35.



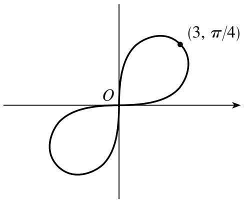
37.



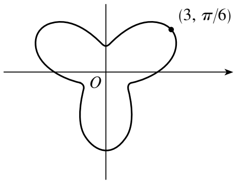
39.



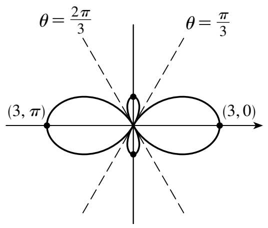
41.



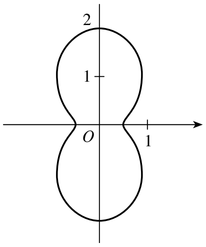
43.



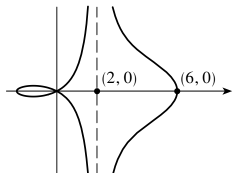
45.



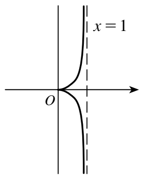
47.



49.



51.



53. (a) Para $c < -1$, a volta interna começa em $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, começa em $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$.

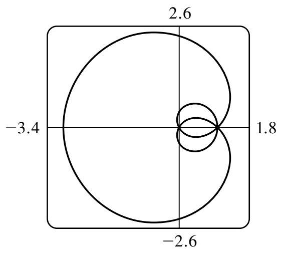
55. $\sqrt{3}$ **57.** $-\pi$ **59.** 1

61. Horizontal em $(3/\sqrt{2}, \pi/4), (-3/\sqrt{2}, 3\pi/4)$; vertical em $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$

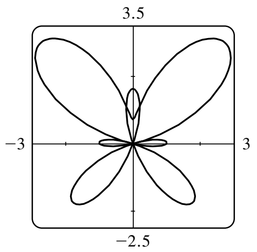
63. Horizontal em $\left(\tfrac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [o polo], e $\left(\tfrac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical em $(2, 0)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 4\pi/3\right)$

65. Centro $(b/2, a/2)$, raio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

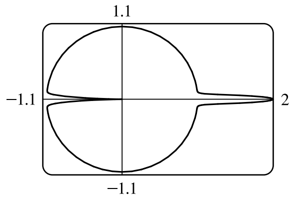
67.



69.



71.



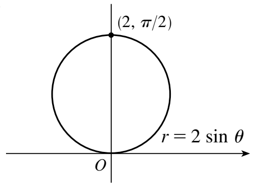
73. Pela rotação em sentido anti-horário pelo ângulo $\pi/6$, $\pi/3$ ou α em torno da origem

75. Para $c = 0$, a curva é um círculo. À medida que c cresce, o lado esquerdo fica mais achatado, então tem uma "covinha" $0{,}5 < c < 1$, uma cúspide para $c = 1$, e uma volta para $c > 1$.

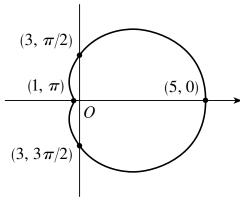
EXERCÍCIOS 10.4

1. $\pi^5/10\,240$ **3.** $\tfrac{9}{2}$ **5.** π^2 **7.** $\tfrac{41}{4}\pi$

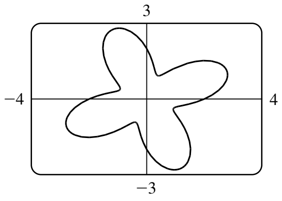
9. π



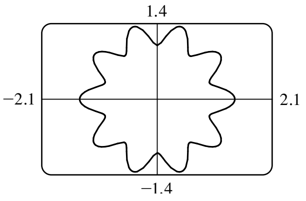
11. 11π



13. $\tfrac{9}{2}\pi$



15. $\tfrac{3}{2}\pi$



17. $\tfrac{4}{3}\pi$ **19.** $\tfrac{1}{16}\pi$ **21.** $\pi - \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

25. $4\sqrt{3} - \tfrac{4}{3}\pi$ **27.** π **29.** $\tfrac{5}{24}\pi - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$ **31.** $\tfrac{1}{2}\pi - 1$

33. $1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ **35.** $\tfrac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

37. $\left(\tfrac{3}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\tfrac{3}{2}, 5\pi/6\right)$ e o polo

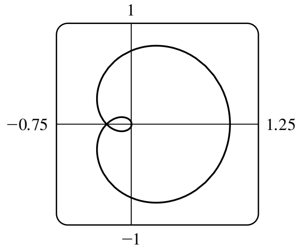
39. $(1, \theta)$ onde $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$ e $(-1, \theta)$ onde $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$

41. $\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 2\pi/3\right)$ e o polo

43. Intersecção em $\theta \approx 0{,}89$, $2{,}25$; área $\approx 3{,}46$

45. 2π **47.** $\tfrac{8}{3}\left[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1\right]$

49. $\tfrac{16}{3}$

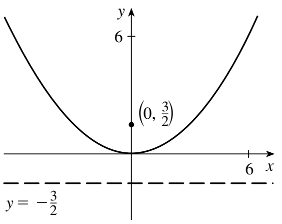


51. 2,4221 **53.** 8,0091

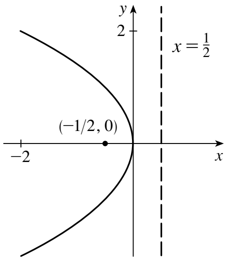
55. (b) $2\pi(2 - \sqrt{2})$

EXERCÍCIOS 10.5

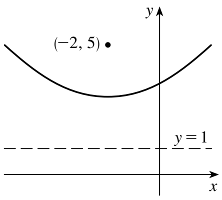
1. $(0, 0)$, $\left(0, \tfrac{3}{2}\right)$, $y = -\tfrac{3}{2}$



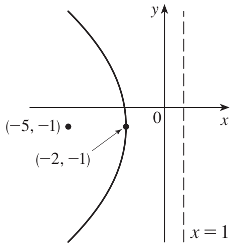
3. $(0, 0)$, $\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)$, $x = \tfrac{1}{2}$



5. $(-2, 3)$, $(-2, 5)$, $y = 1$

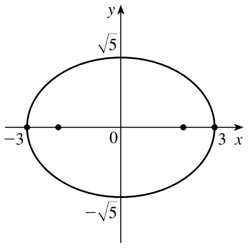


7. $(-2, -1)$, $(-5, -1)$, $x = 1$

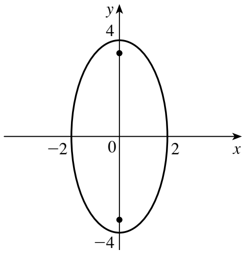


9. $x = -y^2$, foco $\left(-\tfrac{1}{4}, 0\right)$, diretriz $x = \tfrac{1}{4}$

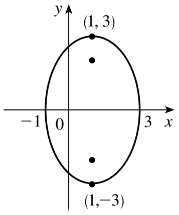
11. $(\pm 3, 0)$, $(\pm 2, 0)$



13. $(0, \pm 4)$, $(\pm 2, \sqrt{3})$

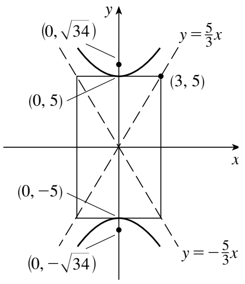


15. $(1, \pm 3)$, $(1, \pm\sqrt{5})$

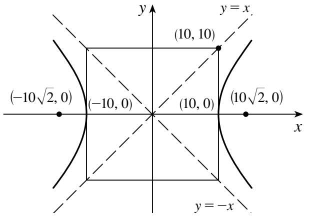


17. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ 1, focos $(0, \pm\sqrt{5})$

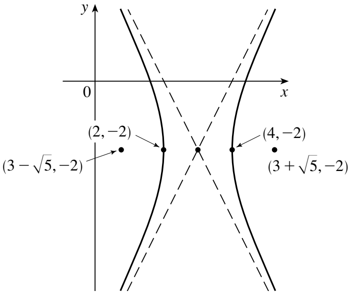
19. $(0, \pm 5)$; $(0, \pm\sqrt{34})$; $y = \pm \frac{5}{3}x$


y
(0, √34)
y = 5/3 x
(3, 5)
(0, 5)
x
(0, −5)
(0, −√34)
y = −5/3 x

21. $(\pm 10, 0)$; $(\pm 10\sqrt{2}, 0)$; $y = \pm x$


y
y = x
(10, 10)
(−10√2, 0)
(−10, 0)
(10, 0)
(10√2, 0)
x
y = −x

23. $(4, -2)$, $(2, -2)$;
$(3 \pm \sqrt{5}, -2)$;
$y + 2 = \pm 2(x - 3)$


y
0
x
(2, −2)
(4, −2)
(3 − √5, −2)
(3 + √5, −2)

25. Parábola, $(0, -1)$, $(0, -\frac{3}{4})$

27. Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1)$, $(\pm 1, 1)$

29. Hipérbole $(0, 1)$, $(0, -3)$; $(0, -1 \pm \sqrt{5})$

31. $y^2 = 4x$ **33.** $y^2 = -12(x + 1)$ **35.** $y - 3 = 2(x - 2)^2$

37. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

41. $\dfrac{(x+1)^2}{12} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$ **43.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

45. $\dfrac{(y-1)^2}{25} - \dfrac{(x+3)^2}{39} = 1$ **47.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

49. $\dfrac{x^2}{3\,763\,600} + \dfrac{y^2}{3\,753\,196} = 1$

51. (a) $\dfrac{121x^2}{1\,500\,625} - \dfrac{121y^2}{3\,339\,375} = 1$ (b) ≈ 248 mi

55. (a) Elipse (b) Hipérbole (c) Sem curva

59. 15,9

61. $\dfrac{b^2c}{a} + ab\ln\left(\dfrac{a}{b+c}\right)$ onde $c^2 = a^2 + b^2$

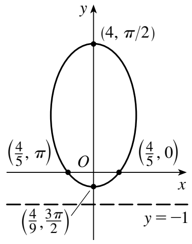
63. $(0, 4/\pi)$

EXERCÍCIOS 10.6

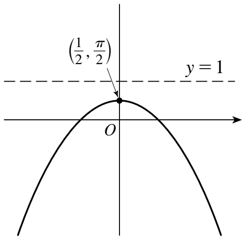
1. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$ **3.** $r = \dfrac{6}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

5. $r = \dfrac{8}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **7.** $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

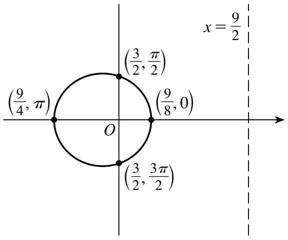
9. (a) $\frac{4}{5}$ (b) Elipse (c) $y = -1$
(d)


y
(4, π/2)
(4/5, π)
O
(4/5, 0)
x
(4/9, 3π/2)
y = −1

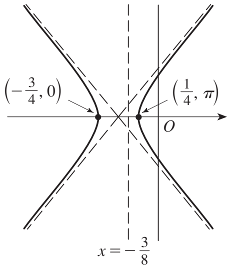
11. (a) 1 (b) Parábola (c) $y = 1$
(d)



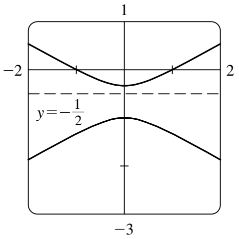
13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) Elipse (c) $x = \frac{9}{2}$
(d)


x = 9/2
(3/2, π/2)
(9/4, π)
(9/8, 0)
O
(3/2, 3π/2)

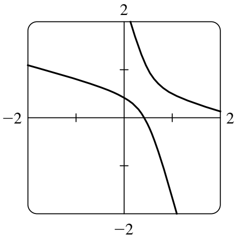
15. (a) 2 (b) Hipérbole (c) $x = -\frac{3}{8}$
(d)


(−3/4, 0)
(1/4, π)
O
x = −3/8

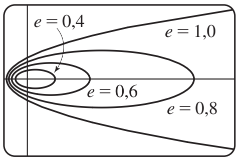
17. (a) 2, $y = -\frac{1}{2}$



(b) $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\text{sen}\,(\theta - 3\pi/4)}$



19. A elipse é quase circular quando e está próximo de 0 e se torna mais alongada conforme $e \to 1^-$. Em $e = 1$, a curva se torna uma parábola.



25. $r = \dfrac{2{,}26 \times 10^8}{1 + 0{,}093 \cos\theta}$

27. 35,64 AU **29.** $7{,}0 \times 10^7$ km **31.** $3{,}6 \times 10^8$ km

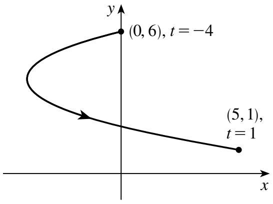
CAPÍTULO 10 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

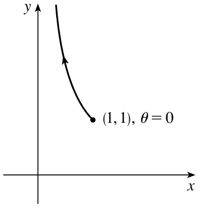
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Falso **9.** Verdadeiro

Exercícios

1. $x = y^2 - 8y + 12$

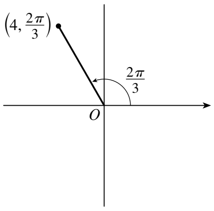


3. $y = 1/x$



5. $x = t,\ y = \sqrt{t};\ x = t^4,\ y = t^2;$
$x = \text{tg}^2 t,\ y = \text{tg}\, t,\ 0 \leqslant t < \pi/2$

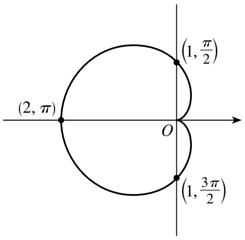
7. (a)



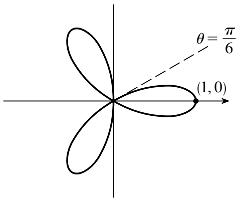
(b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$,
$(-3\sqrt{2}, 7\pi/4)$

$(-2, 2\sqrt{3})$

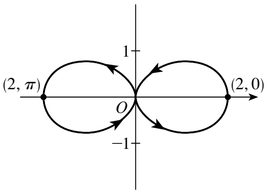
9.



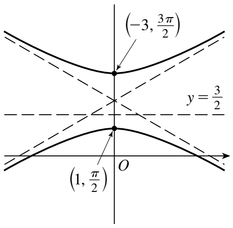
11.



13.

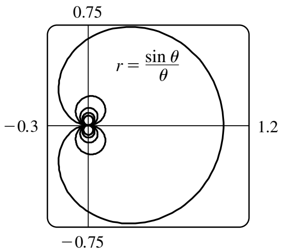


15.



17. $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta}$

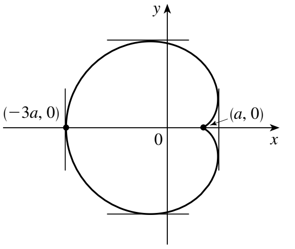
19.



21. 2 **23.** -1

25. $\dfrac{1 + \text{sen}\, t}{1 + \cos t},\ \dfrac{1 + \cos t + \text{sen}\, t}{(1 + \cos t)^3}$ **27.** $\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}\right)$

29. Tangente vertical em $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right), (-3a, 0)$; tangente horizontal em $(a, 0), \left(-\frac{1}{2}a, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a\right)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

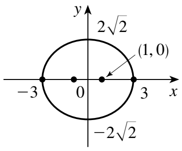
37. $2(5\sqrt{5} - 1)$

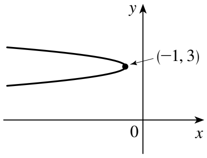
39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - \sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}}\right)$

41. $471{,}295\pi/1{,}024$

43. Todas as curvas têm a assíntota vertical $x = 1$. Para $c < -1$, a curva é arqueada para a direita. Em $c = -1$, a curva é a reta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, é arqueada para a esquerda. Em $c = 0$ há uma cúspide em $(0, 0)$. Para $c > 0$, há uma volta.

45. $(\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$ **47.** $\left(-\frac{25}{24}, 3\right), (-1, 3)$

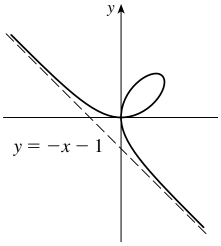




49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y - 399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos\theta}$

57. (a) Em $(0, 0)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
(b) Tangentes horizontais em $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$; tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$
(d)



(g) $\frac{3}{2}$

PROBLEMAS QUENTES

1. In$(\pi/2)$ **3.** $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

CAPÍTULO 11

EXERCÍCIOS 11.1

Abreviações: C, convergente; D, divergente

1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números. Ela também pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.
(b) Os termos a_n tendem a 8 quando n se torna grande.
(c) Os termos a_n se tornam grandes quando n se torna grande.

3. $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$ **5.** $\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \frac{1}{3125}$ **7.** $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$

9. 1, 2, 7, 32, 157 **11.** $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9},$ **13.** $a_n = 1/(2n - 1)$

15. $a_n = -3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **17.** $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n+1}$

19. 0,4286, 0,4615, 0,4737, 0,4800, 0,4839, 0,4865, 0,4884, 0,4898, 0,4909, 0,4918; Sim; $\frac{1}{2}$

21. 0,5000, 1,2500, 0,8750, 1,0625, 0,9688, 1,0156, 0,9922, 1,0039, 0,9980, 1,0010; Sim; 1

23. 1 **25.** 5 **27.** 1 **29.** 1 **31.** D **33.** 0

35. D **37.** 0 **39.** 0 **41.** 0 **43.** 0 **45.** 1

47. e^2 **49.** ln 2 **51.** $\pi/2$ **53.** D **55.** D

57. 1 **59.** $\frac{1}{2}$ **61.** D **63.** 0

65. (a) 1060, 1123,60, 1191,02, 1262,48, 1338,23 (b) D

67. (a) $P_n = 1{,}08P_{n-1} - 300$ (b) 5734

69. $-1 < r < 1$

71. Convergente pelo Teorema da Sequência Monótona; $5 \leqslant L < 8$

73. Decrescente; sim **75.** Não monótona; não

77. Decrescente; sim

79. 2 **81.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ **83.** (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

85. (a) 0 (b) 9, 11

EXERCÍCIOS 11.2

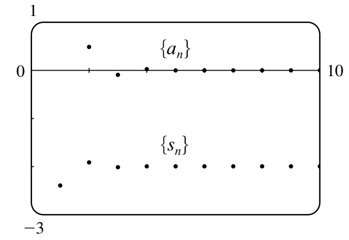
1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números enquanto uma série é a soma de uma lista de números.
(b) Uma série é convergente se a sequência das somas parciais for uma sequência convergente. A série é divergente se ela não for convergente.

3. 2

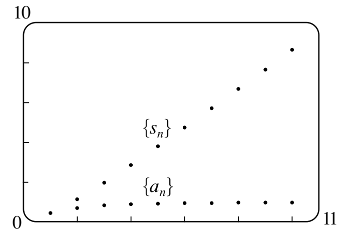
5. 1, 1,125, 1,1620, 1,1777, 1,1857, 1,1903, 1,1932, 1,1952; C

7. 0,5, 1,3284, 2,4265, 3,7598, 5,3049, 7,0443, 8,9644, 11,0540; D

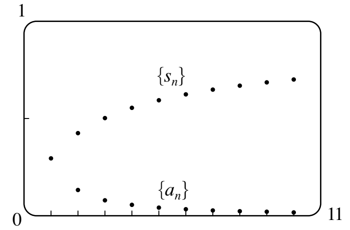
9. −2,40000, −1,92000, −2,01600, −1,99680, −2,00064, −1,99987, −2,00003, −1,99999, −2,00000, −2,00000; convergente, soma = −2



11. 0,44721, 1,15432, 1,98637, 2,88080, 3,80927, 4,75796, 5,71948, 6,68962, 7,66581, 8,64639; divergente



13. 0,29289, 0,42265, 0,50000, 0,55279, 0,59175, 0,62204, 0,64645, 0,66667, 0,68377, 0,69849; convergente, soma = 1



15. (a) C (b) D **17.** D **19.** $\frac{25}{3}$ **21.** 60 **23.** $\frac{1}{7}$

25. D **27.** D **29.** D **31.** $\frac{5}{2}$ **33.** D **35.** D

37. D **39.** D **41.** $e/(e-1)$ **43.** $\frac{3}{2}$ **45.** $\frac{11}{6}$ **47.** $e - 1$

49. (b) 1 (c) 2 (d) Todos os números racionais com uma representação decimal terminante, exceto 0.

51. $\frac{8}{9}$ **53.** $\frac{838}{333}$ **55.** 5063/3300

57. $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$; $\dfrac{-5x}{1+5x}$ **59.** $-1 < x < 5$; $\dfrac{3}{5-x}$

61. $x > 2$ ou $x < -2$; $\dfrac{x}{x-2}$ **63.** $x < 0$; $\dfrac{1}{1-e^x}$

65. 1 **67.** $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ para $n > 1$, soma = 1

69. (a) 157,875 mg; $\frac{3000}{19}(1 - 0{,}05^n)$ (b) 157,895 mg

71. (a) $S_n = \dfrac{D(1-c^n)}{1-c}$ (b) 5 **73.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$

77. $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **79.** A série é divergente.

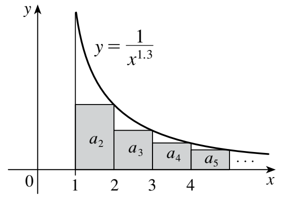
85. $\{s_n\}$ está ligada e é crescente.

87. (a) 0, $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$, 1

89. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$ (c) 1

EXERCÍCIOS 11.3

1. C



3. D **5.** C **7.** D **9.** D **11.** C **13.** D

15. C **17.** C **19.** C **21.** D **23.** C **25.** C

27. f não é positivo nem decrescente.

29. $p > 1$ **31.** $p < -1$ **33.** $(1, \infty)$

35. (a) $\frac{9}{10}\pi^4$ (b) $\frac{1}{90}\pi^4 - \frac{17}{16}$

37. (a) 1,54977, erro $\leqslant$ 0,1 (b) 1,64522, erro $\leqslant$ 0,005 (c) 1,64522 comparado com 1,64493 (d) $n > 1\,000$

39. 0,00145 **45.** $b < 1/e$

EXERCÍCIOS 11.4

1. (a) Nada (b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** D

11. C **13.** C **15.** D **17.** D **19.** D **21.** C

23. C **25.** D **27.** C **29.** C **31.** D

33. 1,249, erro < 0,1 **35.** 0,0739, erro $< 6{,}4 \times 10^{-8}$

45. Sim

EXERCÍCIOS 11.5

1. (a) Uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos (b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, onde $b_n = |a_n|$ (c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$

3. C **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** D **15.** C

17. C **19.** D **21.** −0,5507 **23.** 5 **25.** 4

27. −0,4597 **29.** 0,0676 **31.** Uma subestimativa

33. p não é um inteiro negativo **35.** $\{b_n\}$ não é decrescente

EXERCÍCIOS 11.6

Abreviações: AC, absolutamente convergente; CC, condicionalmente convergente

1. (a) D (b) C (c) Pode convergir ou divergir

3. AC **5.** CC **7.** AC **9.** D **11.** AC **13.** AC

15. AC **17.** CC **19.** AC **21.** AC **23.** D **25.** AC

27. AC **29.** D **31.** D **33.** AC

35. (a) e (d)

39. (a) $\frac{661}{960} \approx 0{,}68854$, erro $< 0{,}00521$
(b) $n \geqslant 11$, 0,693109

45. (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

EXERCÍCIOS 11.7

1. C **3.** D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C

13. C **15.** C **17.** C **19.** C **21.** D **23.** D

25. C **27.** C **29.** C **31.** D

33. C **35.** D **37.** C

EXERCÍCIOS 11.8

1. Uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$, onde x é uma variável e a e c_n são constantes

3. $1, (-1, 1)$ **5.** $1, [-1, 1)$

7. $\infty, (-\infty, \infty)$ **9.** $2, (-2, 2)$ **11.** $\frac{1}{3}, [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

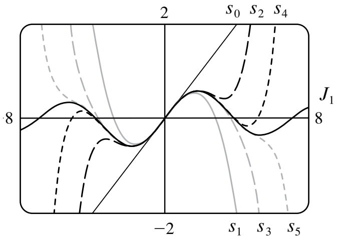
13. $4, (-4, 4]$ **15.** $1, [1, 3]$ **17.** $\frac{1}{3}, [-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}]$

19. $\infty, (-\infty, \infty)$ **21.** $b, (a - b, a + b)$ **23.** $0, \{\frac{1}{2}\}$

25. $\frac{1}{5}, \left[\frac{3}{5}, 1\right]$ **27.** $\infty, (-\infty, \infty)$ **29.** (a) Sim (b) Não

31. k^k **33.** Não

35. (a) $(-\infty, \infty)$
(b), (c)



37. $(-1, 1), f(x) = (1 + 2x)/(1 - x^2)$ **41.** 2

EXERCÍCIOS 11.9

1. 10 **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, (-1, 1)$ **5.** $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n, (-3, 3)$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}, (-3, 3)$ **9.** $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n, (-1, 1)$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n, (-1, 1)$

13. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) x^n, R = 1$

(b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 2)(n + 1) x^n, R = 1$

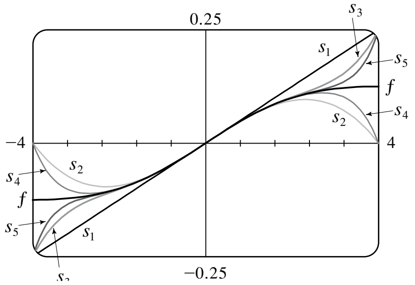
(c) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n - 1) x^n, R = 1$

15. $\displaystyle \ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}, R = 5$

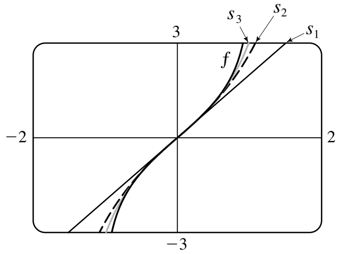
17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n (n + 1) x^{n+1}, R = \frac{1}{4}$

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n - 2}{2^{n-1}} x^n, R = 2$

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{16^{n+1}} x^{2n+1}, R = 4$



23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n + 1}, R = 1$



25. $\displaystyle C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n + 2}, R = 1$

27. $\displaystyle C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n(n + 3)}, R = 1$

29. 0,199989 **31.** 0,000983 **33.** 0,19740

35. (b) 0,920 **39.** $[-1, 1], [-1, 1), (-1, 1)$

EXERCÍCIOS 11.10

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) x^n, R = 1$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) x^n, R = 1$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, R = \infty$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n, R = \infty$ **11.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}, R = \infty$

13. $-1 - 2(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 + (x - 1)^4, R = \infty$

15. $\displaystyle \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\,2^n} (x - 2)^n, R = 2$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6}{n!} (x - 3)^n, R = \infty$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}, R = \infty$

25. $\displaystyle 1 - \frac{1}{4} x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{4^n \cdot n!} x^n, R = 1$

27. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n + 1)(n + 2)}{2^{n+4}} x^n, R = 2$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, R = \infty$

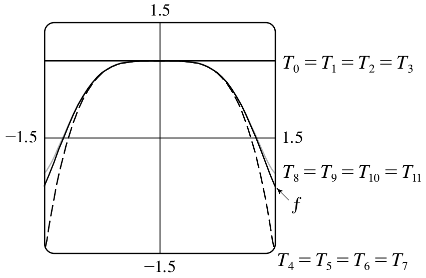
31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n, R = \infty$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n)!} x^{4n+1}$, $R = \infty$

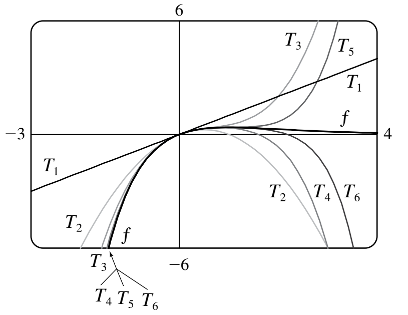
35. $\frac{1}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n! 2^{3n+1}} x^{2n+1}$, $R = 2$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, $R = \infty$



41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$, $R = \infty$



43. 0,99619

45. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

47. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, $R = \infty$

49. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

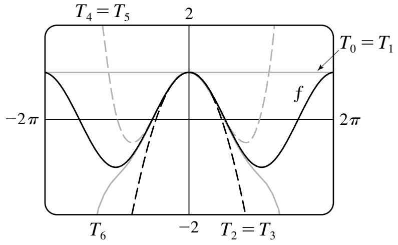
51. 0,0059 **53.** 0,40102 **55.** $\frac{1}{2}$ **57.** $\frac{1}{120}$

59. $1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4$ **61.** $1 + \frac{1}{6} x^2 + \frac{7}{360} x^4$ **63.** e^{-x^4}

65. $\ln \frac{8}{5}$ **67.** $1/\sqrt{2}$ **69.** $e^3 - 1$

EXERCÍCIOS 11.11

1. (a) $T_0(x) = 1 = T_1(x)$, $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$

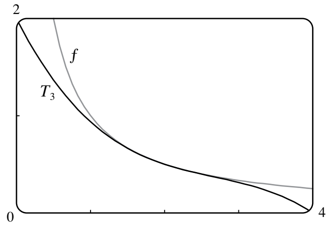


(b)

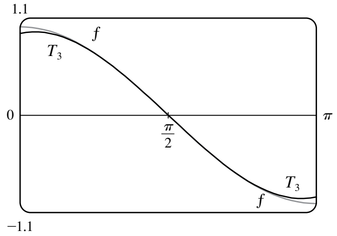
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0,7071	1	0,6916	0,7074	0,7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0,2337	0,0200	−0,0009
π	−1	1	−3,9348	0,1239	−1,2114

(c) À medida que n cresce, $T_n(x)$ é uma boa aproximação para $f(x)$ em um intervalo cada vez maior.

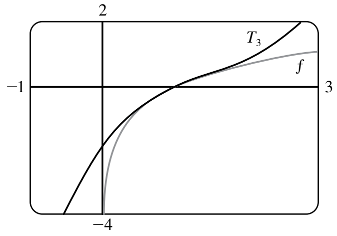
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$



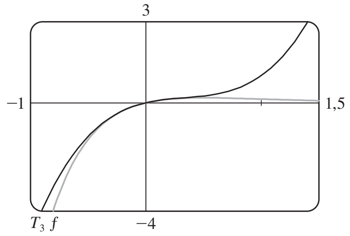
5. $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$



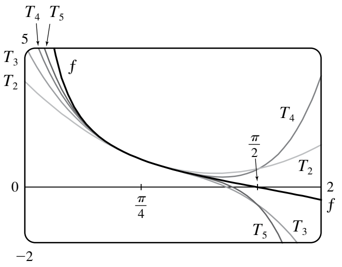
7. $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$



9. $x - 2x^2 + 2x^3$



11. $T_5(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{64}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$



13. (a) $2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2$ (b) $1{,}5625 \times 10^{-5}$

15. (a) $1 + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{1}{9}(x - 1)^2 + \frac{4}{81}(x - 1)^3$ (b) 0,000097

17. (a) $1 + \frac{1}{2}x^2$ (b) 0,0014

19. (a) $1 + x^2$ (b) 0,00006 **21.** (a) $x^2 - \frac{1}{6}x^4$ (b) 0,042

23. 0,17365 **25.** Quatro **27.** $-1{,}037 < x < 1{,}037$

29. $-0{,}86 < x < 0{,}86$ **31.** 21 m, não

37. (c) Eles diferem em cerca de 8×10^{-9} km.

CAPÍTULO 11 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Falso **9.** Falso
11. Verdadeiro **13.** Verdadeiro **15.** Falso **17.** Verdadeiro
9. Verdadeiro **21.** Verdadeiro

Exercícios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C **13.** C
15. D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC **25.** AC
27. $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0,9721
37. 0,18976224, erro $< 6{,}4 \times 10^{-7}$
41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0,5, $[2{,}5, 3{,}5)$

45. $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n + 1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} \right]$

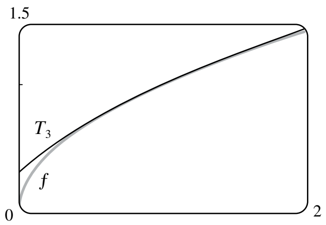
47. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$, $R = 1$ **49.** $\displaystyle \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n4^n}$, $R = 4$

51. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n + 1)!}$, $R = \infty$

53. $\displaystyle \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{n!2^{6n+1}} x^n$, $R = 16$

55. $\displaystyle C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$

57. (a) $1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(x - 1)^3$
(b) (c) 0,000006



59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS QUENTES

1. $15!/5! = 10\,897\,286\,400$

3. (b) 0 se $x = 0$, $(1/x) - \operatorname{cotg} x$ se $x \neq k\pi$, k inteiro

5. (a) $s_n = 3 \cdot 4^n$, $l_n = 1/3^n$, $p_n = 4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

9. $(-1, 1)$, $\dfrac{x^3 + 4x^2 + x}{(1 - x)^4}$

11. $\ln \frac{1}{2}$ **13.** (a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)\pi/5} - e^{-n\pi/5})$ (b) $\frac{250}{101}\pi$

19. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$

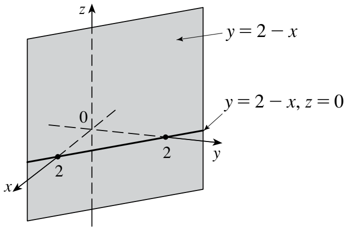
21. $-\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi k\right)^2$ onde k é um inteiro positivo

CAPÍTULO 12

EXERCÍCIOS 12.1

1. $(4, 0, -3)$ **3.** C; A

5. Um plano vertical que intercepta o plano xy na reta $y = 2 - x$, $z = 0$



7. (a) $|PQ| = 6$, $|QR| = 2\sqrt{10}$, $|RP| = 6$; triângulo isósceles

9. (a) Não (b) Sim

11. $(x - 1)^2 + (y + 4)^4 + (z - 3)^2 = 25$;
$(x - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$, $y = 0$ (um círculo)

13. $(x - 3)^2\ (y - 8)^2 + (z - 1)^2 = 30$

15. $(1, 2, -4)$, 6 **17.** $(2, 0, -6)$, $9/\sqrt{2}$

19. (b) $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{94}$, $\frac{1}{2}\sqrt{85}$

21. (a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 36$
(b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 4$
(c) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 9$

23. Um plano paralelo ao plano yz e 5 unidades à esquerda dele

25. Um semiespaço consistindo em todos os pontos à frente do plano $y = 8$

27. Todos os pontos sobre ou entre os planos horizontais $z = 0$ e $z = 6$

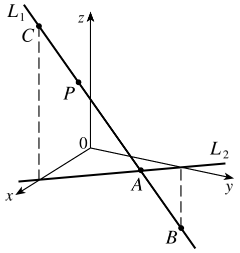
29. Todos os pontos em um círculo com raio 2 com centro no eixo z, isto é, contido no plano $z = -1$

31. Todos os pontos em ou dentro de uma esfera com raio $\sqrt{3}$ e centro O

33. Todos os pontos em ou dentro de um cilindro circular de raio 3 com eixos no eixo y

35. $0 < x < 5$ **37.** $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

39. (a) $(2, 1, 4)$ (b)



41. $14x - 6y - 10z = 9$, um plano perpendicular a AB

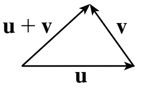
43. $2\sqrt{3} - 3$

EXERCÍCIOS 12.2

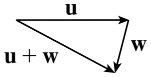
1. (a) Escalar (b) Vetorial (c) Vetorial (d) Escalar

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$

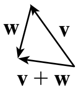
5. (a)



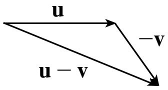
(b)



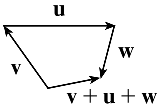
(c)



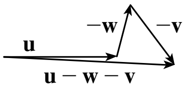
(d)



(e)

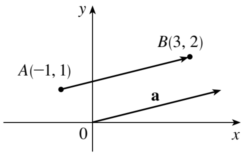


(f)

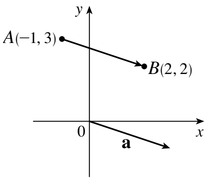


7. $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$

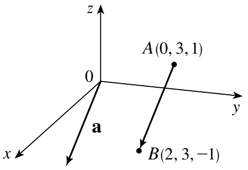
9. $\mathbf{a} = \langle 4, 1 \rangle$



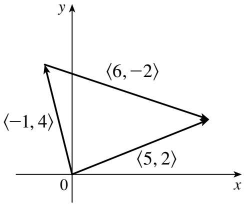
11. $\mathbf{a} = \langle 3, -1 \rangle$



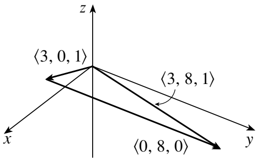
13. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2 \rangle$



15. $\mathbf{a} = \langle 5, 2 \rangle$



17. $\langle 3, 8, 1 \rangle$



19. $\langle 2, -18 \rangle$, $\langle 1, -42 \rangle$, 13, 10

21. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{82}$

23. $-\dfrac{3}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \dfrac{7}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$ **25.** $\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$ **27.** 60°

29. $\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ **31.** ≈45,96 pés/s, ≈38,57 pés/s

33. $100\sqrt{7} \approx 264{,}6$ N, ≈139,1°

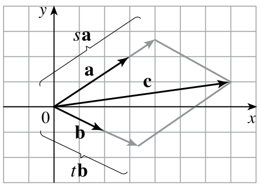
35. $\sqrt{1\,250} \approx 35{,}4$ km/h, N8°W

37. $\mathbf{T}_1 \approx -196\,\mathbf{i} + 3{,}92\,\mathbf{j}$, $\mathbf{T}_2 \approx 196\,\mathbf{i} + 3{,}92\,\mathbf{j}$

39. (a) Em um ângulo de 43,4° do banco, ascendente
(b) 20,2 min

41. $\pm(\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j})/\sqrt{17}$ **43.** $\mathbf{0}$

45. (a), (b)



(d) $s = \frac{9}{7}$, $t = \frac{11}{7}$

47. Uma esfera com raio 1, centralizado em (x_0, y_0, z_0)

EXERCÍCIOS 12.3

1. (b), (c), (d) são significativos **3.** 14 **5.** 19 **7.** 32

9. −15 **11.** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{2}$

15. $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63°$ **17.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{1\,015}}\right) \approx 81°$

19. $\cos^{-1}\left(\dfrac{7}{\sqrt{130}}\right) \approx 52°$ **21.** 48°, 75°, 57°

23. (a) Nenhum (b) Ortogonal
(c) Ortogonal (d) Paralelo

25. Sim **27.** $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$ [ou $(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$]

29. 45° **31.** 0° em (0, 0), 8,1° em (1, 1)

33. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, 48°, 71°, 48°

35. $1/\sqrt{14}$, $-2/\sqrt{14}$, $-3/\sqrt{14}$, 74°, 122°, 143°

37. $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$; 55°, 55°, 55° **39.** 4, $\langle -\frac{20}{13}, \frac{48}{13} \rangle$

41. $\frac{9}{7}$, $\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \rangle$ **43.** $1/\sqrt{21}$, $\frac{2}{21}\,\mathbf{i} - \frac{1}{21}\,\mathbf{j} + \frac{4}{21}\,\mathbf{k}$

47. $\langle 0, 0, -2\sqrt{10}\,\rangle$ ou qualquer vetor da forma $\langle s, t, 3s - 2\sqrt{10}\,\rangle$, $s, t \in \mathbb{R}$

49. 144 J **51.** 560 cos 20° ≈ 526 J

53. $\frac{13}{5}$ **55.** $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

EXERCÍCIOS 12.4

1. $16\,\mathbf{i} + 48\,\mathbf{k}$ **3.** $15\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **5.** $\frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{3}{2}\,\mathbf{k}$

7. $(1 - t)\,\mathbf{i} + (t^3 - t^2)\,\mathbf{k}$ **9.** $\mathbf{0}$ **11.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. (a) Escalar (b) Sem sentido (c) Vetorial
(d) Sem sentido (e) Sem sentido (f) Escalar

15. $96\sqrt{3}$; na página **17.** $\langle -7, 10, 8 \rangle$, $\langle 7, -10, -8 \rangle$

19. $\left\langle -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{3\sqrt{3}} \right\rangle$, $\left\langle \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, -\dfrac{5}{3\sqrt{3}} \right\rangle$

27. 16 **29.** (a) $\langle 0, 18, -9 \rangle$ (b) $\frac{9}{2}\sqrt{5}$

31. (a) $\langle 13, -14, 5 \rangle$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$

33. 82 **35.** 16 **39.** 10,8 sen 80° ≈ 10,6 N · m

41. ≈ 417 N **43.** 60°

45. (b) $\sqrt{97/3}$ **53.** (a) Não (b) Não (c) Sim

EXERCÍCIOS 12.5

1. (a) Verdadeiro (b) Falso (c) Verdadeiro (d) Falso
(e) Falso (f) Verdadeiro (g) Falso (h) Verdadeiro
(i) Verdadeiro (j) Falso (k) Verdadeiro

3. $\mathbf{r} = (2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j} + 3.5\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$;
$x = 2 + 3t$, $y = 2.4 + 2t$, $z = 3.5 - t$

5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$;
$x = 1 + t$, $y = 3t$, $z = 6 + t$

7. $x = 2 + 2t$, $y = 1 + \frac{1}{2}t$, $z = -3 - 4t$;
$(x - 2)/2 = 2y - 2 = (z + 3)/(-4)$

9. $x = -8 + 11t$, $y = 1 - 3t$, $z = 4$; $\dfrac{x+8}{11} = \dfrac{y-1}{-3}$, $z = 4$

11. $x = 1 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 1 + t$; $x - 1 = (y + 1)/2 = z - 1$

13. Sim

15. (a) $(x - 1)/(-1) = (y + 5)/2 = (z - 6)/(-3)$

(b) $(-1, -1, 0)$,$(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2})$, $(0, -3, 3)$

17. $\mathbf{r}(t) = (2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}) + t(2\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19. Desvio **21.** $(4, -1, -5)$ **23.** $-2x + y + 5z = 1$

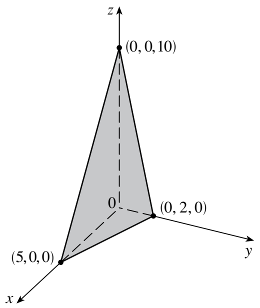
25. $x + 4y + z = 4$ **27.** $5x - y - z = 7$

29. $6x + 6y + 6z = 11$ **31.** $x + y + z = 2$

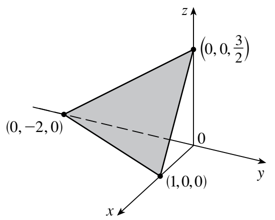
33. $-13x + 17y + 7z = -42$ **35.** $33x + 10y + 4z = 190$

37. $x - 2y + 4z = -1$ **39.** $3x - 8y - z = -38$

41.



43.



45. $(2, 3, 5)$ **47.** $(2, 3, 1)$ **49.** $1, 0, -1$

51. Perpendicular **53.** Nenhum, $\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 70{,}5°$

55. Paralelo

57. (a) $x = 1$, $y = -t$, $z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15{,}8°$

59. $x = 1$, $y - 2 = -z$ **61.** $x + 2y + z = 5$

63. $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$

65. $x = 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 - 2t$

67. P_2 e P_3 são paralelos, P_1 e P_4 são idênticos

69. $\sqrt{61/14}$ **71.** $\frac{18}{7}$ **73.** $5/(2\sqrt{14})$ **77.** $1/\sqrt{6}$

79. $13/(\sqrt{69})$

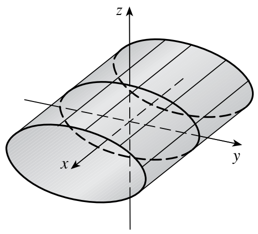
EXERCÍCIOS 12.6

1. (a) Parábola

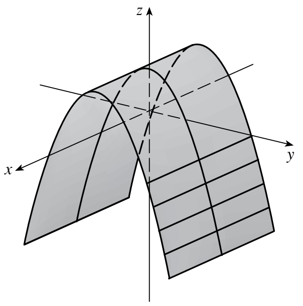
(b) Cilindro parabólico com domínios paralelos ao eixo z

(b) Cilindro parabólico com domínios paralelos ao eixo x

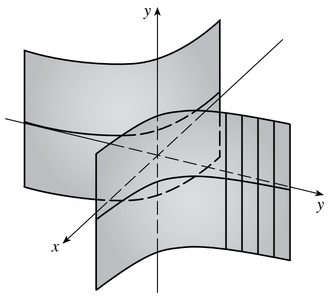
3. Cilindro elíptico



5. Cilindro parabólico



7. Cilindro hiperbólico

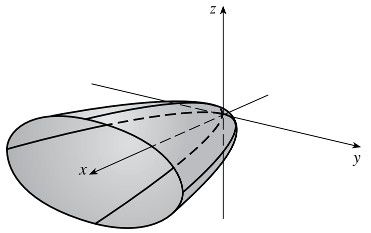


9. (a) $x = k$, $y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole ($k \neq \pm 1$);
$y = k$, $x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole ($k \neq \pm 1$);
$z = k$, $x^2 + y^2 = 1 + k^2$, círculo

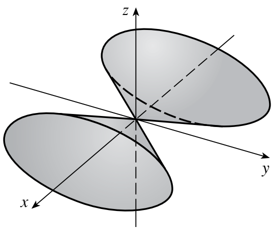
(b) A hiperboloide é rotacionada de modo que tenha o eixo no eixo y

(c) A hiperboloide é deslocada uma unidade na direção negativa y

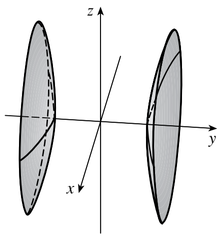
11. Paraboloide elíptica com eixo no eixo x



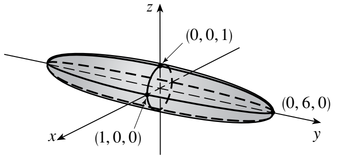
13. Cone elíptico com eixo no eixo x



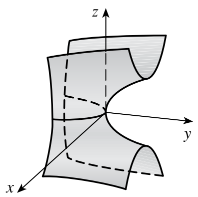
15. Hiperboloide de duas folhas



17. Elipsoide



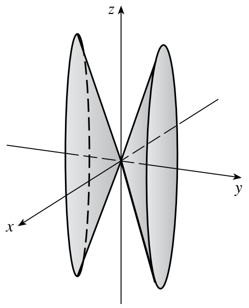
19. Paraboloide hiperbólico



21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

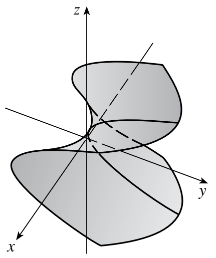
29. $y^2 = x^2 + \frac{z^2}{9}$

Cone elíptico com eixo no eixo y



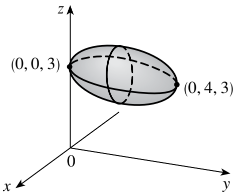
31. $y = z^2 - \frac{x^2}{2}$

Paraboloide hiperbólico

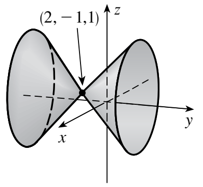


33. $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} + (z-3)^2 = 1$

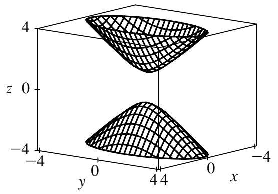
Elipsoide com centro (0, 2, 3)


z
(0, 0, 3)
(0, 4, 3)
0
y
x

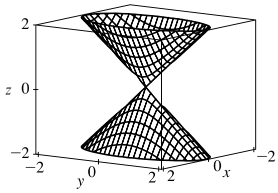
35. $(y+1)^2 = (x-2)^2 + (z-1)^2$
Cone circular com vértice
(2, −1, 1) e eixo paralelos
ao eixo y



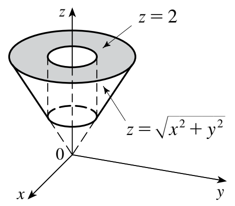
37.


4
z 0
−4
−4
y 0
4 4
0
x
−4

39.


2
z 0
−2
−2
y 0
2 2
0
x
−2

41.

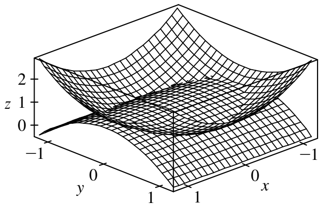

z
z = 2
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
0
x
y

43. $y = x^2 + z^2$ **45.** $-4x = y^2 + z^2$, paraboloide

47. (a) $\frac{x^2}{(6\,378{,}137)^2} + \frac{y^2}{(6\,378{,}137)^2} + \frac{z^2}{(6\,356{,}523)^2} = 1$

(b) Círculo (c) Elipse

51.


2
z 1
0
−1
y 0
1
1
0 x
−1

CAPÍTULO 12 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro **9.** Verdadeiro **11.** Verdadeiro **13.** Verdadeiro **15.** Falso **17.** Falso **19.** Falso **21.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 69$
(b) $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 68$, $x = 0$
(c) Centro (4, −1, −3), raio 5

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$; fora da página

5. −2, −4 **7.** (a) 2 (b) −2 (c) −2 (d) 0

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4 \rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. 166 N, 114 N

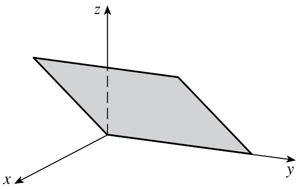
15. $x = 4 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 + 3t$

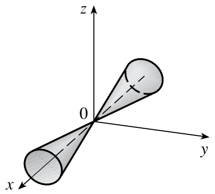
17. $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4 + 5t$

19. $-4x + 3y + z = -14$ **21.** (1, 4, 4) **23.** Desvio

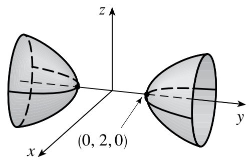
25. $x + y + z = 4$ **27.** $22/\sqrt{26}$

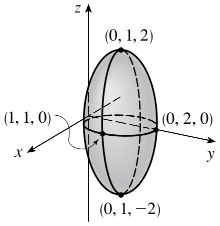
29. Plano **31.** Cone





33. Hiperboloide de duas folhas **35.** Elipsoide




z
(0, 1, 2)
(1, 1, 0)
(0, 2, 0)
x
y
(0, 1, −2)

37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS QUENTES

1. $(\sqrt{3} - \frac{3}{2})$ m

3. (a) $(x+1)/(-2c) = (y-c)/(c^2-1) = (z-c)/(c^2+1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1$, $z = t$ (c) $4\pi/3$

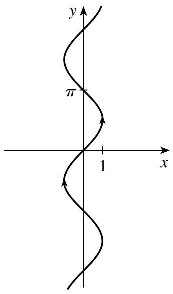
5. 20

CAPÍTULO 13

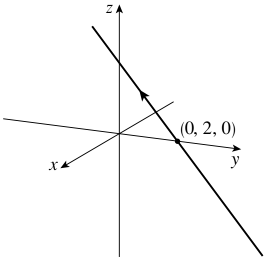
EXERCÍCIOS 13.1

1. (−1, 2] **3.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **3.** $\langle -1, \pi/2, 0 \rangle$

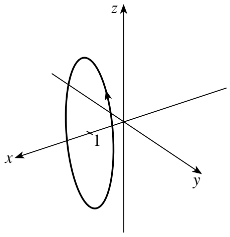
7.



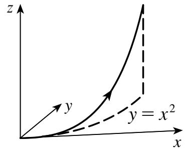
9.



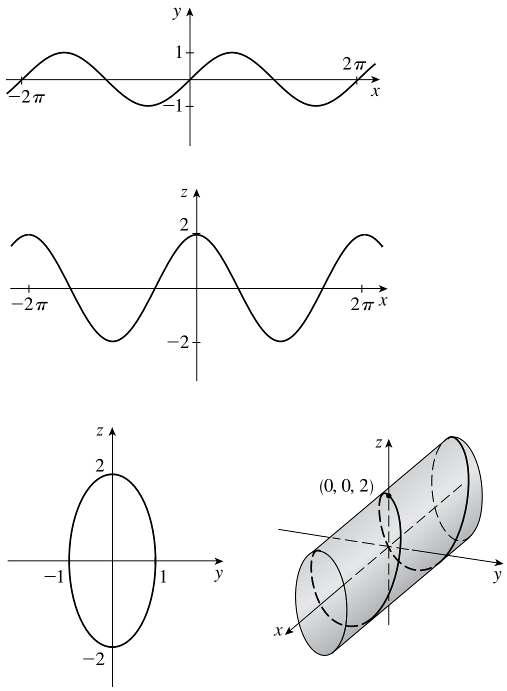
11.



13.



15.

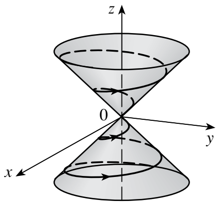


17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{2}t, -1 + \frac{4}{3}t, 1 - \frac{3}{4}t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = \frac{1}{2}t$, $y = -1 + \frac{4}{3}t$, $z = 1 - \frac{3}{4}t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

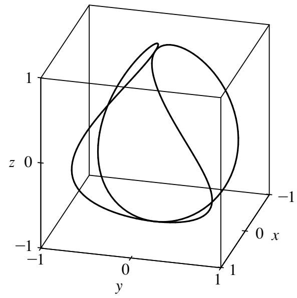
21. II **23.** V **25.** IV

27.

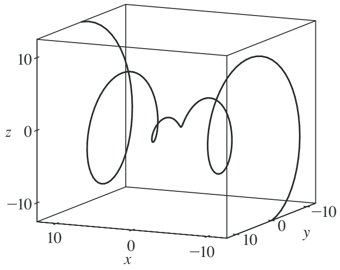


29. (0, 0, 0), (1, 0, 1)

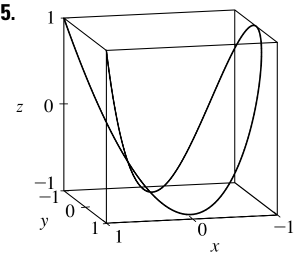
31.



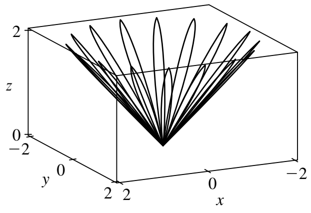
33.



35.



37.



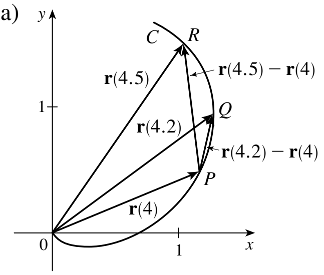
41. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

43. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

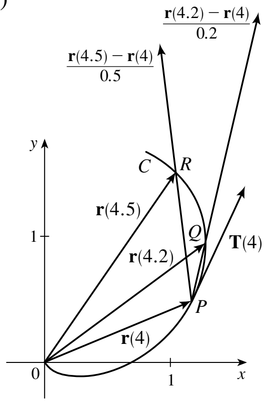
45. $x = 2\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 4\cos^2 t$ **47.** Sim

EXERCÍCIOS 13.2

1. (a)

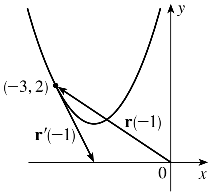

y
C
R
r(4.5)
r(4.5) − r(4)
1
r(4.2)
Q
r(4.2) − r(4)
P
r(4)
0
1
x

(b), (d)


r(4.2) − r(4) / 0.2
r(4.5) − r(4) / 0.5
y
C
R
r(4.5)
1
Q
r(4.2)
T(4)
P
r(4)
0
1
x

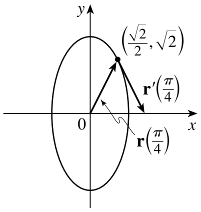
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. (a), (c)



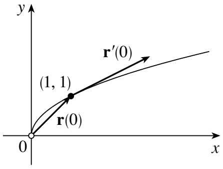
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t\rangle$

5. (a), (c)


y
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$
$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$
0
x
$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 2e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \text{sen}\,t,\ 2t,\ \cos 2t - 2t\,\text{sen}\,2t\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\,\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$ **15.** $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$

17. $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ **19.** $\frac{3}{5}\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\,\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle$, $\langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}\rangle$, $\langle 0, 2, 6t\rangle$, $\langle 6t^2, -6t, 2\rangle$

23. $x = 3 + t,\ y = 2t,\ z = 2 + 4t$

25. $x = 1 - t,\ y = t,\ z = 1 - t$

27. $\mathbf{r}(t) = (3 - 4t)\,\mathbf{i} + (4 + 3t)\,\mathbf{j} + (2 - 6t)\,\mathbf{k}$

29. $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$

31. $x = -\pi - t,\ y = \pi + t,\ z = -\pi t$

33. 66° **35.** $2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 32\,\mathbf{k}$ **37.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

39. $e^t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + (t\ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

41. $t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k}$

47. $2t\cos t + 2\,\text{sen}\,t - 2\cos t\,\text{sen}\,t$ **49.** 35

EXERCÍCIOS 13.3

1. $10\sqrt{10}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15,3841

9. 1,2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3\,\text{sen}\,1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle 1/\sqrt{10}, (-3/\sqrt{10})\text{sen}\,t, (3/\sqrt{10})\cos t\rangle$,
$\langle 0, -\cos t, -\text{sen}\,t\rangle$ (b) $\frac{3}{10}$

19. (a) $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle \sqrt{2}e^t, e^{2t}, -1\rangle$, $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t\rangle$

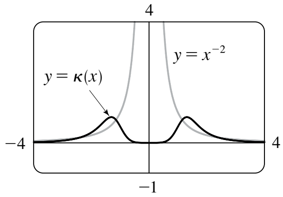
(b) $\sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t}+1)^2$

21. $6t^2/(9t^4 + 4t^2)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

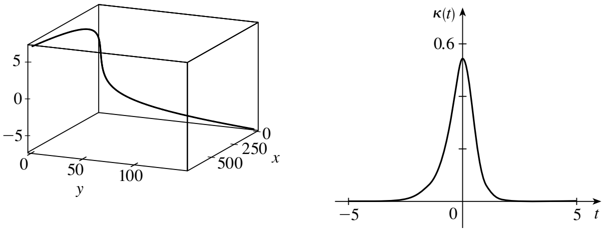
27. $12x^2/(1 + 16x^6)^{3/2}$ **29.** $e^x\,|x + 2|/[1 + (xe^x + e^x)^2]^{3/2}$

31. $(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2})$; tende a 0 **33.** (a) P (b) 1,3, 0,7

35.

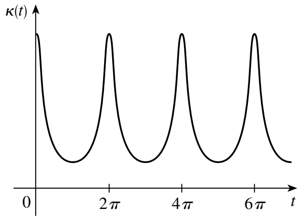


37.



39. a é $y = f(x)$, b é $y = \kappa(x)$

41. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$



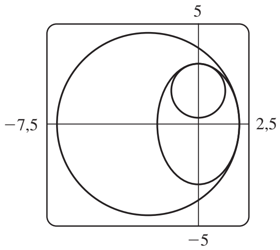
inteiros múltiplos de 2π

43. $6t^2/(4t^2 + 9t^4)^{3/2}$

45. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **47.** $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$

49. $y = 6x + \pi,\ x + 6y = 6\pi$

51. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{4}$, $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



53. $(-1, -3, 1)$

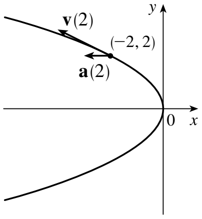
55. $2x + y + 4z = 7$, $6x - 8y - z = -3$

63. $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$ **65.** $2{,}07 \times 10^{10}$ Å ≈ 2 m

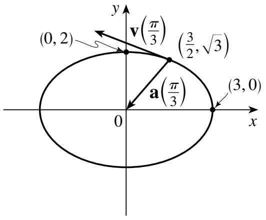
EXERCÍCIOS 13.4

1. (a) $1{,}8\mathbf{i} - 3{,}8\,\mathbf{j} - 0{,}7\mathbf{k}$, $2{,}0\mathbf{i} - 2{,}4\,\mathbf{j} - 0{,}6\mathbf{k}$,
$2{,}8\mathbf{i} + 1{,}8\mathbf{j} - 0{,}3\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}4\mathbf{k}$
(b) $2{,}4\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}5\mathbf{k}$, 2,58

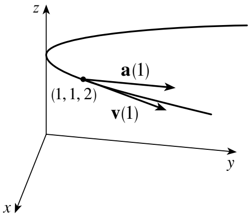
3. $\mathbf{v}(t) = \langle -t, 1\rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle -1, 0\rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$



5. $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3 \cos t\, \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$


y
(0, 2)
$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$
$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
(3, 0)
0
x

7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$



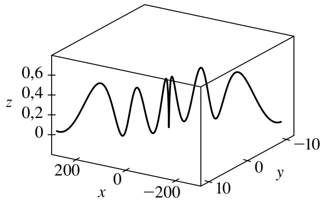
9. $\langle 2t, 3t^2, 2t\rangle, \langle 2, 6t, 2\rangle, \ |t|\sqrt{9t^2 + 8}$

11. $\sqrt{2}\, \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} - e^{-t} \mathbf{k},\ e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k},\ e^t + e^{-t}$

13. $e^t [(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\, \mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$,
$e^t [-2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}],\ e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$

15. $\mathbf{v}(t) = t\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2} t^2 + 1\right) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$

17. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) \mathbf{i} + (t - \operatorname{sen} t + 1)\, \mathbf{j} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t\right) \mathbf{k}$
(b)



19. $t = 4$

21. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} - t\, \mathbf{j} + \frac{5}{2}\, t^2 \mathbf{k},\ |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$

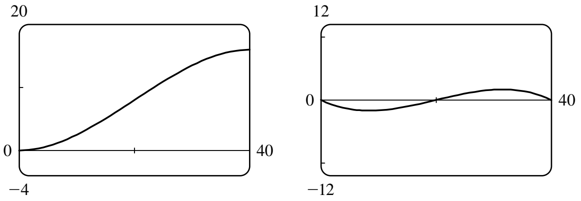
23. (a) ≈ 3 535 m (b) ≈ 1 531 m (c) 200 m/s

25. 30 m/s **27.** ≈ 10,2°, ≈ 79,8°

29. $13{,}0° < \theta < 36{,}0°,\ 55{,}4° < \theta < 85{,}5°$

31. $(250, -50, 0);\ 10\sqrt{93} \approx 96{,}4$ pés/s

33. (a) 16 m (b) ≈ 23,6° rio acima



35. O caminho está contido em um círculo que está em um plano perpendicular a **c** com centro em uma reta pela origem na direção de **c**.

37. $6t, 6$ **39.** $0, 1$ **41.** $e^t - e^{-t}, \sqrt{2}$

43. 4,5 cm/s², 9,0 cm/s² **45.** $t = 1$

CAPÍTULO 13 REVISÃO

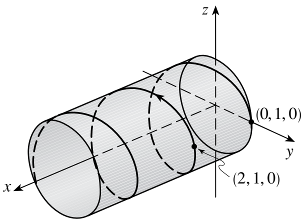
Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso

9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{j} + \pi \cos \pi t\, \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2 \cos \pi t\, \mathbf{j} - \pi^2 \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\, \mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + (5 - 4 \cos t)\mathbf{k},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5. $\frac{1}{3}\, \mathbf{i} - (2/\pi^2)\, \mathbf{j} + (2/\pi)\, \mathbf{k}$ **7.** 86,631 **9.** $\pi/2$

11. (a) $\langle t^2, t, 1\rangle/\sqrt{t^4 + t^2 + 1}$
(b) $\langle t^3 + 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t\rangle/\sqrt{t^8 + 5t^6 + 6t^4 + 5t^2 + 1}$
(c) $\sqrt{t^8 + 5t^6 + 6t^4 + 5t^2 + 1}\ /(t^4 + t^2 + 1)^2$

13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$

17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\, \mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\, \mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2 \ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}},\ \mathbf{a}(t) = (1/t)\, \mathbf{i} + e^{-t}\, \mathbf{k}$

19. (a) Cerca de 0,8 m acima do chão, 18,4 m do atleta
(b) ≈ 6,3 m (c) ≈19,1 m do atleta

21. (c) $-2e^{-t}\mathbf{v}_d + e^{-t}\mathbf{R}$

23. (a) $\mathbf{v} = \omega R(-\operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{i} + \cos \omega t\, \mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$

PROBLEMAS QUENTES

1. (a) 90°, $v_0^2/(2g)$

3. (a) ≈ 0,25 m à direita da borda da mesa, ≈ 4,9 m/s
(b) ≈ 5,9° (c) ≈ 0,56 m à direita da borda da mesa,

5. 56°

7. $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{c} + u\, \mathbf{a} + v\mathbf{b}$ onde $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$,
$\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle,\ \mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$

CAPÍTULO 14

EXERCÍCIOS 14.1

1. (a) −27; uma temperatura de −15 °C com vento soprando a 40 km/h dá uma sensação equivalente a cerca de −27 °C sem vento.
(b) Quando a temperatura é −20 °C, qual velocidade do vento dá uma sensação térmica de −30 °C? 20 km/h
(c) Com uma velocidade do vento de 20 km/h, qual temperatura dá uma sensação térmica de −49 °C? −35 °C
(d) Uma função da velocidade do vento que dá os valores da sensação térmica quando a temperatura é −5 °C
(e) Uma função da temperatura que dá os valores da sensação térmica quando a velocidade do vento é 50 km/h

3. ≈ 94,2; a produção anual do fabricante está avaliada em \$94,2 milhões quando 120 000 horas trabalhadas são gastas e \$20 milhões de capital são investidos.

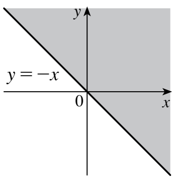
5. (a) ≈ 20,5; a área da superfície de uma pessoa 70 pol. mais alta que pesa 160 libras é de aproximadamente 20,5 pés quadrados.

7. (a) 7,7; um vento de 80 km/h soprando em mar aberto por 15 h criará ondas de cerca de 7,7 m de altura.
(b) $f(60, t)$ é uma função de t que dá a altura das ondas produzidas por ventos de 60 km/h por t horas.
(c) $f(v, 30)$ é uma função de v que dá a altura das ondas produzidas por ventos de velocidade v soprando por 30 horas.

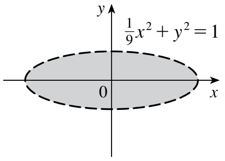
9. (a) 1 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[-1, 1]$

11. (a) 3 (b) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$, o interior de uma esfera de raio 2, centro da origem, no primeiro octante

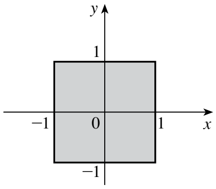
13. $\{(x, y) | \, y \geqslant -x\}$



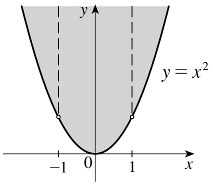
15. $\{(x, y) | \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$, $(-\infty, \ln 9]$



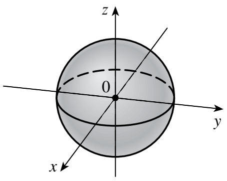
17. $\{(x, y) | -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$



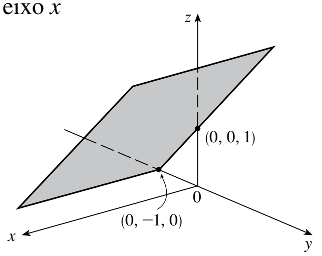
19. $\{(x, y) | y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



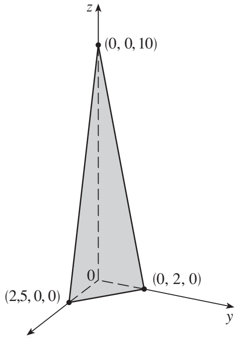
21. $\{(x, y, z) | \, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$



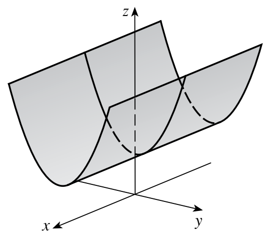
23. $z = 1 + y$, plano paralelo ao eixo x


z
(0, 0, 1)
0
(0, −1, 0)
x
y

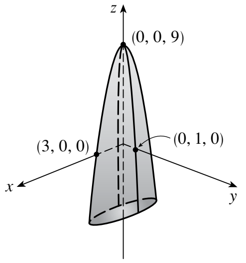
25. $4x + 5y + z = 10$, plano


z
(0, 0, 10)
0
(2,5, 0, 0)
(0, 2, 0)
y
x

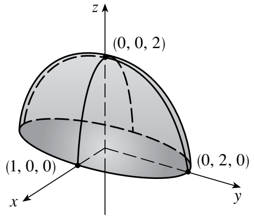
27. $z = y^2 + 1$,
cilindro parabólico



29. $z = 9 - x^2 - 9y^2$,
paraboloide elíptico

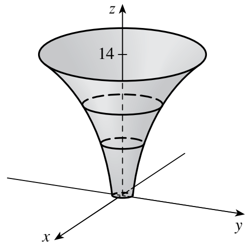

z
(0, 0, 9)
(3, 0, 0)
(0, 1, 0)
x
y

31. $z = \sqrt{4 - 4x^2 + y^2}$,
metade superior da elipsoide

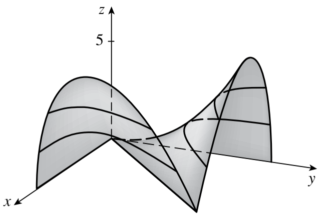

z
(0, 0, 2)
(1, 0, 0)
(0, 2, 0)
x
y

33. ≈ 56, ≈ 35 **35.** 11°C, 19,5°C **37.** Íngreme; quase achatado

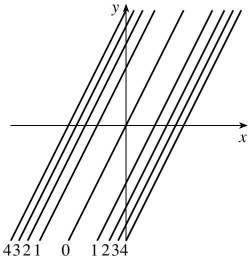
39.



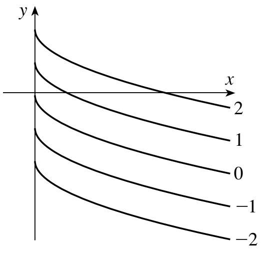
41.



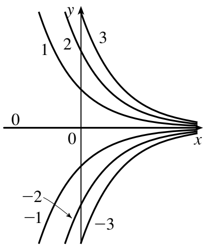
43. $(y - 2x)^2 = k$



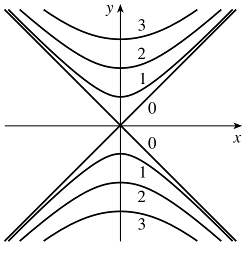
45. $y = \sqrt{x} + k$



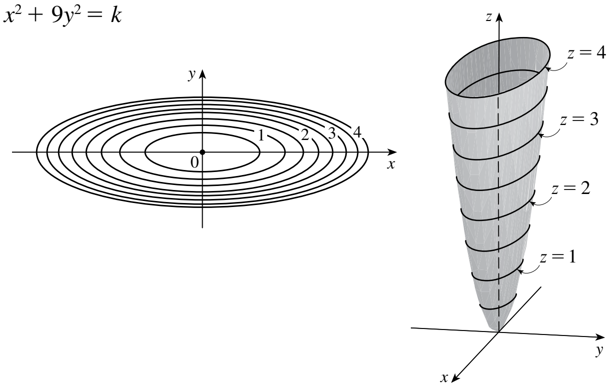
47. $y = ke^{-x}$



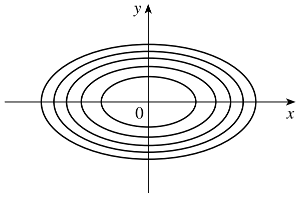
49. $y^2 - x^2 = k^2$



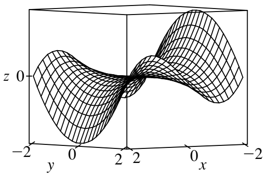
51. $x^2 + 9y^2 = k$



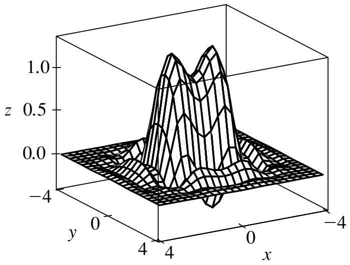
53.



55.



57.



59. (a) C (b) II **61.** (a) F (b) I

63. (a) B (b) VI **65.** Família de planos paralelos

67. Família de cilindros circulares com eixo no eixo x $(k > 0)$

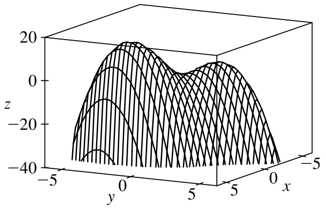
69. (a) Translada o gráfico de f duas unidades para cima

(b) Amplia o gráfico de f verticalmente por um fator 2

(c) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy

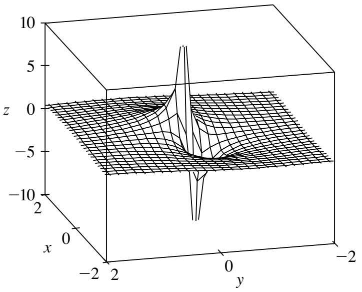
(d) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy e a seguir translada-o 2 unidades para cima

71.



f parece ter um valor máximo de cerca de 15. Há dois pontos de máximo local, porém nenhum ponto de mínimo local.

73.



Os valores da função tendem a 0 quando x, y se torna grande; quando (x, y) se aproxima da origem, f tende a $\pm\infty$ ou 0, dependendo da direção de aproximação.

75. Se $c = 0$, o gráfico é uma superfície cilíndrica. Para $c > 0$, as curvas de nível são elipses. O gráfico tem curva ascendente enquanto deixamos a origem, e a ingremidade aumenta à medida que c aumenta. Para $c < 0$, as curvas de nível são hipérboles. O gráfico tem curva ascendente na direção y e descendente, tendendo ao plano xy, na direção x, causando uma aparência em forma de sela perto de $(0, 0, 1)$.

77. $c = -2, 0, 2$ **79.** (b) $y = 0{,}75x + 0{,}01$

EXERCÍCIOS 14.2

1. Nada; Se f for contínua, $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$

5. 1 **7.** $\frac{2}{7}$ **9.** Não existe **11.** Não existe

13. 0 **15.** Não existe **17.** 2

19. $\sqrt{3}$ **21.** Não existe

23. O gráfico mostra que a função se aproxima de números diferentes ao longo de retas diferentes.

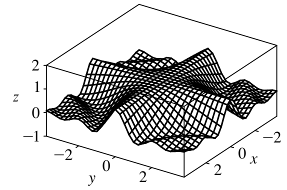
25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$;
$\{(x, y) \mid 2x + 3y \geqslant 6\}$

27. Ao longo da reta $y = x$ **29.** $\mathbb{R}^2$ **31.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$

33. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$ **35.** $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$

37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** -1

43.



f é contínua em $\mathbb{R}^2$

EXERCÍCIOS 14.3

1. (a) A taxa de variação da temperatura quando a longitude varia, com a latitude e o tempo fixados; a taxa de variação quando apenas a latitude varia; a taxa de variação quando apenas o tempo varia.
(b) Positiva, negativa, positiva

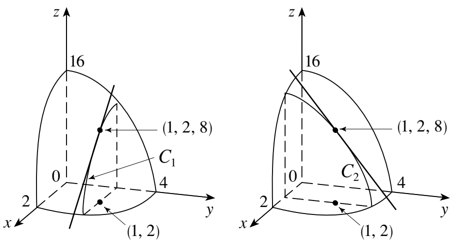
3. (a) $f_T(-15, 30) \approx 1{,}3$; para uma temperatura de -15 °C e velocidade do vento de 30 km/h, o índice de sensação térmica sobe para 1,3°C para cada grau de elevação da temperatura. $f_v(-15, 30) \approx -0{,}15$; para uma temperatura de -15°C e velocidade do vento de 30 km/h, o índice de sensação térmica cai para 0,15°C para cada km/h de aumento da velocidade do vento.
(b) Positiva, negativa (c) 0

5. (a) Positiva (b) Negativa

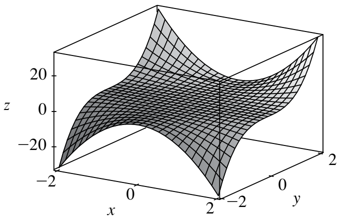
7. (a) Positiva (b) Negativa

9. $c = f$, $b = f_x$, $a = f_y$

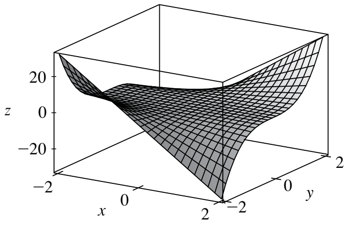
11. $f_x(1, 2) = -8$ = inclinação de C_1, $f_y(1, 2) = -4$ = inclinação de C_2



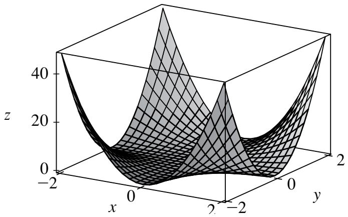
13.



$f(x, y) = x^2y^3$



$f_x(x, y) = 2xy^3$



$f_y(x, y) = 3x^2y^2$

15. $f_x(x, y) = -3y, f_y(x, y) = 5y^4 - 3x$

17. $f_x(x, t) = -\pi e^{-t} \operatorname{sen} \pi x, f_t(x, t) = -e^{-t} \cos \pi x$

19. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9, \partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$

21. $f_x(x, y) = 1/y, f_y(x, y) = -x/y^2$

23. $f_x(x, y) = \dfrac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2}, f_y(x, y) = \dfrac{(bc - ad)x}{(cx + dy)^2}$

25. $g_u(u, v) = 10uv(u^2v - v^3)^4 \; g_v(u, v) = 5(u^2 - 3v^2)(u^2v - v^3)^4$

27. $\partial w/\partial\alpha = \cos \alpha \cos \beta, \partial w/\partial\beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

29. $F_x(x, y) = \cos(e^x), F_y(x, y) = -\cos(e^y)$

31. $f_x = z - 10xy^3z^4, f_y = -15x^2y^2z^4, f_z = x - 20x^2y^3z^3$

33. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z), \partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z),$
$\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$

35. $\partial u/\partial x = y \operatorname{sen}^{-1}(yz), \partial u/\partial y = x \operatorname{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2},$
$\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$

37. $h_x = 2xy \cos(z/t), h_y = x^2 \cos(z/t),$
$h_z = (-x^2y/t) \operatorname{sen}(z/t), h_t = (x^2yz/t^2) \operatorname{sen}(z/t)$

39. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

41. $\frac{1}{5}$ **43.** $\frac{1}{4}$ **45.** $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y, f_y(x, y) = 2xy - x^3$

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{3y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{3z}$

49. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{e^z - xy}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{e^z - xy}$

51. (a) $f'(x), g'(y)$ (b) $f'(x + y), f'(x + y)$

53. $f_{xx} = 6xy^5 + 24x^2y, f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}, f_{yy} = 20x^3y^3$

55. $w_{uu} = v^2/(u^2 + v^2)^{3/2}, w_{uv} = -uv/(u^2 + v^2)^{3/2} = w_{vu},$
$w_{vv} = u^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$

57. $z_{xx} = -2x/(1 + x^2)^2, z_{xy} = 0 = z_{yx}, z_{yy} = -2y/(1 + y^2)^2$

63. $24xy^2 - 6y, 24x^2y - 6x$ **65.** $(2x^2y^2z^5 + 6xyz^3 + 2z)e^{xyz^2}$

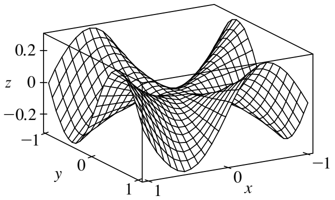
67. $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen} \theta + \theta \cos \theta + r\theta \operatorname{sen} \theta)$ **69.** $4/(y + 2z)^3, 0$

71. $6yz^2$ **73.** $\approx 12{,}2, \approx 16{,}8, \approx 23{,}25$ **83.** R^2/R_1^2

87. $\dfrac{\partial T}{\partial P} = -\dfrac{V - nb}{nR}, \dfrac{\partial P}{\partial V} = \dfrac{2n^2a}{V^3} - \dfrac{nRT}{(V - nb)^2}$

93. Não **95.** $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$ **99.** -2

101. (a)



(b) $f_x(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, f_y(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

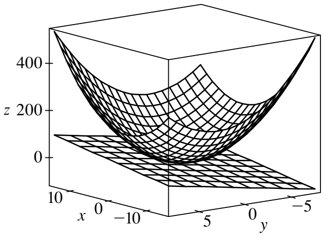
(c) 0, 0 (e) Não, uma vez que f_{xy} e f_{yx} não são contínuas.

EXERCÍCIOS 14.4

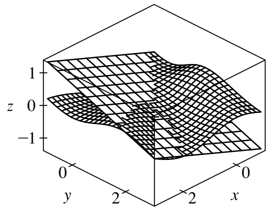
1. $z = -7x - 6y + 5$ **3.** $x + y - 2z = 0$

5. $x + y + z = 0$

7.



9.



11. $6x + 4y - 23$ **13.** $\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{3}$ **15.** $1 - \pi y$

19. 6,3 **21.** $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$; 6,9914

23. $2T + 0{,}3H - 40{,}5$; 44,4°C

25. $dz = -2e^{-2x} \cos 2\pi t \, dx - 2\pi e^{-2x} \operatorname{sen} 2\pi t \, dt$

27. $dm = 5p^4q^3dp + 3p^5q^2dq$

29. $dR = \beta^2 \cos \gamma \, d\alpha + 2\alpha\beta \cos \gamma d\beta - \alpha\beta^2 \operatorname{sen} \gamma \, d\gamma$

31. $\Delta z = 0{,}9225, dz = 0{,}9$ **33.** 5,4 cm^2 **35.** 16 cm^3

37. $\approx -0{,}0165mg$; decresce

39. $\frac{1}{17} \approx 0{,}059$ | **41.** 2,3% **43.** $\varepsilon_1 = \Delta x, \varepsilon_2 = \Delta y$

EXERCÍCIOS 14.5

1. $(2x + y) \cos t + (2y + x)e^t$

3. $[(x/t) - y \operatorname{sen} t]/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \operatorname{sen} t,$
$\partial z/\partial t = -2sxy^3 \operatorname{sen} t + 3sx^2y^2 \cos t$

9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos \theta \cos \phi - 2st \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,$
$\partial z/\partial t = 2st \cos \theta \cos \phi - s^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t \cos \theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen} \theta\right)$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s \cos \theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen} \theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},$
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x},$
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

21. 85, 178, 54 **23.** 2π, -2π

25. $\frac{5}{144}, -\frac{5}{96}, \frac{5}{144}$ **27.** $\dfrac{2x + y \operatorname{sen} x}{\cos x - 2y}$

29. $\dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

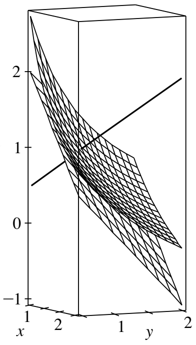
31. $-\dfrac{x}{3z}, -\dfrac{2y}{3z}$ **33.** $\dfrac{yz}{e^z - xy}, \dfrac{xz}{e^z - xy}$

35. 2°C/s **37.** $\approx -0{,}33$ m/s por minuto
39. (a) 6 m^3/s (b) 10 m^2/s (c) 0 m/s
41. $\approx 0{,}27$ L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s
45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\operatorname{sen}\theta$,
$\partial z/\partial \theta = -(\partial z/\partial x)r\operatorname{sen}\theta + (\partial z/\partial y)r\cos\theta$
51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\,\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$

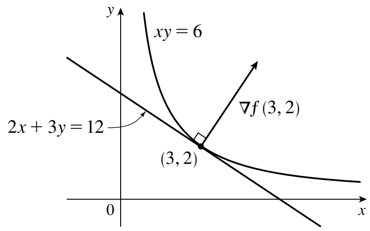
EXERCÍCIOS 14.6

1. $\approx 0{,}008$ hPa/km **3.** $\approx 0{,}778$ **5.** $2 + \sqrt{3}/2$
7. (a) $\nabla f(x, y) = \langle 2\cos(2x + 3y), 3\cos(2x + 3y)\rangle$
(b) $\langle 2, 3\rangle$ (c) $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$
9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$
11. $\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$ **13.** $-8/\sqrt{10}$ **15.** $4/\sqrt{30}$
17. $\frac{23}{42}$ **19.** 2/5 **21.** $\sqrt{65}, \langle 1, 8\rangle$
23. $1, \langle 0, 1\rangle$ **25.** $1, \langle 3, 6, -2\rangle$
27. (b) $\langle -12, 92\rangle$
29. Todos os pontos na reta $y = x + 1$
31. (a) $-40/(3\sqrt{3})$
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$
35. $\frac{327}{13}$ **39.** $\frac{774}{25}$
41. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$
43. (a) $2x + 3y + 12z = 24$ (b) $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z - 1}{12}$
45. (a) $x + y + z = 1$ (b) $x = y = z - 1$

47.



49. $\langle 2, 3\rangle$, $2x + 3y = 12$

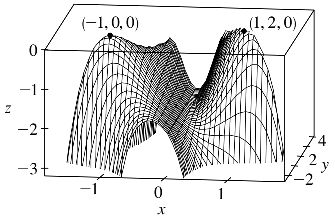


55. Não **59.** $(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{25}{8})$
63. $x = -1 - 10t, y = 1 - 16t, z = 2 - 12t$
67. Se $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, então $af_x + bf_y$ e $cf_x + df_y$ são conhecidas, portanto resolvemos as equações lineares por f_x e f_y

EXERCÍCIOS 14.7

1. (a) f tem um mínimo local em (1, 1).
(b) f tem um ponto de sela em (1, 1).
3. Mínimo local em (1, 1), ponto de sela em (0, 0)
5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$
7. Pontos de sela em (1, 1), (−1, −1)
9. Máximo $f(0, 0) = 2$, mínimo $f(0, 4) = -30$, pontos de sela em (2, 2), (−2, 2)
11. Mínimo $f(2, 1) = -8$, ponto de sela em (0, 0)
13. Nenhum **15.** Mínimo $f(0, 0) = 0$, pontos de sela em $(\pm 1, 0)$
17. Mínimos $f(0, 1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, pontos de sela em $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$
21. Mínimos $f(1, \pm 1) = 3, f(-1, \pm 1) = 3$
23. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, ponto de sela em (π, π)
25. Mínimos $f(0, -0{,}794) \approx -1{,}191$,
$f(\pm 1{,}592, 1{,}267) \approx -1{,}310$, pontos de sela $(\pm 0{,}720, 0{,}259)$,
pontos mais baixos $(\pm 1{,}592, 1{,}267, -1{,}310)$
27. Máximo $f(0{,}170, -1{,}215) \approx 3{,}197$,
mínimos $f(-1{,}301, -0{,}549) \approx -3{,}145$,
$f(1{,}131, 0{,}549) \approx -0{,}701$,
pontos de sela $(-1{,}301, -1{,}215)$, $(0{,}170, 0{,}549)$ $(1{,}131, -1{,}215)$,
sem ponto mais alto ou mais baixo
29. Máximo $f(0, \pm 2) = 4$, mínimo $f(1, 0) = -1$
31. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$
33. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$
35. Máximo $f(1, 0) = 2$, mínimo $f(-1, 0) = -2$

37.



39. $2/\sqrt{3}$ **41.** $(2, 1, \sqrt{5}), (2, 1, -\sqrt{5})$ **43.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$
45. $8r^3/(3\sqrt{3})$ **47.** $\frac{4}{3}$ **49.** Cubo, comprimento da borda $c/12$
51. Base do quadrado de lado 40 cm, altura 20 cm **53.** $L^3/(3\sqrt{3})$

EXERCÍCIOS 14.8

1. $\approx 59, 30$
3. Sem máximo, mínimo $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$
5. Máximo $f(0, \pm 1) = 1$, mínimo $f(\pm 2, 0) = -4$
7. Máximo $f(2, 2, 1) = 9$, mínimo $f(-2, -2, -1) = -9$
9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$
11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1
13. Máximo $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$,
mínimo $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2$
15. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$
17. Máximo $\frac{3}{2}$, mínimo $\frac{1}{2}$
19. Máximo $f(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}) = 9 + 12\sqrt{2}$,
mínimo $f(-2, 2) = -8$
21. Máximo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$,
mínimo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$
29–41. Veja os Exercícios 39–53 na Seção 14.7.
43. Mais próximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, mais longe $(-1, -1, 2)$
45. Máximo $\approx 9{,}7938$, mínimo $\approx -5{,}3506$
47. (a) c/n (b) Quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

CAPÍTULO 14 REVISÃO

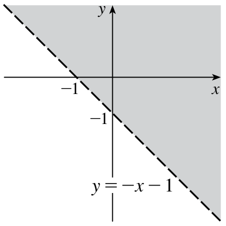
Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadeiro **9.** Falso

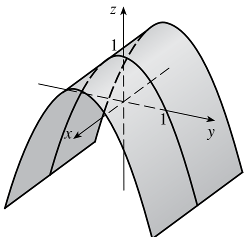
11. Verdadeiro

Exercícios

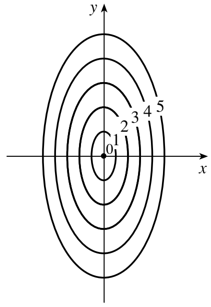
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



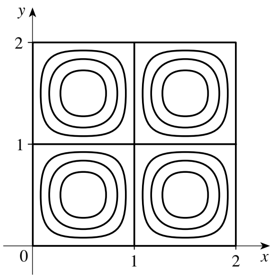
3.



5.



7.



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) $\approx 3{,}5$ °C/m, $-3{,}0$ °C/m (b) $\approx 0{,}35$ °C/m pela Equação 14.6.9 (A Definição 14.6.2 dá $\approx 1{,}1$ °C/m.)
(c) $-0{,}25$

13. $f_x = 32xy(5y^3 + 2x^2y)^7, f_y = (16x^2 + 120y^2)(5y^3 + 2x^2y)^7$

15. $F_\alpha = \dfrac{2\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2} + 2\alpha \ln(\alpha^2 + \beta^2), F_\beta = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

17. $S_u = \operatorname{arctg}(v\sqrt{w}), S_v = \dfrac{v\sqrt{w}}{1 + v^2w},\ S_w = \dfrac{uv}{2\sqrt{w}\,(1 + v^2w)}$

19. $f_{xx} = 24x, f_{xy} = -2y = f_{yx}, f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k - 1)x^{k-2}y^lz^m, f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx},$
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^lz^{m-1} = f_{zx}, f_{yy} = l(l - 1)x^ky^{l-2}z^m,$
$f_{yz} = lmx^ky^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}, f_{zz} = m(m - 1)x^ky^lz^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x - 1}{8} = \dfrac{y + 2}{4} = \dfrac{z - 1}{-1}$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y + 1}{-4} = \dfrac{z - 1}{-6}$

29. (a) $x + 2y + 5z = 0$
(b) $x = 2 + t, y = -1 + 2t, z = 5t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1), (-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38,656

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p \cos p + \operatorname{sen} p)$

37. -47, 108

43. $\langle 2xe^{yz^2}, x^2z^2e^{yz^2}, 2x^2yze^{yz^2} \rangle$ **45.** $-\frac{4}{5}$

47. $\sqrt{145}/2, \langle 4, \frac{9}{2} \rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nós/mi

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; pontos de sela $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimos $f(1, \pm 1) = -3$, pontos de sela $(-1, \pm 1), (1, 0)$

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$, mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4}), (\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3}), P(3 - \sqrt{3})/6, P(2\sqrt{3} - 3)/3$

PROBLEMAS QUENTES

1. $L^2W^2, \frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sim

7. $\sqrt{3/2}, 3\sqrt{2}$

CAPÍTULO 15

EXERCÍCIOS 15.1

1. (a) 288 (b) 144 **3.** (a) 0,990 (b) 1,151

5. (a) 4 (b) -8 **7.** $U < V < L$

9. (a) ≈ 248 (b) $\approx 15{,}5$ **11.** 60 **13.** 3

15. 1,141606, 1,143191, 1,143535, 1,143617, 1,143637, 1,143642

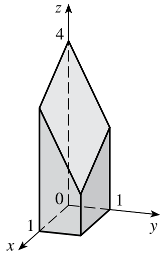
EXERCÍCIOS 15.2

1. $500y^3, 3x^2$ **3.** 222 **5.** 2 **7.** 18

9. $\frac{21}{2} \ln 2$ **11.** $\frac{31}{30}$ **13.** π **15.** 0

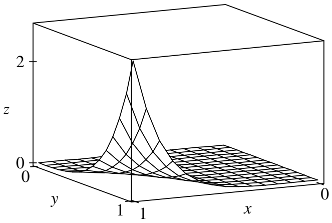
17. $9 \ln 2$ **19.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}e^{-6} + \frac{5}{2})$

23.



25. 51 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

33. $21e - 57$



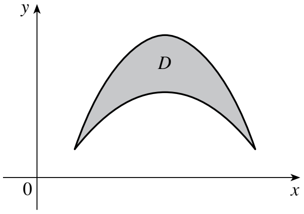
35. $\frac{5}{6}$ **37.** 0

39. O Teorema de Fubini não se aplica. O integrando tem uma descontinuidade infinita na origem.

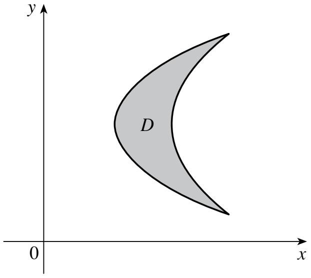
EXERCÍCIOS 15.3

1. 32 **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $\frac{1}{3}$ sen 1 **7.** $\frac{4}{3}$ **9.** π

11. (a)



(b)



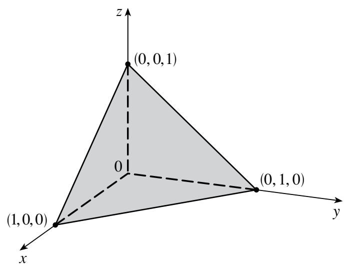
13. Tipo I: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
tipo II: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1\}$; $\frac{1}{3}$

15. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y\, dx\, dy = \frac{9}{4}$

17. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **19.** $\frac{11}{3}$ **21.** 0 **23.** $\frac{17}{60}$ **25.** $\frac{31}{8}$

27. 6 **29.** $\frac{128}{15}$ **31.** $\frac{1}{3}$ **33.** 0, 1,213; 0,713 **35.** $\frac{64}{3}$

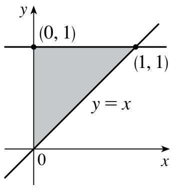
37.



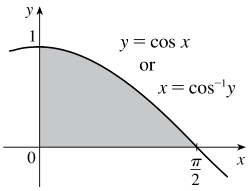
39. 13 984 735 616/14 549 535

41. $\pi/2$

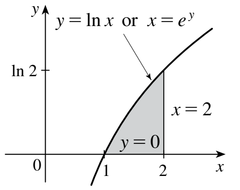
43. $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\, dy\, dx$



45. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} f(x, y)\, dx\, dy$



47. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} f(x, y)\, dx\, dy$



49. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **51.** $\frac{1}{3} \ln 9$ **53.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **55.** 1

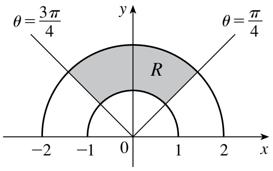
57. $(\pi/16)e^{-1/16} \leqslant \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA \leqslant \pi/16$ **59.** $\frac{3}{4}$ **63.** 9π

65. $a^2b + \frac{3}{2}ab^2$ **67.** $\pi a^2 b$

EXERCÍCIOS 15.4

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta$ **3.** $\int_{-1}^{1} \int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\, dy\, dx$

5. $3\pi/4$



7. $\frac{1250}{3}$ **9.** $(\pi/4)(\cos 1 - \cos 9)$

11. $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$ **15.** $\pi/12$

17. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$ **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$

25. $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$ **27.** $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$ **33.** 4,5951

35. 37,5π m³ **37.** $2/(a+b)$ **39.** $\frac{15}{16}$

41. (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

EXERCÍCIOS 15.5

1. 285 C **3.** $42k, \left(2, \frac{85}{28}\right)$ **5.** $6, \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ **7.** $\frac{8}{15}k, \left(0, \frac{4}{7}\right)$

9. $L/4, (L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $\left(0, 45/14\pi\right)$)

15. $(2a/5, 2a/5)$ se o vértice é (0, 0) e os lados estão ao longo dos eixos positivos

17. $\frac{64}{315}k, \frac{8}{105}k, \frac{88}{315}k$

19. $7ka^6/180, 7ka^6/180, 7ka^6/90$ se o vértice é (0, 0) e os lados estão ao longo dos eixos positivos

21. $\rho bh^3/3, \rho b^3h/3; b/\sqrt{3}, h/\sqrt{3}$

23. $\rho a^4\pi/16, \rho a^4\pi/16; a/2, a/2$

25. $m = 3\pi/64, (\overline{x}, \overline{y}) = \left(\dfrac{16384\sqrt{2}}{10395\pi}, 0\right),$

$$I_x = \frac{5\pi}{384} - \frac{4}{105}, I_y = \frac{5\pi}{384} + \frac{4}{105}, I_0 = \frac{5\pi}{192}$$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0,375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}1042$

29. (b) (i) $e^{-0{,}2} \approx 0{,}8187$

(ii) $1 + e^{-1{,}8} - e^{-0{,}8} - e^{-1} \approx 0{,}3481$ (c) 2, 5

31. (a) $\approx 0{,}500$ (b) $\approx 0{,}632$

33. (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]\, dA$, onde D é o disco com raio de 10 km centralizado no centro da cidade

(b) $200\pi k/3 \approx 209k, 200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, na borda

EXERCÍCIOS 15.6

1. $15\sqrt{26}$ **3.** $3\sqrt{14}$ **5.** $12 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

7. $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ **9.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

11. $a^2(\pi - 2)$ **13.** 13,9783 **15.** (a) $\approx$ 1,83 (b) $\approx$ 1,8616

17. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16} \ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

19. 3,3213 **23.** $(\pi/6)(101\sqrt{101} - 1)$

EXERCÍCIOS 15.7

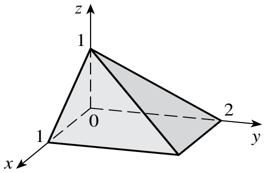
1. $\frac{27}{4}$ **3.** $\frac{16}{15}$ **5.** $\frac{5}{3}$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $9\pi/8$

13. $\frac{65}{28}$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. 0,985

27.



29. $\int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} \int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{-1}^{1} \int_0^{4-4z^2} \int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2} \int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}} \int_0^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

31. $\int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_0^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_0^2 \int_0^{4-2z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^4 \int_0^{2-y/2} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2} \int_0^{2-x^2/2} \int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}} \int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

33. $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_0^1\int_0^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_0^1\int_0^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

35. $\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^1\int_z^1\int_y^1 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^y\int_y^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_0^1\int_0^x\int_z^x f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \int_0^1\int_z^1\int_z^x f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

37. 64π **39.** $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$

41. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$

43. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} kL^5$ **45.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

47. (a) $m = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(b) $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, onde

$\overline{x} = (1/m)\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

$\overline{y} = (1/m)\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

$\overline{z} = (1/m)\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(c) $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$

49. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$

(b) $\left(\frac{28}{9\pi + 44}, \frac{30\pi + 128}{45\pi + 220}, \frac{45\pi + 208}{135\pi + 660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

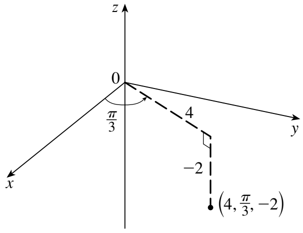
51. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$ **53.** $L^3/8$

55. (a) A região ligada pelo elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

(b) $4\sqrt{6}\pi/45$

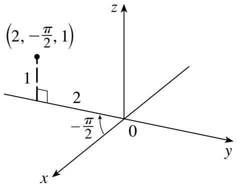
EXERCÍCIOS 15.8

1. (a)



$(2, 2\sqrt{3}, -2)$

(b)



$(0, -2, 1)$

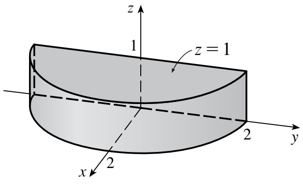
3. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 1)$ (b) $(4, 2\pi/3, 3)$

5. Meio-plano vertical pelo eixo z

7. Paraboloide circular

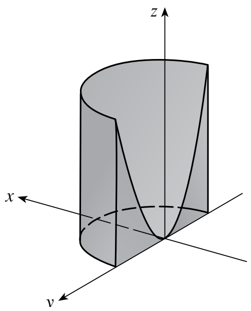
9. (a) $z^2 = 1 + r\cos\theta - r^2$ (b) $z = r^2\cos 2\theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 20$

15.



4π

17 384π **19.** $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{15}$ **21.** $2\pi/5$ **23.** $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1)$

25. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

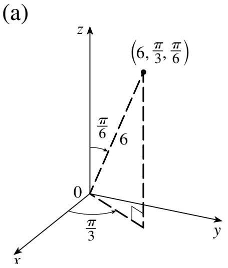
27. $\pi Ka^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$ **29.** 0

31. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\, dV$, onde C é o cone

(b) $\approx 4{,}4 \times 10^{18}$ **J**

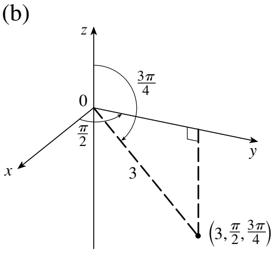
EXERCÍCIOS 15.9

1. (a)



$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right)$

(b)



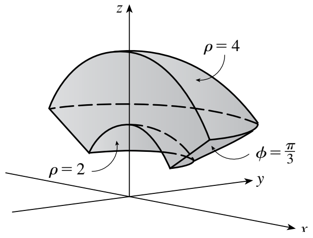
$\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3. (a) $(2, 3\pi/2, \pi/2)$ (b) $(2, 3\pi/4, 3\pi/4)$

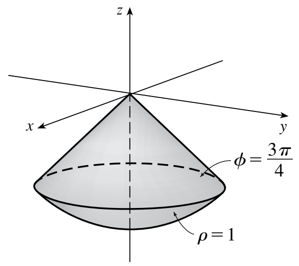
5. Meio-cone **7.** Esfera, raio $\frac{1}{2}$, centro $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

9. (a) $\cos^2\phi = \text{sen}^2\phi$ (b) $\rho^2(\text{sen}^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

11.

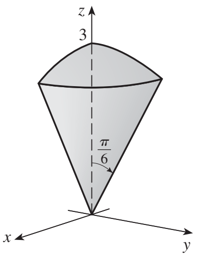


13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi$

17.



$(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$

19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

21. $312.500\pi/7$ **23.** $1.688\pi/15$ **25.** $\pi/8$

27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2{,}1)$

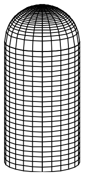
31. (a) $(0, 0, \frac{7}{12})$ (b) $11K\pi/960$

33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}\, a\right)$ (b) $4K\pi a^5/15$

35. $\frac{1}{3}\pi\,(2 - \sqrt{2})$, $(0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$

37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$ **41.** $4096\pi/21$

43.



45. $136\pi/99$

EXERCÍCIOS 15.10

1. 16 **3.** $\mathrm{sen}^2\theta - \cos^2\theta$ **5.** 0

7. O paralelogramo com vértices $(0, 0)$, $(6, 3)$, $(12, 1)$, $(6, -2)$

9. A região ligada pela reta $y = 1$, o eixo y e por $y = \sqrt{x}$

11. $x = \frac{1}{3}(v - u)$, $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$ é uma transformação possível, onde $S = \{(u, v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, 1 \leqslant v \leqslant 3\}$

13. $x = u \cos v$, $y = u \,\mathrm{sen}\, v$ é uma transformação possível, onde $S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2\}$

15. -3 **17.** 6π **19.** $2 \ln 3$

21. (a) $\frac{4}{3}\,\pi abc$ (b) $1\,083 \times 10^{12}$ km^3 (c) $\frac{4}{15}\pi(a^2 + b^2)abck$

23. $\frac{8}{5}\ln 8$ **25.** $\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,1$ **27.** $e - e^{-1}$

CAPÍTULO 15 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro **9.** Falso

Exercícios

1. $\approx 64{,}0$ **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,1$ **7.** $\frac{2}{3}$

9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

11. A região dentro do circuito da rosa de quatro folhas $r = \mathrm{sen}\, 2\theta$ no primeiro quadrante

13. $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,1$ **15.** $\frac{1}{2}\,e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8

21. $81\pi/5$ **23.** $\frac{81}{2}$ **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$

29. 176 **31.** $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$

35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$

(c) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{1}{24}$; $\overline{\overline{y}} = 1/\sqrt{3}$, $\overline{\overline{x}} = 1/\sqrt{6}$

37. (a) $(0, 0, h/4)$ (b) $\pi a^4 h/10$

39. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}/3$ **41.** $\frac{486}{5}$ **43.** $0{,}0512$

45. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$

47. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **49.** $-\ln 2$ **51.** 0

PROBLEMAS QUENTES

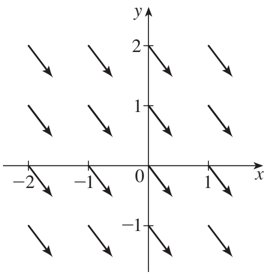
1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,1$ **7.** (b) $0{,}90$

13. $abc\pi\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{9\sqrt{3}}\right)$

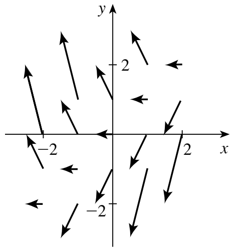
CAPÍTULO 16

EXERCÍCIOS 16.1

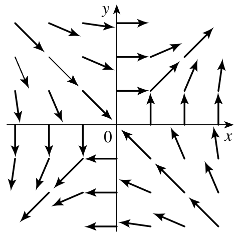
1.



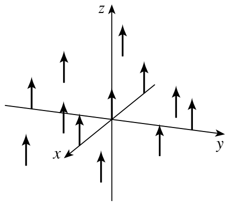
3.



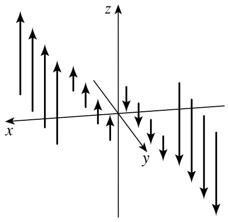
5.



7.

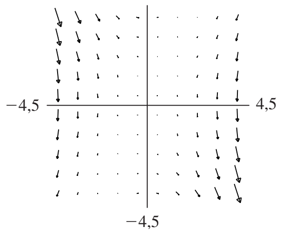


9.



11. IV **13.** I **15.** IV **17.** III

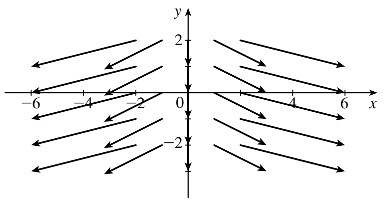
19. A reta $y = 2x$



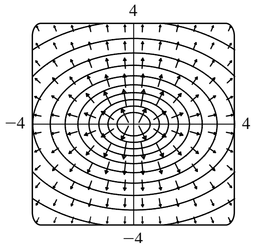
21. $\nabla f(x, y) = (xy + 1)\, e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2 e^{xy}\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

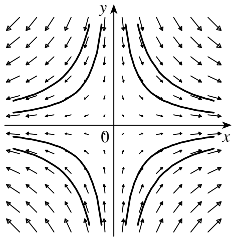


27.



29. III **31.** II **33.** $(2{,}04, 1{,}03)$

35. (a)



$y = C/x$

(b) $y = 1/x,\ x > 0$

EXERCÍCIOS 16.2

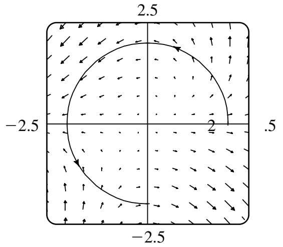
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638,4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{5}{2}$

9. $\sqrt{5}\,\pi$ **11.** $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{2}{5}(e - 1)$ **15.** $\frac{35}{3}$

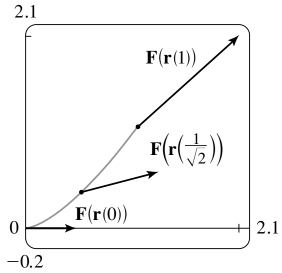
17. (a) Positiva (b) Negativa **19.** 45

21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1,9633 **25.** 15,0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k$, $(4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, onde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right)$, $I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$ **39.** $2\pi^2$ **41.** $\frac{7}{3}$

43. (a) $2ma\,\mathbf{i} + 6mbt\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (b) $2ma^2 + \frac{9}{2}mb^2$

45. $\approx 1{,}67 \times 10^4$ pés-lb **47.** (b) Sim **51.** ≈ 22 J

EXERCÍCIOS 16.3

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. Não conservativo **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$ (b) 4 **19.** 2

21. Não importa qual curva é escolhida.

23. 30 **25.** Não **27.** Conservativo

31. (a) Sim (b) Sim (c) Sim

33. (a) Não (b) Sim (c) Sim

EXERCÍCIOS 16.4

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** 12 **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $-\frac{16}{3}$

13. 4π **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ se a região é a porção do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante

27. 0

EXERCÍCIOS 16.5

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $ze^x\,\mathbf{i} + (xye^z - yze^x)\,\mathbf{j} - xe^z\,\mathbf{k}$ (b) $y(e^z + e^x)$

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle -e^y \cos z, -e^z \cos x, -e^x \cos y \rangle$
(b) $e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} z + e^z \operatorname{sen} x$

9. (a) Negativa (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Zero (b) rot $\mathbf{F}$ pontos na direção negativa de z

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** Não conservativo

17. $f(x, y, z) = xe^{yz} + K$ **19.** Não

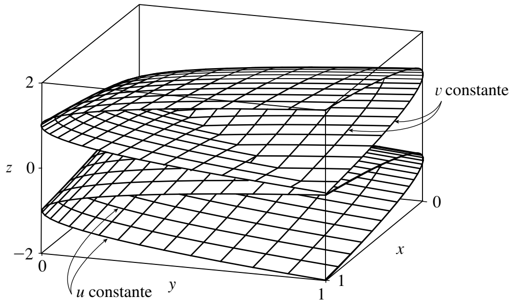
EXERCÍCIOS 16.6

1. P: não; Q: sim

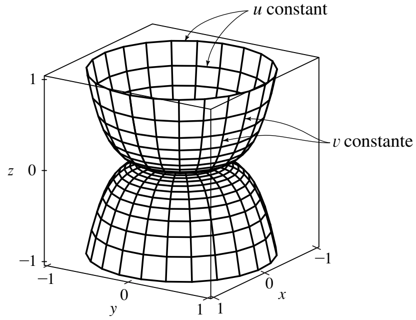
3. Plano por (0, 3, 1) contendo os vetores $\langle 1, 0, 4\rangle$, $\langle 1, -1, 5\rangle$

5. Paraboloide hiperbólico

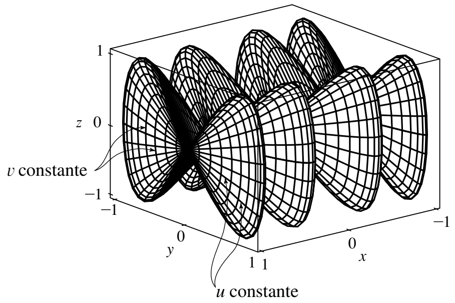
7.



8.



11.



13. IV **15.** II **17.** III

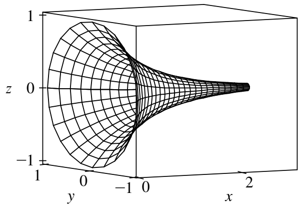
19. $x = u,\ y = v - u,\ z = -v$

21. $y = y,\ z = z,\ x = \sqrt{1 + y^2 + \frac{1}{4}z^2}$

23. $x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta,\ y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$
$z = 2 \cos \phi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
[ou $x = x,\ y = y,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leqslant 2$]

25. $x = x,\ y = 4 \cos \theta,\ z = 4 \operatorname{sen} \theta,\ 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x,\ y = e^{-x} \cos \theta,$
$z = e^{-x} \operatorname{sen} \theta,\ 0 \leqslant x \leqslant 3,$
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



31. (a) Direção reversa (b) Número de bobinas duplas

33. $3x - y + 3z = 3$ **35.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + z = \dfrac{\pi}{3}$

37. $-x + 2z = 1$ **39.** $3\sqrt{14}$ **41.** $\sqrt{14}\pi$

43. $\frac{4}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$ **45.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

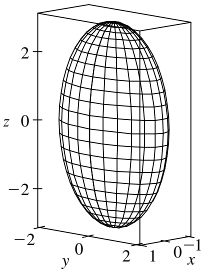
47. $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{17}{4}[\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln\sqrt{17}]$ **49.** 4

51. $A(S) \leqslant \sqrt{3}\pi R^2$ **53.** 13,9783

55. (a) 24,2055 (b) 24,2476

57. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

59. (b)



(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{36\,\mathrm{sen}^4 u\cos^2 v + 9\,\mathrm{sen}^4 u\,\mathrm{sen}^2 v + 4\cos^2 u\,\mathrm{sen}^2 u}\,du\,dv$

61. 4π **63.** $2a^2(\pi - 2)$

EXERCÍCIOS 16.7

1. 49,09 **3.** 900π **5.** $11\sqrt{14}$ **7.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

9. $171\sqrt{14}$ **11.** $\sqrt{21}/3$ **13.** $364\sqrt{2}\pi/3$

15. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **17.** 16π **19.** 12 **21.** 4

23. $\frac{713}{180}$ **25.** $-\frac{4}{3}\pi$ **27.** 0 **29.** 48 **31.** $2\pi + \frac{8}{3}$

33. 4,5822 **35.** 3,4895

37. $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D [P(\partial h/\partial x) - Q + R(\partial h/\partial z)]\,dA$, onde D = projeção de S no plano xz

39. $(0, 0, a/2)$

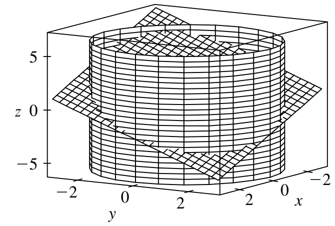
41. (a) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dS$ (b) $4\,329\sqrt{2}\pi/5$

43. 0 kg/s **45.** $\frac{8}{3}\pi a^3\varepsilon_0$ **47.** $1\,248\pi$

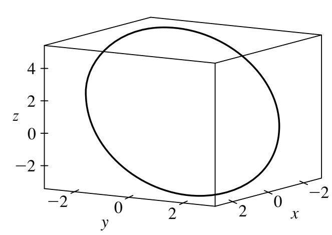
EXERCÍCIOS 16.8

3. 0 **5.** 0 **7.** −1 **9.** 80π

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$,
$z = 1 - 3(\cos t + \mathrm{sen}\,t)$,
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



17. 3

EXERCÍCIOS 16.9

5. $\frac{9}{2}$ **7.** $9\pi/2$ **9.** 0 **11.** $32\pi/3$ **13.** 2π

15. $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20}\,\mathrm{arcsen}(\sqrt{3}/3)$

17. $13\pi/20$ **19.** Negativa em P_1, positiva em P_2

21. div $\mathbf{F} > 0$ em quadrantes I, II; div $\mathbf{F} < 0$ em quadrantes III, IV

CAPÍTULO 16 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso

7. Falso **9.** Verdadeiro **11.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a) Negativa (b) Positiva **3.** $6\sqrt{10}$ **5.** $\frac{1}{15}$

7. $\frac{110}{3}$ **9.** $\frac{11}{12} - 4/e$ **11.** $f(x, y) = e^y + xe^{xy}$ **13.** 0

17. -8π **25.** $\frac{1}{6}(27 - 5\sqrt{5})$ **27.** $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$

29. $-64\pi/3$ **33.** $-\frac{1}{2}$ **37.** −4 **39.** 21

CAPÍTULO 17

EXERCÍCIOS 17.1

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **3.** $y = c_1\cos 4x + c_2\,\mathrm{sen}\,4x$

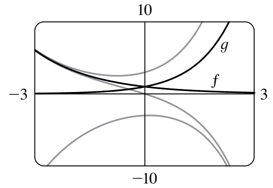
5. $y = c_1e^{2x/3} + c_2\,xe^{2x/3}$ **7.** $y = c_1 + c_2e^{x/2}$

9. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\,\mathrm{sen}\,3x)$

11. $y = c_1e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + c_2e^{-(\sqrt{3}+1)t/2}$

13. $P = e^{-t}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{10}t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{10}t\right)\right]$

15.



Todas as soluções de tendem a 0 ou ±∞ à medida que $x \longrightarrow \pm\infty$.

17. $y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$ **19.** $y = e^{-2x/3} + \frac{2}{3}xe^{-2x/3}$

21. $y = e^{3x}(2\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x)$

23. $y = \frac{1}{7}e^{4x-4} - \frac{1}{7}e^{3-3x}$ **25.** $y = 5\cos 2x + 3\,\mathrm{sen}\,2x$

27. $y = 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$ **29.** $y = \dfrac{e - 2}{e - 1} + \dfrac{e^x}{e - 1}$

31. Sem solução

33. (b) $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, n um inteiro positivo; $y = C\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$

35. (a) $b - a \neq n\pi$, n qualquer inteiro

(b) $b - a = n\pi$ e $\dfrac{c}{d} \neq e^{a-b}\dfrac{\cos a}{\cos b}$ a menos que $\cos b = 0$, então $\dfrac{c}{d} \neq e^{a-b}\dfrac{\mathrm{sen}\,a}{\mathrm{sen}\,b}$

(c) $b - a = n\pi$ e $\dfrac{c}{d} = e^{a-b}\dfrac{\cos a}{\cos b}$ a menos que $\cos b = 0$, então $\dfrac{c}{d} = e^{a-b}\dfrac{\mathrm{sen}\,a}{\mathrm{sen}\,b}$

EXERCÍCIOS 17.2

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{7}{65}\cos 2x - \frac{4}{65}\,\mathrm{sen}\,2x$

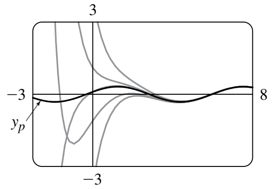
3. $y = c_1\cos 3x + c_2\,\mathrm{sen}\,3x + \frac{1}{13}e^{-2x}$

5. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x) + \frac{1}{10}e^{-x}$

7. $y = \frac{3}{2}\cos x + \frac{11}{2}\,\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$

9. $y = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\right)$

11.



As soluções são assintóticas a $y_p = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\,\mathrm{sen}\,x$ quando $x \longrightarrow \infty$. Exceto por y_p, todas as soluções aproximam-se de ∞ ou −∞ quando $x \longrightarrow -\infty$.

13. $y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^2 + Fx + G)\,\mathrm{sen}\,x$

15. $y_p = Axe^x + B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x$

17. $y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\,\mathrm{sen}\,3x]$

19. $y = c_1\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3}\cos x$

21. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$

23. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - 1$

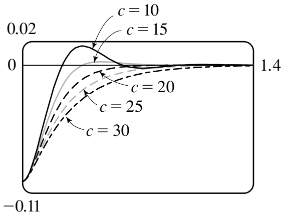
25. $y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$

27. $y = e^x\,[c_1 + c_2x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + x \operatorname{tg}^{-1} x]$

EXERCÍCIOS 17.3

1. $x = 0{,}35\cos(2\sqrt{5}\,t)$ **3.** $x = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$ **5.** $\frac{49}{12}$ kg

7.



13. $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6\cos 20t + 3\operatorname{sen} 20t) + \frac{3}{125}$,
$I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t}\operatorname{sen} 20t$

15. $Q(t) = e^{-10t}\left[\frac{3}{250}\cos 20t - \frac{3}{500}\operatorname{sen} 20t\right] - \frac{3}{250}\cos 10t + \frac{3}{125}\operatorname{sen} 10t$

EXERCÍCIOS 17.4

1. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = c_0e^x$ **3.** $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0e^{x^3/3}$

5. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

7. $c_0 + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = c_0 - c_1 \ln(1 - x)$ para $|x| < 1$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

11. $x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)!} x^{3n+1}$

CAPÍTULO 17 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro

Exercícios

1. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/2}$

3. $y = c_1\cos(\sqrt{3}\,x) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,x)$

5. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + 1)$

7. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x + 1)\operatorname{sen} x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}xe^{-2x}$

11. $y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$ **13.** $y = (e^{4x} - e^x)/3$

15. Sem solução

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

19. $Q(t) = -0{,}02e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + 0{,}03$

21. (c) $2\pi/k \approx 85$ min (d) $\approx 28\,400$ km/h

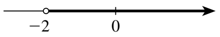
APÊNDICES

EXERCÍCIOS A

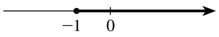
1. 18 **3.** π **5.** $5 - \sqrt{5}$ **7.** $2 - x$

9. $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x \geqslant -1 \\ -x - 1 & \text{para } x < -1 \end{cases}$ **11.** $x^2 + 1$

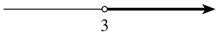
13. $(-2, \infty)$



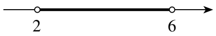
15. $[-1, \infty)$



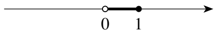
17. $(3, \infty)$



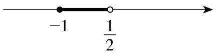
19. $(2, 6)$



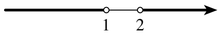
21. $(0, 1]$



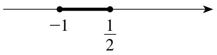
23. $[-1, \frac{1}{2})$



25. $(-\infty, 1] \cup (2, \infty)$

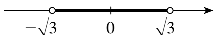


27. $[-1, \frac{1}{2}]$

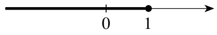


29. $(-\infty, \infty)$

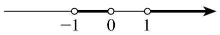
31. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$



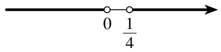
33. $(-\infty, 1]$



35. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$



37. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$



39. $10 \leqslant C \leqslant 35$ **41.** (a) $T = 20 - 10h$, $0 \leqslant h \leqslant 12$
(b) $-30\,°\mathrm{C} \leqslant T \leqslant 20\,°\mathrm{C}$ **43.** $\pm\frac{3}{2}$ **45.** $2, -\frac{4}{3}$

47. $(-3, 3)$ **49.** $(3, 5)$ **51.** $(-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$

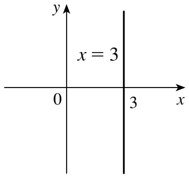
53. $[1{,}3;\ 1{,}7]$ **55.** $[-4, -1] \cup [1, 4]$

57. $x \geqslant (a + b)c/(ab)$ **59.** $x > (c - b)/a$

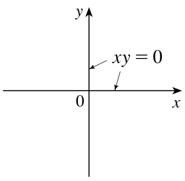
EXERCÍCIOS B

1. 5 **3.** $\sqrt{74}$ **5.** $2\sqrt{37}$ **7.** 2 **9.** $-\frac{9}{2}$

17.



19.

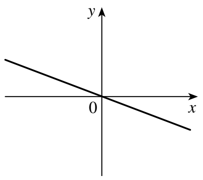


21. $y = 6x - 15$ **23.** $2x - 3y + 19 = 0$

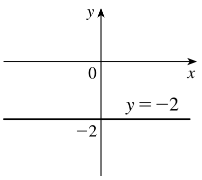
25. $5x + y = 11$ **27.** $y = 3x - 2$ **29.** $y = 3x - 3$

31. $y = 5$ **33.** $x + 2y + 11 = 0$ **35.** $5x - 2y + 1 = 0$

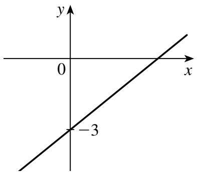
37. $m = -\frac{1}{3}$, $b = 0$



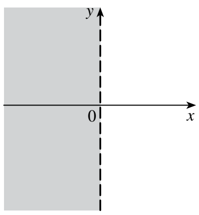
39. $m = 0$, $b = -2$



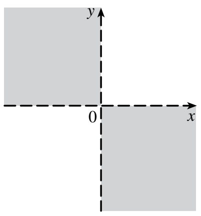
41. $m = \frac{3}{4}$, $b = -3$



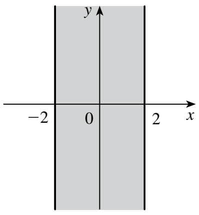
43.



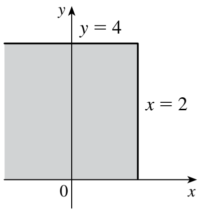
45.



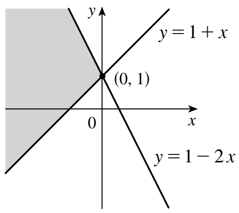
47.



49.



51.



53. (0, −4) **55.** (a) (4, 9) (b) (3,5, −3) **57.** (1, −2)

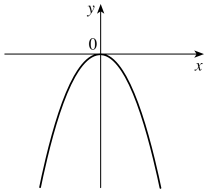
59. $y = x - 3$ **51.** (b) $4x - 3y - 24 = 0$

EXERCÍCIOS C

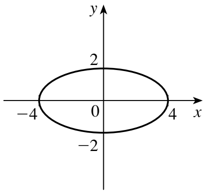
1. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ **3.** $x^2 + y^2 = 65$

5. (2, −5), 4 **7.** $(-\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}$ **9.** $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), \sqrt{10}/4$

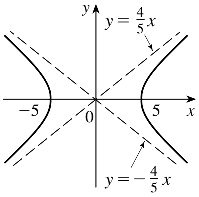
11. Parábola



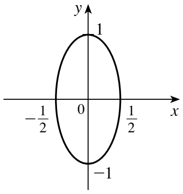
13. Elipse



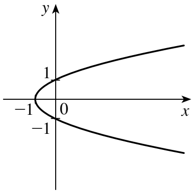
15. Hipérbole



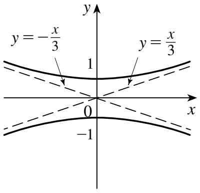
17. Elipse



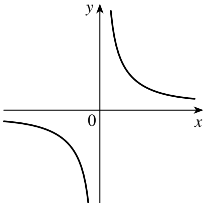
19. Parábola



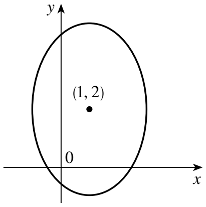
21. Hipérbole



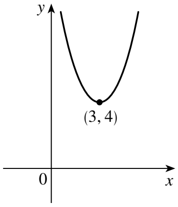
23. Hipérbole



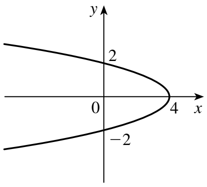
25. Elipse



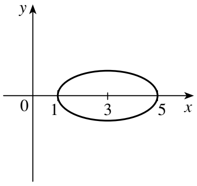
27. Parábola



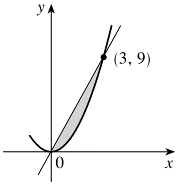
29. Parábola



31. Elipse

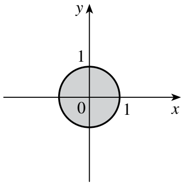


33.

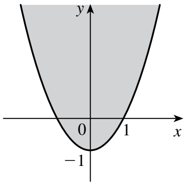


35. $y = x^2 - 2x$

37.



39.

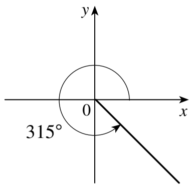


EXERCÍCIOS D

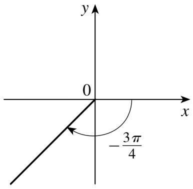
1. 7π/6 **3.** π/20 **5.** 5π **7.** 720° **9.** 75°

11. −67,5° **13.** 3π cm **15.** $\frac{2}{3}$ rad = (120/π)°

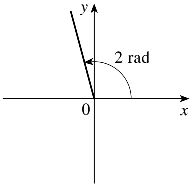
17.



19.



21.



23. $\text{sen}(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, $\text{tg}(3\pi/4) = -1$, $\text{cossec}(3\pi/4) = \sqrt{2}$, $\sec(3\pi/4) = -\sqrt{2}$, $\text{cotg}(3\pi/4) = -1$

25. $\text{sen}(9\pi/2) = 1$, $\cos(9\pi/2) = 0$, $\text{cossec}(9\pi/2) = 1$, $\text{cotg}(9\pi/2) = 0$, $\text{tg}(9\pi/2)$ e $\sec(9\pi/2)$ indefinida

27. $\text{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, $\text{tg}(5\pi/6) = -1/\sqrt{3}$, $\text{cossec}(5\pi/6) = 2$, $\sec(5\pi/6) = -2/\sqrt{3}$, $\text{cotg}(5\pi/6) = -\sqrt{3}$

29. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\text{tg}\,\theta = \frac{3}{4}$, $\text{cossec}\,\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\text{cotg}\,\theta = \frac{4}{3}$

31. $\text{sen}\,\phi = \sqrt{5}/3$, $\cos\phi =-\frac{2}{3}$, $\text{tg}\,\phi = -\sqrt{5}/2$, $\text{cossec}\,\phi = 3/\sqrt{5}$, $\text{cotg}\,\phi = -2/\sqrt{5}$

33. $\text{sen}\,\beta = -1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = -3/\sqrt{10}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{3}$, $\text{cossec}\,\beta = -\sqrt{10}$, $\sec\beta = -\sqrt{10}/3$

35. 5,73576 cm **37.** 24,62147 cm **59.** $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

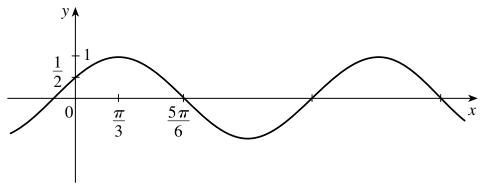
61. $\frac{1}{15}(3 + 8\sqrt{2})$ **63.** $\frac{24}{25}$ **65.** π/3, 5π/3

67. π/4, 3π/4, 5π/4, 7π/4 **69.** π/6, π/2, 5π/6, 3π/2

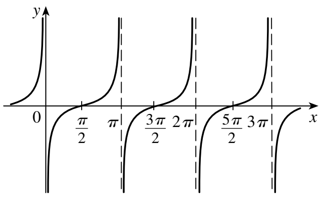
71. 0, π, 2π **73.** $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$ e $5\pi/6 \leqslant x \leqslant 2\pi$

75. $0 \leqslant x < \pi/4$, $3\pi/4 < x < 5\pi/4$, $7\pi/4 < x \leqslant 2\pi$

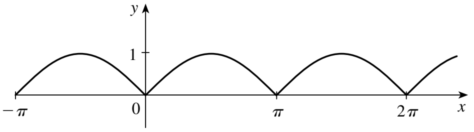
77.



79.



81.



89. 14,34457 cm²

EXERCÍCIOS E

1. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ **3.** $3^4 + 3^5 + 3^6$

5. $-1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$ **7.** $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$

9. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ **11.** $\sum_{i=1}^{10} i$

13. $\sum_{i=1}^{10} i \dfrac{i}{i+1}$ **15.** $\sum_{i=1}^{n} 2i$ **17.** $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ **19.** $\sum_{i=1}^{n} x^i$

21. 80 **23.** 3276 **25.** 0 **27.** 61 **29.** $n(n+1)$

31. $n(n^2 + 6n + 17)/3$ **33.** $n(n^2 + 6n + 11)/3$

35. $n(n^3 + 2n^2 - n - 10)/4$

41. (a) n^4 (b) $5^{100} - 1$ (c) $\frac{97}{300}$ (d) $a_n - a_0$

43. $\frac{1}{3}$ **45.** 14 **49.** $2^{n+1} + n^2 + n - 2$

EXERCÍCIOS G

1. (b) 0,405

EXERCÍCIOS H

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$ **7.** $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$

9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$ **15.** $12 + 5i$, 13

17. $4i$, 4 **19.** $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $-1 \pm 2i$

23. $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$ **25.** $3\sqrt{2}[\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)]$

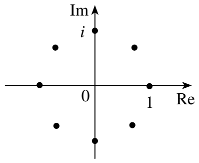
27. $5\{\cos[\operatorname{tg}^{-1}(\frac{4}{3})] + i \operatorname{sen}[\operatorname{tg}^{-1}(\frac{4}{3})]\}$

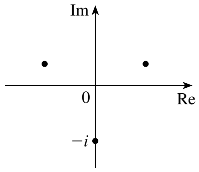
29. $4[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)]$

31. $4\sqrt{2}[\cos(7\pi/12) + i \operatorname{sen}(7\pi/12)]$, $(2/\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i \operatorname{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)]$

33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$

37. ± 1, $\pm i$, $(1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i$, $-i$





41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$

Índice Remissivo

aceleração de Coriolis, 787
aceleração de uma partícula, 777
    como um vetor, 777
    componentes de, 779
adição de vetores, 713, 715
afélio, 617
a geometria do tetraedro, 734
Airy, Sir George, 673
amortecedor, 1033
amplitude de uma função de, 792
ângulo negativo, A22
ângulo positivo, A22
ângulo(s), A21
    entre planos, 739
    entre vetores, 721, 722
    negativo ou positivo, A22
    posição padrão, A22
ângulo sólido, 1017
antena de satélite, parabólica, 748
apoastro, 611
aproximação
    linear, 825, 828
    linear, para um plano tangente, 825
    pela Inequalidade de Taylor, 682, 692
    pelos polinômios de Taylor, 692
aproximação de plano tangencial, 825
aproximação linear, 825, 828
aproximação quadrática, 859
área
    delimiteado por uma curva paramétrica, 585
    de um setor de um círculo, 602
    em coordenadas polares, 592, 602
    pelo Teorema de Green, 973
    superfície, 588, 910, 988, 990
área superficial
    de uma esfera, 989
    de uma superfície paramétrica, 588, 988, 989
    de uma superfície $z = f(x,y)$, 910, 910, 990
argumento de um número complexo, A53
assíntota(s)
    de uma hipérbole, 609, A18
astroide, 584
auxiliar equação, 1021
    raízes complexas de, 1023
    raízes reais de, 1022
Axioma de Completude, 631
base de um logaritmo, A49
Bernoulli, James, 539, 561
Bernoulli, John, 539, 580, 680
Bessel, Friedrich, 670
Bézier, curvas, 579, 591
Bézier, Pierre, 591
Brahe, Tycho, 781
calculadora, gráfica, 578, 598. *Ver também* sistema de computação algébrica
caminho, 964
campo
    conservador, 952
    elétrico, 951
    escalar, 949
    força, 951
    gradiente e, 846, 951
    gravitacional, 951
    incompressível, 980
    irrotacional, 979
    velocidade, 948, 951
    vetor, 948, 949
campo de direção, 531, 531
campo de força, 948, 951
campo de velocidade, 951
    correntes oceânicas, 948
    escapamento de ar, 948
    padrões aéreos, 948
campo de vetor de velocidade, 948
campo de vetor gradiente, 846, 952
campo de vetor irracional, 979
campo elétrico (força por carga de unidade), 951
campo escalar, 949
campo gravitacional, 951
campo vetorial, 948, 949
    conservador, 952
    divergência de, 979
    flux elétrico de, 1000
    fluxo de, 999
    força, 948, 951
    gradiente, 952
    gravitações, 951
    incompressível, 980
    irrotacional, 979
    potential função de, 968
    reta integral de, 959, 960
    rotacional de, 977
    superfície integral de, 999
    velocidade, 948, 951
campo vetorial conservador, 952, 969
Cantor, Georg, 644
capacidade de carregamento, 526, 550
cardioide, 595
carga, elétrica, 901, 901, 919, 1036
    total, 901, 919
CAS. *Ver* sistema de computação algébrica
Cassini, Giovanni, 601
catástrofe em forma de cauda de andorinha, 583
catástrofe ultravioleta, 700
Cauchy, Augustin-Louis, 883, A41
centrípeta força, 788
centro de gravidade. *Ver* centro de massa
centro de massa, 901, 956
    de uma lâmina, 902
    de uma superfície, 994
    de um fio, 956
    de um sólido, 918
centroide de um sólido, 918
cicloide, 579
ciência dos foguetes, 866
cilindro, 744
    elipsoide, 746
    hiperboloide, 746
    paraboloide, 745, 745, 746
    tabela de gráficos, 746
cilindro parabólico, 744
circuito elétrico, 538, 540, 559
    análise de, 1036
circulação de um campo de vetor, 1006
círculo de curvatura, 773
círculo, equação do, A14
círculo osculador, 773
cissoide de Diocles, 583, 600
Clairaut, Alexis, 817
Cobb, Charles, 793
cocleoide, 620
coeficiente(s)
    binomial, 686
    de fricção estática, 753
    de uma série de potência, 669
coeficientes binomiais, 685
coeficientes indeterminados, método dos, 1026, 1029
combinação linear, 1020
cometas, órbitas dos, 618
componente normal de aceleração, 780, 780
componentes de aceleração, 779
componentes de um vetor, 714, 724
componente tangencial de aceleração, 779
composição de funções
    continuidade de, 810
comprimento do arco, 769
    de uma curva espacial, 768, 769
    de uma curva paramétrica, 586
    de uma curva polar, 603
concoide, 580, 599
condição inicial, 529
condutividade de calor, 1001
condutividade (de uma substância), 1001
cone, 747
cone, 606, 747

  parametrização de, 986
cônicos transladados, 610, A19
conjugada complexa, A51
conjugadas, propriedades de, A52
conjunto de Cantor, 644
conjunto de notação, A3
conjunto fechado, 854
conjunto limitado, 854
conjunto, limite ou fechado, 854
conservação de energia, 968
constante da mola, 527, 1032
constante de amortecimento, 1033
continuidade
  de uma função, 757
  de uma função de duas variáveis, 807
  de uma função de três variáveis, 809
convergência
  absoluto, 661
  condicional, 662
  de uma sequência, 626
  de uma série, 637
  intervalo de, 671
  raio de, 671
conversão, cilíndrica a retangular coordenadas, 923
coordenada z, 708
coordenada x, 708, A9
coordenada y, 708, A9
coordenadas cilíndricas, 924
corrida na rampa, 933
crescimento bacteriano, 548, 552
crescimento exponencial, 552
crescimento populacional, 548
  de bactérias, 548, 552
  modelos, 526
cúbica retorcida, 759
cunha esférica, 928
curva de aprendizado, 530
curva de solução, 531
curva de transferência, 788
curva em floco de neve, 704
curva espacial, 756, 757, 757, 759
  comprimento do arco de, 768
curva fechada, 965
curva limite, 1003
curva lisa por partes, 955
curva paramétrica, 576, 757
  área abaixo de, 586
  comprimento do arco, 586
  inclinação de reta tangencial a, 584
curva polar, 594
  comprimento do arco de, 604
  gráfico de, 594
  reta tangencial a, 596
  simetria em, 596
curva(s)
  Bézier, 579, 591
  catástrofe em forma de cauda de andorinha, 583
  cissoide de Diocles, 600
  comprimento da, 768
  cúbica retorcida, 759
  da bruxa de Maria Agnesi, 583
  dog saddle, 802
  epicicloide, 584
  equipotencial, 803
  espacial, 756, 757
  espiral de Cornu, 590
  espiral toroidal, 759
  estrofoide, 605, 620
  fechada, 965
  grade, 984
  hélice, 757
  limite, 1003
  nível da, 796
  orientação da, 958, 971
  ovais de Cassini, 602
  paramétrica, 576, 757
  polar, 594
  simples, 966
  suave-parcial, 954
  trocoide, 582
curvas de contorno, 796
curva(s) de nível, 796, 798
curvas em grade, 984
curvas equipotenciais, 802
curva simples, 966
curva suave, 770
curvatura, 591, 770
curvatura do arco, 768
cúspide, 580
da bruxa de Maria Agnesi, 583
de integração
  de uma função vetorial, 762
  de uma série de potência, 675
  ordem reversa de, 884, 892
  parciais, 882
  sobre um sólido, 925
  termo-por-termo, 675
De Moivre, Abraham, A55
densidade
  de uma lâmina, 901
  de um sólido, 918
densidade da carga, 901, 919
derivada direcional, 839, 840, 842
  de uma função de temperatura, 839, 840
  segunda, 849
  valor máximo de, 843
derivada normal, 982
derivada(s)
  de funções exponenciais, A48, A49
  de funções logarítmicas, A45, A48
  de notação para parciais, 813
  de uma função vetorial, 762
  de uma série de potência, 675
  direcional, 839, 840, 842
  normais, 982
  pacial mais alta, 815
  parciais, 812
  segunda, 765
  segunda direcional, 848
  segunda parcial, 816
derivada(s) parciais, 812
  como inclinações de retas tangenciais, 814
  como uma taxa de variação, 812
  de uma função de mais de três variáveis, 815
  interpretações de, 814
  notações para, 813
  regra para encontrar, 813
  segundo, 816
derivadas parciais de ordem superior, 816
derivada e integral termo a termo, 675
Descartes, René, A10
design da caçamba, minimizar o custo do, 858
desigualdade de Taylor, 682
desigualdades, regra para, A4
desigualdade triangular, A8
  para vetores, 727
determinante, 727
de uma função vetorial de, 766
diagrama três, 832
diferenciação
  de uma função vetorial, 765
  de uma série de potência, 675
  fórmulas para funções vetoriais, 765
  implícitas, 815, 835
  parciais, 811, 815, 815
  termo-por-termo, 675
diferenciação implícita, 815, 835
diferencial, 827, 828
diferencial total, 827
diretriz, 606, 612
distância
  entre números reais, A7
  entre planos, 741
  entre ponto e plano, 734
  entre ponto e reta no espaço, 734
  entre pontos em um plano, A10
  entre pontos no espaço, 710
  entre retas, 741
Divergência, Teste para, 641
divergente
  de uma sequência, 626
  de uma série infinita, 637
  de um campo vetorial, 979
divisão de série potencial, 688
DNA, forma de hélice do, 757
do cilindro, 744
  parabólica, 744
  parametrização de, 986
dog saddle, 802
domínio de uma função de, 792
Douglas, Paul, 793
efeito de Doppler, 838
efeito multiplicador, 643
eixo z, 708
eixo x, 708, A9
eixo y, 708, A9
eixo de uma parábola, 606
eixos, coordenada, 708, A10
eixos coordenados, 708, A10
eixos de uma elipse, A17
eixos maiores de elipse, 608
eixos menores de elipse, 608
eixos polares, 592
elemento de um conjunto, A3
elipse, 607, 612, A17
  diretriz, 612
  eixos maiores, 608, 617
  eixos menores, 608
  equação polar, 614, 617
  excentricidade, 613
  focos, 607, 612
  propriedade de reflexão, 609
  vértices, 608
elipsoide, 745, 747
em gráficos polares, 596
energia
  cinética, 969
  consevação de, 968

  potencial, 969
energia cinética, 968
energia potencial, 968
epicicloide, 584
epitrocoide, 590
equação característica, 1021
equação complementar, 1026
equação de condução de calor, 822
equação de diferença logística, 635
equação de inclinação-interseção de uma reta, A12
equação de Laplace, 817, 980
equação de onda, 817
equação de ponto-inclinação de um reta, A11
equação de van der Waals, 822
equação diferencial, 525, 526, 527
  autônoma, 534
  Bernoulli, 561
  família de soluções, 526, 529
  homogênea, 1020
  linear, 557
  logística, 1020, 1025
  logística, 550, 635
  ordem de, 527
  parcial, 817
  primeira ordem, 527
  segunda ordem, 527, 1020
  separável, 538
  solução de, 527
  solução geral de, 529
  soluções linearmente independentes, 1021
equação diferencial autônoma, 534
equação diferencial de Bernoulli, 561
equação diferencial de segunda ordem, 527
  soluções de, 1020, 1025
equação diferencial homogênea, 1020
equação diferencial linear, 557, 1020
equação diferencial linear de primeira ordem, 527, 557
equação diferencial logística, 527, 550
equação diferencial não homogênea, 1020, 1026
equação diferencial parcial, 817
equação diferencial separável, 538
equação escalar de um plano, 738
equação linear, A13
  de um plano, 738
equação(ões)
  condução de calor, 822
  de Laplace, 817, 980
  de uma curva espacial, 757
  de uma elipse, 607, 614, A17
  de uma esfera, 711
  de uma hipérbole, 610, 614, A18
  de uma parábola, 606, 614, A16
  de uma reta, A11, A12, A13, A14
  de uma reta através de dois pontos, 736
  de uma reta no espaço, 734, 735
  de um círculo, A15
  de um gráfico, A14, A15
  de um plano, 737
  de um plano através de três pontos, 738
  diferença logística, 635
  diferencial logística, 527, 556
  diferencial (ver equação diferencial)
  forma de duas interseções, A14
  inclinação-interseção, A12
  linear, 738, A13
  Lotka-Volterra, 563
  onda, 817
  paramétrica, 576, 735, 757, 984
  polar, 594, 614
  ponto-inclinação, A11
  predador-presa, 563, 563
  segundo grau, A14
  simétrico, 736
  van der Waals, 822
  vetor, 734
equação polar de um cônico, 614
equação polar, gráfico de, 594
equações de Lotka-Volterra, 563
equações paramétricas, 576, 735, 757
  de uma curva espacial, 757
  de uma reta no espaço, 735
  de uma superfície, 984
  de um trajetória, 779
equações simétricas de uma reta, 736
erro
  na aproximação de Taylor, 693
esboço de domínio, 792
escalar, 714
esfera
  área superficial de, 989
  equação de, 711
  fluxo através, 999
  parametrização de, 986
espaço, tridimensional, 708
espiral de Cornu, 590
espiral toroidal, 759
estimativa da soma de uma série, 648, 654, 659, 664
estimativa de erro
  para séries alternadas, 659
estimativa do resto
  para as Séries Alternantes, 659
  para o Teste de Integral, 648
estratégia
  para série de testes, 667
estrofoide, 605, 620
Euler, Leonhard, 534, 646, 651, 683
excentricidade, 613
expoentes, leis de, A47, A49
exponenciais complexas, A57
faixa de Möbius, 992, 996
família
  de curvas paramétricas, 580
  de epicicloides e hipocicloides, 583
  de soluções, 526, 529
Fermat, Pierre, A10
ferramentas gráficas *Ver* sistema de computação algébrica
Fibonacci, 625, 634
figura de Lissajous, 578, 583
fluxo, 999, 1000
fluxo de calor, 1000
fluxo de líquido, 951, 979, 1000
fluxo elétrico, 1000
fluxo integral, 999
foco, 606, 612
  de uma elipse, 607, 612
  de uma hipérbole, 609
  de uma parábola, 606
  de uma seção cônica, 613
focos, 607
fólio de Descartes, 620
fonte, 1011
força
  centrípeta, 788
  constante, 724
  resultante, 718
  torque, 732
força constante, 724
força de restauração, 1032
força elétrica, 951
força resultante, 718
forma polar de um número complexo, A53
fórmula da distância, A11
  em três dimensões, 710
fórmula de Euler, A57
fórmula de ponto médio, A14
fórmulas de adição para seno e cosseno, A26
fórmulas de ângulo duplo, A26
fórmulas de Frenet-Serret, 775
fórmulas de produto, A26
fórmulas de subtração para seno e cosseno, A26
fórmulas do meio-ângulo, A26
fração e expansão contínua, 635
Fubini, Guido, 883
função componente, 756, 949
função cosseno, A23
  gráfico de, A28
  série de potência para, 684, 685
função de Airy, 673
função de Bessel, 670, 673
função de densidade de probabilidade, 905
função de Gompertz, 554, 556
função de logaritmo natural, A44
  derivada de, A45
  limites de, A45
  propriedades de, A45
função de produção de Cobb-Douglas, 794, 819, 865
função de valor vetorial. *Ver* função vetorial
  contínuo, 757
  limite de, 756
função diferenciável, 825
função exponencial natural, A46
  derivada de, A48
  propriedades de, A47
  série de potência para, 680
função harmônica, 817
função homogênea, 838
função integrável, 876
função linear, 794
função(ões), 792
  Airy, 673
  amplitude de, 792
  Bessel, 670, 673
  componente, 756, 949
  composto, 809
  comprimento do arco, 768
  continuidade de, 808, 810
  contínuo, 757
  de densidade de probabilidade, 905
  de duas variáveis, 792
  densidade de conjunto, 905, 919
  de polinômios, 808
  de representação como uma potência de série, 673
  de três variáveis, 799

  de varias variáveis, 792, 799
  de variáveis, 800
  de vetor, 756
  diferenciabilidade de, 825
  domínio de, 792
  Gompertz, 554, 556
  gradiente de, 841, 842
  gráfico de, 794
  harmônica, 817
  homogênea, 838
  integrável, 876
  limite de, 805, 809
  linear, 794
  logarítmica, A44, A49
  potenciais, 952
  produção de Cobb-Douglas, 794, 819, 865
  racionais, 808
  trigonométricas, A23
  valores máximo e mínimo de, 850
  valor médio de, 878, 921
função(ões) exponencial(is), RP4
  com base a, A49
  derivada, de, A49
  integração de, 687, 688
  limites de, A47
  propriedades de, A47
  série de potência para, 681
função(ões) logarítmica(s)
  com base a, A49
  derivadas de, A49
  limites de, A46
  propriedades de, A45
função polinomial de
  de duas variáveis, 808
função potencial, 952
função racional, 808
função secante, A23
  gráfico de, A28
função seno, A23
  gráfico de, A28
  série de potência para, 684
função tangencial, A23
  gráfico de, A28
função vetorial de, 756
  continuidade de, 757
  derivada de, 763
  integração de, 766
  limite de, 756
funções trigonométricas, A23
  gráficos de, A27, A28
Galileu, 579, 586, 606
Gause, G. F., 552
Gauss, Karl Friedrich, 1008, A31
geometria analítica, A9
Gibbs, Joseph Willard, 717
gradientee, 841, 842
gráfico polar, 594
gráfico(s)
  de equações em três dimensões, 709
  de funções trigonométricas, A27, RP2
  de uma curva paramétrica, 576
  de uma equação, A14, A15
  de uma função de duas variáveis, 794
  de uma sequência, 628
  de uma superfície paramétrica, 994
  polar, 594, 598
grande círculo, 932
Green, George, 971, 1007
Gregory, James, 677, 680
Hecht, Eugene, 696
hélice, 757
hipérbole, 609, 612, A18
  assíntotas, 609, A18
  diretriz, 612
  equação, 609, 610, 614, A18
  equação polar, 614
  equilateral, A19
  excentricidade, 613
  focos, 609, 612
  propriedade de reflexão, 612
  ramificações, 609, A18
  vértices, 609
hipérbole equilateral, A19
hiperboloide, 746
hiperesfera, 922
hipocicloid, 583
humidex, 811
Huygens, Christiaan, 580
identidades de Green, 982
identidades trigonométricas, A25
imagem de uma região, 934
imagem de um ponto, 934
inclinação, A11
inclinação campo de, 531
incrementar, 828
independência do caminho, 964
índice de sensação térmica, 793
índice de humidade-temperatura, 800, 811
índice de soma, A30
indução matemática, 632
  princípio de, A32
Inequalidade deCauchy-Schwarz, 727
inércia (momento de), 904, 918, 962
integração parcial, 882
integrais múltiplas. *Ver* integral dupla; integral(is) tripla(s)
integral definida, 874
integral dupla, 874, 876
  nas coordenadas polares, 895, 896, 896
  nas regiões gerais, 887, 888
  nos retângulos, 874
  propriedades de, 880, 892
  Regra do Ponto Médio, 878
  variação de variável na, 934, 937
integral(is)
  conversão para coordenadas cilíndricas, 923
  conversão para coordenadas esféricas, 927
  conversão para coordenadas polares, 896
  definida, 874
  dupla (ver integral dupla)
  iterada, 882, 882
  linear (ver integral linear)
  superfície, 993, 999
  tripla, 913, 914
  variação de variáveis em, 896, 933, 937, 938
integral iterada, 882, 882
integral linear, 954
  com respeito ao comprimento do arco, 956
  de campos de vetor, 959, 960
  para uma curva espacial, 958
  para uma curva plana, 954
  Teorema Fundamental para, 964
  trabalho definido como, 960
integral(s) tripla(s), 913, 914
  aplicações de, 917
  em coordenadas cilíndricas, 923
  em coordenadas esféricas, 927, 928
  Regra do Ponto Médio para, 920
  sobre uma região limite geral, 914
integral superficial, 993
  de um campo vetorial, 998
  sobre uma superfície paramétrica, 993
inteiro, A2
interseção *x*, A12, A17
interseção *y*, A12, A17
intersecção
  de conjuntos, A3
  de planos, 738
  de polar gráficos, área de, 602
  de três cilindros, 926
interseções, A17
intervalo, A3
intervalo aberto, A3
intervalo de convergência, 671
intervalo fechado, A3
isotérmico, 797, 802
Jacobiano de uma transformação, 936, 938
Jacobi, Carl, 936
joint densidade função de, 904, 918
j (vetor da base canônica), 716
Kepler, Johannes, 616, 781
Kondo, Shigeru, 683
k (vetor da base canônica), 716
Lagrange, Joseph-Louis, 860
lâmina, 901, 902
Laplace, Pierre, 817, 980
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 539, 691
Lei de Conservação de Energia, 969
lei de conservação de momento angular, 785
lei de cossenos, A30
lei de crescimento natural, 549
Lei de Gauss, 1000
Lei de Gravitação de Newton, 781, 951
Lei de Hooke, 1032
Lei de Kepler, 616, 781, 781, 785
Lei de Kirchhoff, 533, 1036
Lei de Planck, 700
Lei de Rayleigh-Jeans, 700
Lei de Resfriamento de Newton, 530
Lei do gás ideal, 822
Lei do Paralelogramo, 713, 727
Lei do Triângulo, 713
Leis de Limite, A35
  para funções de duas variáveis, 807
  para sequências, 627
lemniscata
  de uma curva espacial, 768
  de uma curva paramétrica, 586
  de uma curva polar, 603
  de um segmento linear, A7, A11
  de um vetor, 715
limaçon, 599
limite(s)
  de funções logarítmicas, A44
  de uma função de duas variáveis, 805
  de uma função de três variáveis, 809
  de uma função vetorial, 756
  de uma sequência, 626
limite superior mínimo, 631

linearidade de uma integral, 880
linearização, 825
linhas de corrente, 953
litotripsia, 609
logaritmo(s)
  leis de, A45
  natural, A44
Maclaurin, Colin, 680
magnitude de um vetor, 715
mapa de contorno, 796, 818
massa
  de uma lâmina, 901
  de uma superfície, 994
  de um fio, 955
  de um sólido, 918
massa, centro de. *Ver* centro de massa
medida de radiano, A21
meio *X*, 908
meio-espaço, 800
meio geométrico-aritmético, 634
membrana de borracha, vibração de, 670
Método de Euler, 534, 535
método de multiplicadores de Lagrange, 860, 860, 863
Método do Intervalo Fechado
  para uma função de duas variáveis, 855
método dos coeficientes indeterminados, 1026, 1029
método dos quadrados mínimos, 857
Möbius, August, 996
modelagem
  com equações diferenciais, 526
  crescimento populacional, 526, 549, 554, 569
  movimento de uma mola, 527
modelo de crescimento sazonal, 557
modelo de von Bertalanffy, 570
modelo logístico, 527, 549
modelo matemático. *Ver* modelo(s), matemáticos
modelo predador-presa, 562, 563
modelo(s), matemáticos
  Cobb-Douglas, para custos de produção, 794, 819, 865
  comparação de crescimento natural vs. logístico, 552
  crescimento sazonal, 557
  de corrente elétrica, 532
  função de Gompertz, 554, 556
  para crescimento populacional, 526, 554
  para vibração de membrana, 670
  predador-presa, 563
  von Bertalanffy, 570
módulo, A52
momento
  de inércia, 904, 918, 962
  de uma lâmina, 902
  de um sólido, 918
  polar, 904
  segundo, 904
  sobre um eixo, 903
  sobre um plano, 918
momento angular, 785
momento de inércia polar, 904
monkey saddle, 802
movimento circular uniforme, 778
movimento de uma mola, força influenciando
  amortecimento, 1033
  ressonância, 1036
  restauração, 1032
movimento de um projétil, 778
movimento no espaço, 776
movimento planetário, 781
  leis de, 616
multiplicação de série de potência, 688
multiplicador de Lagrange, 860, 860
multiplicador (Lagrange), 860, 860, 863
múltiplo escalar de um vetor, 714
natural, lei de crescimento, 549
Newton, Sir Isaac, 691, 781, 785
Nicomedes, 580
nó trefoil, 759
notação de soma, A30
notação sigma, A30
número
  complexo, A51
  inteiro, A2
  irracional, A2
  racional, A2
  real, A2
i(número imaginário), A51
número irracional, A2
número racional, A2
número real, A2
número(s) complexos, A51
  adição e subtração de, A51
  argumento de, A53
  divisão de, A51, A54
  forma polar, A53
  igualdade de, A51
  módulo de, A52
  multiplicação de, A51, A54
  parte imaginária de, A51
  parte real de, A51
  potências de, A55
  raízes de, A56
  raíz quadrada principal de, A52
números de direção, 736
óptica de terceira ordem, 697
octante, 708
e (o número), A46
  como uma soma de uma série infinita, 683
operador de Laplace, 980
óptica
  de primeira ordem, 697
  gaussiano, 697
  terceira ordem, 697
óptica de Gaussian, 697
óptica de primeira ordem, 697
órbita de um planeta, 781
ordem de integração, reversa, 884, 891
ordem de integração reversa, 884, 891
ordem de uma equação diferencial, 527
Oresme, Nicole, 640
orientação de uma curva, 958, 971
orientação de uma superfície, 997
orientação positiva
  de uma curva fechada, 971
  de uma curva limite, 1003
  de uma superfície, 998
origem, 708, A2, A9
ortogonal, 726
Ostrogradsky, Mikhail, 1008
otimização de turbina hidráulica, 867
ovais de Cassini, 602
padrões do vento na Baia de San Francisco
  área, 948
parábola, 606, 612, A16
  diretriz, 606
  eixo, 606
  equação, 606, 606
  equação polar, 614
  foco, 606, 612
  vértice, 606
paraboloide, 745, 748
paraboloide circular, 748
paraboloide elíptico, 745, 747
paraboloide hiperbólico 829, 746
paralelepípedo
  volume de, 731
parametrização de um curva espacial, 769
  com respeito ao comprimento do arco, 769
  suave, 770
parametrização suave, 770
parâmetro, 576, 735, 757
par ordenada, A9
partícula, movimento de, 776
periastro, 611
periélio, 617
planímetro, 973
plano cartesiano, A10
plano de fase, 564
plano horizontal, 709
plano normal, 773
plano osculador, 773
plano(s)
  ângulo entre, 739
  coordenada, 708
  equação de, através de três pontos, 738
  equação(s) de, 735, 737, 737
  horizontal, 709
  normal, 773
  osculadora, 773
  paralela, 739
  reta de intersecção, 738
  tangencial à superfície, 823, 844, 987
planos coordenados, 708
planos cortantes, 743
planos não paralelos, 739
planos paralelos, 739
plano tangente
  a uma superfície F(x, y, z), 824, 844
  a uma superfície paramétrica, 987
  para uma superfície de nível, 823, 844
polinômio de Taylor, 681, 859
  aplicações do, 692
polinômio de Taylor de *n*ésimo grau, 681
polo, 592
ponto de amostra, 875
ponto de equilíbrio, 564
ponto de sela, 851
ponto inicial
  de uma curva paramétrica, 577
  de um vetor, 713, 1023
ponto final de uma função paramétrica, 576
ponto final de um vetor, 713
ponto(s) crítico(s), 850, 858
pontos estacionários, 850
ponto(s) no espaço
  coordenadas de, 708
  distância entre, 710

  projeção de, 708
posição padrão de um ângulo, A22
primeira octante, 708
Princípio de Arquimedes, 1013
princípio de indução matemática, A32
princípio de superposição, 1028
probabilidade, 905
problema da braquistócrona, 579
problema do valor inicial, 529
problemas de mistura, 542
problema valor-limite, 1024
problema tautochrone, 579
produtividade marginal, 819
produto
  cruzado, 727 (ver também produto cruzado)
  escalar, 721
  escalar, 721 (ver também produto escalar)
  triplo, 731
  triplo escalar, 730
produto cruzado, 727
  caracterização geométrica de, 730
  direção de, 729
  magnitude de, 730
  propriedades de, 730
produto escalar, 721
  na form componente, 719
  propriedades de, 721
produto interior, 721
produto triplo, 730
produto triplo escalar, 730
  caracterização geométrica de, 731
produto triplo vetorial, 731
produto vetorial, 727
projeção, 708, 724
projeção de vetores, 724
projeção escalar, 724
projeção ortogonal, 726
projétil, caminho de, 583, 778
propensão marginal a consumir ou economizar, 643
propriedade de reflexão
  de uma elipse, 609
  de uma hipérbole, 612
propriedades de, 730
quadrante, A10
quatérnio, 717
radiação de estrelas, 700
radiação do corpo negro, 700
raio de convergência, 671
raio de giração, 905
raízes de um número complexo, A56
raíz quadrada principal de um número complexo, A52
ramos de uma hipérbole, 609, A18
rearranjo de A2 série, 665
região
  aberto, 965
  conectada, 965
  plano, de tipo I ou II, 888, 889
  plano simples, 971
  simplesmente conexa, 966
  sólido (de tipo 1, ou 3), 914, 914, 915
  sólido simples, 1008
região aberta, 965
região conectada, 965
região de plano de tipo I, 888
região de plano de tipo II, 889
região plana simples, 971
região plana tipo I ou tipo II, 888, 889
região polar, área de, 602
região simplesmente conexa, 966
região sólida, 1008
região sólida simples, 1008
Regra da Cadeia
  para várias variáveis, 831, 832, 833
regra da mão direita, 708, 729
Regra de l'Hospital, A41
Regra de Ponto Médio
  para integrais duplas, 878
  para integrais triplas, 920
regras de uma superfície, 744
relação comum, 637
relação de recorrência, 1040
representação(ões) de uma função
  como uma série de potência, 673
ressonância, 1036
resto da série de Taylor, 681
restrição, 860, 863
resumo de testes, 667
reta horizontal, equação de, A12
retângulo polar, 895
reta normal, 845
reta real, A3
retas de fluxo, 953
retas negativas, 737
reta(s) no espaço
  equação vetorial de, 735, 735
  equações paramétricas de, 735
  equações simétricas de, 736
  negativas, 737
  normal, 845
  tangente, 763
reta(s) no plano, A11
  equação de, A11, A12, A13
  equação de, através de dois pontos, 736
  horizontal, A12
  inclinação de, A11
  paralela, A13
  perpendicular, A13
retas paralelas, A13
retas perpendiculares, A13
reta(s) tangenciais
  a curva polar, 596
  a uma curva espacial, 764
  a uma curva paramétrica, 584, 585
reta vertical, A12
retrato de fase, 564
Roberval, Gilles de, 586
rosa de quatro pétalas, 595
rotacional de um vetor campo, 977
seção cônica, 606, 613
  diretriz, 606, 612
  equação polar, 614
  excentricidade, 613
  foco, 606, 607, 612
  transladada, 610, A19
  vértice (vértices), 606
seção transversal
  de uma superfície, 744
sector de um círculo, área do, 602
segmento de reta orientado, 713
segunda derivada, 765
  de uma função vetorial, 765
segunda derivada direcional, 848
segunda derivada parcial, 816
Segunda Lei de Movimento de Newton, 778, 781, 1032
segundo momento de inércia, 904
sequência, 624
  convergente, 625
  crescente, 630
  decrescente, 630
  de sumas parciais, 636
  divergente, 627
  Fibonacci, 625
  gráfico de, 628
  limite, 631
  limite de, 626
  logística, 635
  monotônica, 629
  termo de, 624
sequência convergente, 626
sequência crescente, 630
sequência decrescente, 630
sequência de Fibonacci, 625, 634
sequência divergente, 626
sequência infinita. *Ver* sequência
sequência limitada, 630
sequência logística, 635
sequência monotônica, 629
série *p*, 648
série, 636
  absolutamente convergente, 661
  alternada, 657
  alternadamente harmônica, 658, 661, 661
  binomial, 686
  coeficientes de, 669
  condicionalmente convergente, 662
  convergente, 637
  de Gregory, 677
  divergente, 637
  estratégia para teste, 667
  geométrica, 637
  harmônica, 640, 647
  infinita, 636
  Maclaurin, 679, 754 p-, 648
  potência, 669
  rearranjo de, 665
  soma de, 637
  soma parcial de uma série, 636
  Taylor, 679, 680
  termo de, 636
  trigonométrico, 669
série absolutamente convergente, 661
série alternadamente harmônica, 658, 661
série binomial, 685
  descoberto por Newton, 691
série condicionalmente convergente, 662
série convergente, 637
  propriedades de, 641
série de Gregory, 677
série de Maclaurin, 679, 680
  tabela de, 687
série de potência, 669
  coeficientes de, 669
  diferenciação de, 675
  divisão de, 688
  integração de, 675
  intervalo de convergência, 671
  multiplicação de, 688

  - para cosseno e seno, 684
  - para função exponencial, 684
  - raio de convergência, 671
  - representações de funções como, 674
- série de Taylor, 679, 680
- série divergente, 637
- série geométrica, 637
- série harmônica, 640, 648
  - alternada, 658
- série infinita. *Ver* série
- séries alternadas, 657
- série trigonométrica, 669
- Simpson, Thomas, 872
- sistema coordenada retangular, 709, A10
  - conversão para coordenadas cilíndricas, 923
  - conversão para coordenadas esféricas, 927
- sistema coordenado, A2
  - cartesiano, A10
  - cilíndrico, 925
  - esférico, 927
  - polar, 592
  - retangular, A10
- sistema coordenado cilíndrico de, 925
  - equações de conversão para, 923
  - integrais triplas na, 923
- sistema de computação algébrica, 577
  - para integração, 677
- sistema de computação algébrica, criação de gráfico com
  - campo vetorial, 950
  - curva espacial, 759
  - curva polar, 598
  - curvas de nível, 798
  - derivadas parciais, 816
  - equações paramétricas, 577
  - função de duas variáveis, 795
  - sequência, 629
  - superfície paramétrica, 986
- sistema de coordenada esférica, 927
  - equações de conversão para, 927
  - integrais triplas em, 927
- sistema de coordenada polar, 592
  - área em, 602
  - conversão de integral dupla para, 894, 896
  - coordenadas, 593, 594
  - equações de conversão para cartesiano
  - seções cônicas em, 613
- sistema de coordenadas cartesiano, A10
- sistema de coordenadas em três dimensões, 708, 709
- sistema lebre-lince, 566
- sistema LORAN, 612
- sólido
  - volume de, 913, 914
- sólido plano tipo 1, ou 3, 914, 914, 915
- solução de série de uma equação diferencial, 1039
- solução de uma equação diferencial, 527
- solução estacionária, 1038
- soluções de equações predador-presa, 563
- soluções linearmente independentes, 1021
- solution de equilíbrio, 527, 563
- soma
  - de uma série geométrica, 638
  - de uma série infinita, 637
  - de vetores, 713
  - telescópica, 639
- soma de Riemann dupla, 877
- soma de Riemann tripla, 913
- soma parcial de uma série, 636
- somas(s) de Riemann
  - para integrais múltiplas, 877, 913
- sorvedouro, 1011
- Stokes, Sir George, 1003, 1007
- superfície de nível, 800
  - plano tangencial a, 844
- superfície de revolução
  - representação paramétrica de, 986
- superfície fechada, 998
- superfície orientada, 996
- superfície paramétrica, 984
  - área superficial de, 988, 989
  - gráfico de, 995
  - integral superficial sobre, 993
  - plano tangencial a, 987
- superfície(s)
  - fechada, 998
  - gráfico de, 995
  - nível, 800
  - orientação positiva de, 998
  - orientado, 996
  - paramétrica, 984
  - quadrática, 744
  - suave, 987
- superfícies ortogonais, 849
- superfície(s) quadráticas, 744
- superfície suave, 988
- tapete de Sierpinski, 645
- taxa de crescimento
  - relativo, 549
- taxa de crescimento relativo, 549
- taxa média de variação, 776
- Taylor, Brook, 680
- Teorema da Função Implícita, 835, 836
- Teorema da Sequência Monotônica, 631
- Teorema de Clairaut, 817, A44
- Teorema de De Moivre, A55
- Teorema de Divergência, 1008
- Teorema de Estimativa de Séries Alternadas, 659
- Teorema de Fubini, 883, 913
- Teorema de Gauss, 1008
- Teorema de Green, 971, 1007
  - formas de vetor, 981
- Teorema de Stokes, 1003
- Teorema de Valor Médio
  - para integrais duplas, 943
- Teorema do Confronto,A38
  - para sequências, 627
- Teorema do Valor Extremo, 854
- Teorema do Valor Médio de Cauchy, A41
- Teorema Fundamental de Cálculo
  - para funções vetoriais de, 766
  - para integrais lineares, 964
  - versões em dimensões maiores, 1013
- termo de uma sequência, 624
- termo de uma série, 636
- Teste de Comparação, 652
- Teste de Comparação de Limite, 654
- Teste de Comparação para série, 652
- Teste de Concavidade, A40
- Teste de Integral, 647
- Teste de Raiz, 664
- Teste de Razão, 663
- Teste de Segundas Derivadas, 851
- Teste de Séries Alternadas, 657
- Teste para divergência, 641
- tetraedro, 734
- Thomson, William (Lord Kelvin), 971, 1003, 1007
- TNB, quadro, 773
- torção do espaço curvo, 775
- toroide, 993
- torque, 785
- torres de arrefecimento, hiperbólicas, 748
- Torricelli, Evangelista, 586
- trabalho (força)
  - definida como uma reta integral, 959
- traçado de uma superfície, 744
- trajetória, para equações paramétricas, 779
- trajetória de fase, 564
- trajetória ortogonal, 541
- transformação *C'*, 934
- transformação de *T*e T', 934, 934
- transformação inversa, 934
- transformação uma-a-uma, 934
- transformação, 933
  - inversa, 934
  - Jacobiano de, 936, 938
  - uma-a-uma, 934
- tridimensionalmente retangular, 708
- tripla ordenada, 708
- trocoide, 582
- união de conjuntos, A3
- uso de retas escondidas, 743
- valor absoluto, A6, A52
- valores esperados, 908
- Valores Máximo Absoluto e Mínimo Absolutos, 850, 854
- valores máximo e mínimo, 850
- valores máximo e mínimo locais, 850
- valor médio de uma função de, 878, 921
- variação de parâmetros, método de, 1030
- variação de variável(is)
  - em uma integral dupla, 896, 935, 936
  - em um integral tripla, 923, 927, 939
- variáveis, variação de. *Ver* variação de variável(s)
- variável aleatória independente, 907
- variável dependente, 792, 833
- variável independente, 792, 832
- variável intermediária, 833
- variável(is)
  - aleatória independente, 907
  - dependente, 792, 833
  - independente, 792, 832
  - intermediária, 833
- velocidade angular, 778
- velocidade de campo incompressível, 980
- velocidade de uma partícula, 776
- velocidade terminal, 545
- Verhulst, Pierre-François, 527
- vertical, 792
- vértice de uma parábola, 606
- vértices de uma elipse, 608
- vértices de uma hipérbole, 609
- vetor binormal, 772
- (vetor da base canônica), 716
- vetor de deslocamento, 713, 724
- vetor de posição, 715

vetor de unidade, 717
vetor de velocidade, 776
vetor *n*-dimensional, 715
vetor equação
    de uma reta, 734, 735
    de um plano, 737
vetor(es), 713
    aceleração, 777
    adição de, 713, 715
    algébrica, 715, 715
    ângulo entre, 721
    base, 716
    base canônica, 716
    bidimensional, 715
    binormal, 772
    combinando velocidade, 719
    componentes de, 724
    comprimento de, 715
    coplanar, 731
    deslocamento, 724
    diferença, 714
    força, 951
    gradiente, 841, 842
    igualdade de, 713
    magnitude de, 715
    multiplicação de, 714, 716
    múltiplo escalar de, 714
    n-dimensional, 715
    normal, 737
    ortogonal, 722
    paralelo, 714
    perpendicular, 723
    posição, 715
    produto cruzado de, 727
    produto escalar, 721
    produto triplo, 732
    propriedades de, 716
    representação de, 715
    representação geométrica de, 715
    tangente, 763
    tridimensional, 715
    unidade, 717
    unidade normal, 772
    unidade tangencial, 763
    velocidade, 776
    zero, 713
vetores coplanares, 731
vetores de base, 716
vetores equivalentes, 713
vetores ortogonais, 722
vetores paralelos, 714
vetores perpendiculares, 722
vetores zero, 713
vetor gradiente, 841, 842
    interpretações de, 846
vetor normal, 737, 772
vetor normal de unidade, 772
vetor normal de unidade principal, 772
vetor secante, 763
vetor tangencial, 763
vetor tangencial de unidade, 763
vibração amortecida, 1033
vibração criticamente amortecida, 1034
vibração de uma membrana de borracha, 670
vibração de uma mola, 1032
vibração subamortecida, 1034
vibração superamortecida, 1034
vibrações, 1032, 1033, 1035
vibrações forçadas, 1035
Volterra, Vito, 563
volume
    de uma hiperesfera, 922
    de um sólido, 876
    por coordenadas polares, 898
    por integrais duplas, 874
    por integrais triplas, 917
Wren, Sir Christopher, 588

PÁGINA DE REFERÊNCIA 1

ÁLGEBRA

Operações Aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Expoentes e Radicais

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Fatoração de Polinômios Especiais

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Teorema Binomial

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

onde $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k}$

Fórmula Quadrática

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Desigualdades e Valor Absoluto

Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

Se $a < b$, então $a + c < b + c$.

Se $a < b$ e $c > 0$, então $ca < cb$.

Se $a < b$ e $c < 0$, então $ca > cb$.

Se $a > 0$, então

$|x| = a$ significa que $x = a$ ou $x = -a$

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$

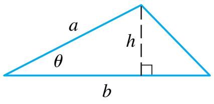
$|x| > a$ significa que $x > a$ ou $x < -a$

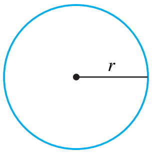
GEOMETRIA

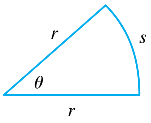
Fórmulas Geométricas

Fórmulas para área A, circunferência C e volume V:

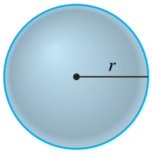
Triângulo	Círculo	Setor do Círculo
$A = \frac{1}{2}bh$	$A = \pi r^2$	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
$= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$	$C = 2\pi r$	$s = r\theta$ (θ em radianos)

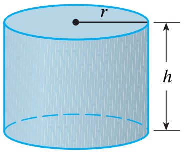


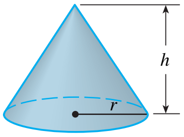




Esfera	Cilindro	Cone
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A = 4\pi r^2$		$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$







Fórmulas de Distância e Ponto Médio

Distância entre $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ponto Médio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Retas

Inclinação da reta através de $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Coeficiente angular da reta através de $P_1(x_1, y_1)$ com inclinação m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Função afim da reta com inclinação m e interceptando o eixo y em b:

$$y = mx + b$$

Círculos

Equação do círculo com centro (h, k) e raio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

PÁGINA DE REFERÊNCIA 2

TRIGONOMETRIA

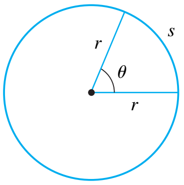
Medição do Ângulo

π radianos $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad$ $1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta$

(θ em radianos)

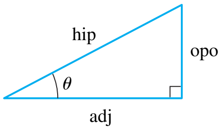


Trigonometria de Ângulo Reto

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{opo}}{\text{hip}}$ $\qquad$ $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{opo}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hip}}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{adj}}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\text{opo}}{\text{adj}}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{opo}}$

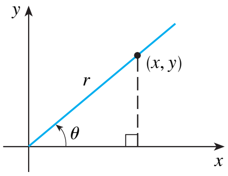


Funções Trigonométricas

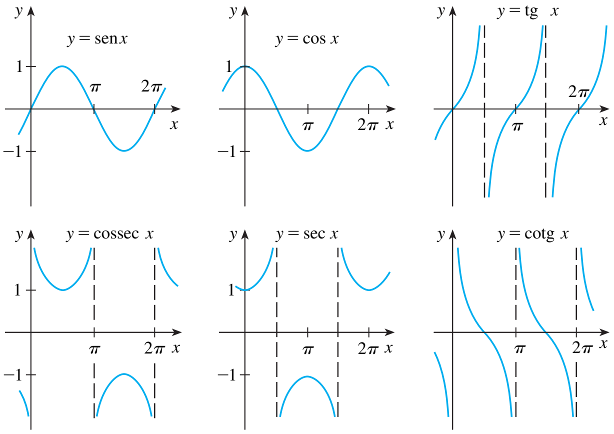
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\qquad$ $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{x}{y}$



Gráficos de Funções Trigonométricas



Funções Trigonométricas de Ângulos Importantes

θ	radianos	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\operatorname{tg}\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

Identidades Fundamentais

$\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad$ $1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$

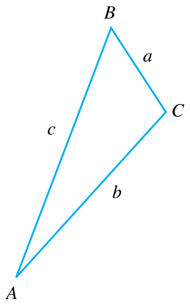
$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg}\theta$

Lei dos Senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



Lei dos Cossenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Fórmulas de Adição e Subtração

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$

$\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$

Fórmulas de Ângulo Duplo

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Fórmulas de Metade do Ângulo

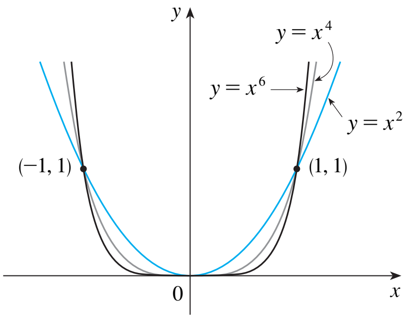
$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

PÁGINA DE REFERÊNCIA 3

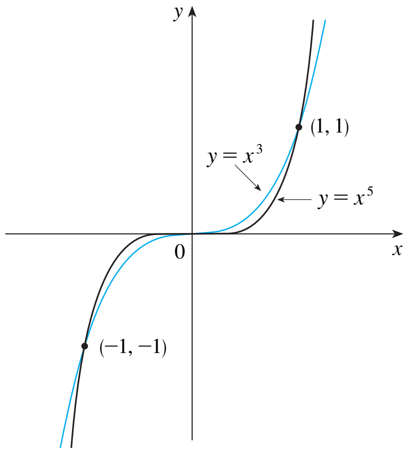
FUNÇÕES ESPECIAIS

Funções Potências $f(x) = x^a$

(i) $f(x) = x^n$, n um inteiro positivo

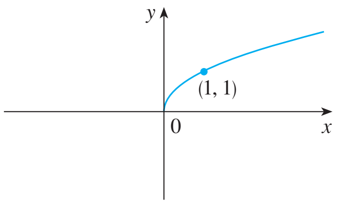


n par

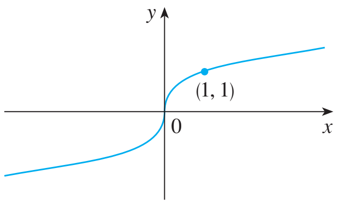


n ímpar

(ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n um inteiro positivo

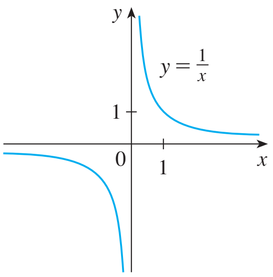


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

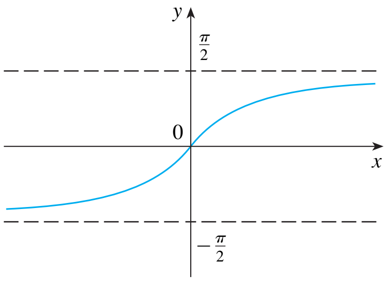


Funções Trigonométricas Inversas

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{tg}^{-1} x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg}\ x$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{tg}^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

PÁGINA DE REFERÊNCIA 4

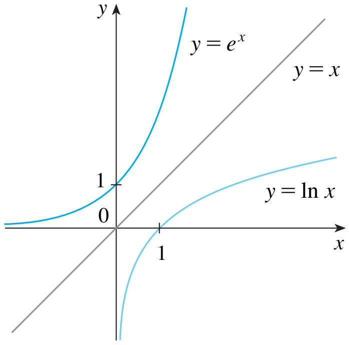
FUNÇÕES ESPECIAIS

Funções Exponenciais e Logarítmicas

$\log_a x = y \iff a^y = x$

$\ln x = \log_e x$, onde $\ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$



$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

Equações de Cancelamento

$\log_a(a^x) = x$ $a^{\log_a x} = x$

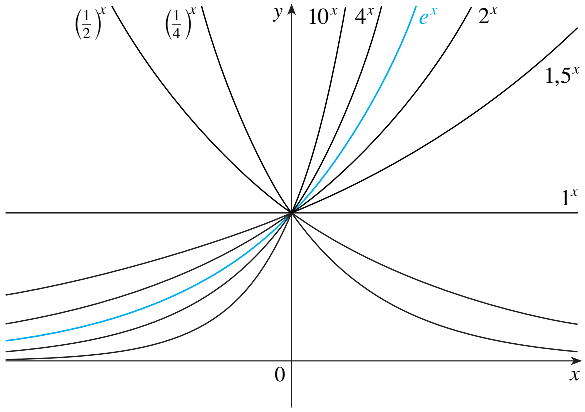
$\ln(e^x) = x$ $e^{\ln x} = x$

Leis de Logaritmos

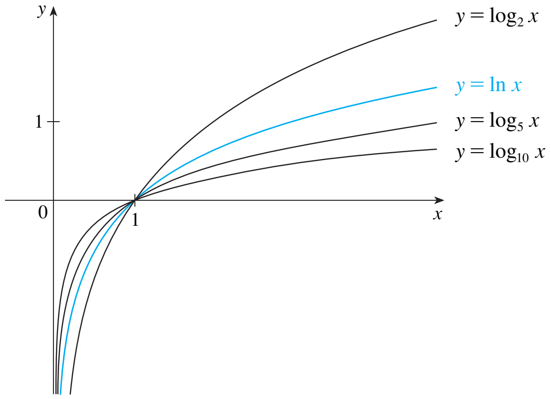
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$



Funções Exponenciais



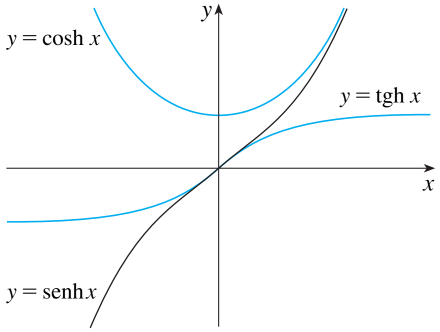
Funções Logarítmicas

Funções Hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$



Funções Hiperbólicas Inversas

$y = \operatorname{senh}^{-1}x \iff \operatorname{senh} y = x$

$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x$ e $y \geqslant 0$

$y = \operatorname{tgh}^{-1}x \iff \operatorname{tgh} y = x$

$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\operatorname{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

PÁGINA DE REFERÊNCIA 5

REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO

Fórmulas Gerais

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regra de Produto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regra do Quociente)

7. $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regra da Cadeia)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regra da Potência)

Funções Exponenciais e Logarítmicas

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Funções Trigonométricas

13. $\dfrac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \cos x$

14. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen}\, x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\text{tg}\, x) = \sec^2 x$

16. $\dfrac{d}{dx}(\text{cossec}\, x) = -\text{cossec}\, x \;\text{cotg}\, x$

17. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \;\text{tg}\, x$

18. $\dfrac{d}{dx}(\text{cotg}\, x) = -\text{cossec}^2 x$

Funções Trigonométricas Inversas

19. $\dfrac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\text{tg}^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\text{cossec}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\text{cotg}^{-1} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Funções Hiperbólicas

25. $\dfrac{d}{dx}(\text{senh}\, x) = \cosh x$

26. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \text{senh}\, x$

27. $\dfrac{d}{dx}(\text{tgh}\, x) = \text{sech}^2 x$

28. $\dfrac{d}{dx}(\text{cossech}\, x) = -\text{cossech}\, x \;\text{cotgh}\, x$

29. $\dfrac{d}{dx}(\text{sech}\, x) = -\text{sech}\, x \;\text{tgh}\, x$

30. $\dfrac{d}{dx}(\text{cotgh}\, x) = -\text{cossech}^2 x$

Funções Hiperbólicas Inversas

31. $\dfrac{d}{dx}(\text{senh}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\text{tgh}^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\text{cossech}^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\text{cotgh}^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

PÁGINA DE REFERÊNCIA 6

TABELA DE INTEGRAIS

Fórmulas Básicas

1. $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

9. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

10. $\displaystyle\int \sec u\ \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

11. $\displaystyle\int \operatorname{cosecc} u\ \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cossec} u + C$

12. $\displaystyle\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

15. $\displaystyle\int \operatorname{cossec} u\,du = \ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Fórmulas Envolvendo $\sqrt{a^2+u^2}$, $a > 0$

21. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

22. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

26. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

27. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

TABELA DE INTEGRAIS

Fórmulas Envolvendo $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

30. $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

31. $$\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

32. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$$

33. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

34. $$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

35. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$$

36. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$$

37. $$\int (a^2 - u^2)^{3/2}\, du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

38. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Fórmulas Envolvendo $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

39. $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

40. $$\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

41. $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$$

42. $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

43. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

44. $$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

45. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

46. $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

TABELA DE INTEGRAIS

Fórmulas Envolvendo $a + bu$

47. $\displaystyle \int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}\left(a + bu - a \ln|a + bu|\right) + C$

48. $\displaystyle \int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2 \ln|a + bu|\right] + C$

49. $\displaystyle \int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

50. $\displaystyle \int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle \int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2} \ln|a + bu| + C$

52. $\displaystyle \int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} - \frac{1}{a^2} \ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle \int \frac{u^2\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu|\right) + C$

54. $\displaystyle \int u\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle \int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$

56. $\displaystyle \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a + bu} + C$

57. $\displaystyle \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{se } a > 0$

$\displaystyle \qquad\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \quad \text{se } a < 0$

58. $\displaystyle \int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

59. $\displaystyle \int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a + bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

60. $\displaystyle \int u^n\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{b(2n + 3)}\left[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle \int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2na}{b(2n + 1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a + bu}}$

62. $\displaystyle \int \frac{du}{u^n\sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n - 1)u^{n-1}} - \frac{b(2n - 3)}{2a(n - 1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}$

TABELA DE INTEGRAIS

Fórmulas Trigonométricas

63. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \operatorname{tg}^2 u\, du = \operatorname{tg} u - u + C$

66. $\int \operatorname{cotg}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \operatorname{tg}^3 u\, du = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \operatorname{cotg}^3 u\, du = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \operatorname{tg} u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

72. $\int \operatorname{cossec}^3 u\, du = -\frac{1}{2}\operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75. $\int \operatorname{tg}^n u\, du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\, du$

76. $\int \operatorname{cotg}^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u\, du$

77. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg} u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78. $\int \operatorname{cossec}^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cotg} u \operatorname{cossec}^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cossec}^{n-2} u\, du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

TABELA DE INTEGRAIS

84. $\displaystyle\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\displaystyle\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $$\int \operatorname{sen}^n u\,\cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1}u\,\cos^{m+1}u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2}u\,\cos^m u\,du$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1}u\,\cos^{m-1}u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u\,\cos^{m-2}u\,du$$

Fórmulas Trigonométricas Inversas

87. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}u\,du = u\operatorname{sen}^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\displaystyle\int \cos^{-1}u\,du = u\cos^{-1}u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1}u\,du = u\operatorname{tg}^{-1}u - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\displaystyle\int u\operatorname{sen}^{-1}u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1}u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\displaystyle\int u\cos^{-1}u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1}u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\displaystyle\int u\operatorname{tg}^{-1}u\,du = \frac{u^2+1}{2}\operatorname{tg}^{-1}u - \frac{u}{2} + C$

93. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen}^{-1}u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1}u - \int\frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\quad n \neq -1$

94. $\displaystyle\int u^n\cos^{-1}u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1}u + \int\frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\quad n \neq -1$

95. $\displaystyle\int u^n\operatorname{tg}^{-1}u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{tg}^{-1}u - \int\frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right],\quad n \neq -1$

Fórmulas Exponenciais e Logarítmicas

96. $\displaystyle\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\displaystyle\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98. $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

100. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\displaystyle\int u^n\ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\displaystyle\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Fórmulas Hiperbólicas

103. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\displaystyle\int \operatorname{tgh} u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\displaystyle\int \operatorname{cotgh} u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,du = \operatorname{tg}^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\displaystyle\int \operatorname{cossech} u\,du = \ln\left|\operatorname{tgh}\tfrac{1}{2}u\right| + C$

109. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + C$

110. $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2 u\,du = -\operatorname{cotgh} u + C$

111. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,\operatorname{tgh} u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\displaystyle\int \operatorname{cossech} u\,\operatorname{cotgh} u\,du = -\operatorname{cossech} u + C$

TABELA DE INTEGRAIS

Fórmulas Envolvendo $\sqrt{2au - u^2}$, $a > 0$

113. $\displaystyle\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

114. $\displaystyle\int u\sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

115. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

116. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

117. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

118. $\displaystyle\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

119. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

120. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$